УДК 519.21

О. О. Погоріляк (Ужгородський національний університет)

МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ КОКСА, КЕРОВАНИХ БРОУНІВСЬКИМ РУХОМ

In this article simulation of random Cox processes are considered. We study the case when the Cox processes random intensity generated by a Brownian motion random process. Models of such processes with accuracy and reliability given beforehand are constructed.

В даній роботі розглядається моделювання випадкових процесів Кокса, інтенсивність яких породжується за допомогою процесу броунівського руху. Моделі процесів будуються з наперед заданими точністю та надійністю.

1. Вступ. В даній роботі розглядаються випадкові процеси Кокса, тобто подвійно стохастичні випадкові процеси Пуассона, випадкова інтенсивність яких, в свою чергу, породжується випадковим процесом $\exp\{Y(t)\}$, де $Y(t)$ є процесом броунівського руху. В роботі будуються моделі процесів даного класу з заданими наперед точністю та надійністю.

Позначимо $\{\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P}\}$ – стандартний ймовірнісний простір, $\mathfrak{B}$ σ-алгебру борелівських підмножин множини $\mathbf{T}$, $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$.

Означення 1. *Нехай $\{Z(\omega, t), t \in \mathbf{T}\}$– невід'ємний випадковий процес. Якщо умовний розподіл $\{\nu(B), B \in \mathfrak{B}\}$ при будь-якій реалізації $Z(\omega, t)$ є пуассонівським процесом з функцією інтенсивності $\mu(B) = \int_B Z(\omega_0, t)\,dt$, то $\nu(B)$ називається випадковим процесом Кокса, керованим процесом $Z(t)$.*

Якщо $Z(t) = \exp\{Y(t)\}$, де $Y(t)$ – процес броунівського руху, то $\nu(B)$ називатимемо випадковим процесом Кокса, керованим процесом броунівського руху $Y(t)$.

Оскільки $\{\nu(B), B \in \mathfrak{B}\}$ це подвійно стохастичний процес, то його модель будується в два етапи. Спочатку необхідно змоделювати процес броунівського руху $\{Y(t), t \in \mathbf{T}\}$. Потім, розглянувши деяке розбиття $D_{\mathbf{T}}$ області $\mathbf{T}$, на кожному елементі розбиття побудувати модель пуассонівської випадкової величини з відповідним середнім.

Нехай область моделювання $\mathbf{T}$ має вигляд $\mathbf{T} = [0, T]$, $T \in \mathbf{R}_+$. Виберемо деяке розбиття $D_{\mathbf{T}}$ цієї області. Елементи розбиття позначимо $B_i : B_i \cap B_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $i, j = \overline{1, k}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} B_i = \mathbf{T}$.

Через $\widetilde{Y}(t)$ позначимо модель процесу $Y(t)$, $\widetilde{\nu}(B_i)$ – модель $\nu(B_i)$, тобто модель пуассонівської випадкової величини з середнім $\widetilde{\mu}(B_i) = \int_{B_i} \exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\} dt$.

$\widetilde{\nu}(B_i)$ – це число точок моделі, що належать області B_i, але ми не знаємо їхнього справжнього розташування, тому розміщуємо їх в B_i довільно. Якщо ж $\widetilde{\nu}(B_i) = 1$, то точку розміщуємо в центрі області.

Для того, щоб модель якомога менше відрізнялася від справжнього процесу необхідно, щоб умовні ймовірності $p_{kY}(B_i) = \mathbf{P}\{\nu(B_i) = k \,/\, Y(t), t \in \mathbf{T}\}$ та $\widetilde{p}_{kY}(B_i) = \mathbf{P}\left\{\widetilde{\nu}(B_i) = k \,/\, \widetilde{Y}(t), t \in \mathbf{T}\right\}$ були якомога близькі, а також ймовірність того, що число точок $\nu(B_i)$ (відповідно і $\widetilde{\nu}(B_i)$) буде більше одиниці, також мала. Таким чином, задача моделювання процесу Кокса, керованого броунівським рухом розбивається на дві задачі, а саме вибору розбиття області $\mathbf{T}$ та побудови моделі процесу броунівського руху $Y(t)$.

2. Побудова моделі процесу броунівського руху $Y(t)$. Процес броунівського руху $Y(t)$ розглядатимемо на проміжку $\mathbf{T} = [0, T], T \in \mathbf{R}_+$. Не зменшуючи загальності вважатимемо, що $Y(0) = 0$, $\mathbf{E}Y(t) = 0$. Відомо, що $\mathbf{D}Y(t) = t$, $B(t,s) = \mathbf{E}Y(t)Y(s) = \min(t,s)$ [1].

Знайдемо власні числа і власні функції кореляційної функції процесу броунівського руху. Для цього розглянемо інтегральне рівняння

$$\lambda_n \varphi_n(t) = \int_0^T \min(t,s)\varphi_n(s)ds = \int_0^t s\varphi_n(s)ds + \int_t^T t\varphi_n(s)ds.$$

Очевидно, що $\varphi_n(0) = 0$. Продиференціювавши по t, отримаємо:

$$\lambda_n \varphi_n^{'}(t) = \int_t^T \varphi_n(s)ds.$$

Продиференціювавши вдруге, матимемо рівняння

$$\lambda_n \varphi_n^{''}(t) = -\varphi_n(t).$$

Ортонормовані розв'язки останнього рівняння, що задовольняють крайовим умовам $\varphi_n(0) = 0$ та $\varphi_n^{'}(T) = 0$, мають вигляд:

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) t}{T},$$

де

$$\lambda_n = \left(\frac{T}{\frac{\pi}{2} + \pi n} \right)^2$$

–відповідні їм власні значення, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Таким чином, використовуючи теорему про розклад випадкового процесу в ортогональний ряд [1], матимемо:

$$Y(t) = \sqrt{2T} \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \frac{\sin \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{T}}{\frac{\pi}{2} + \pi n}, \tag{1}$$

де ξ_n – послідовність незалежних гауссових випадкових величин з параметрами 0 та 1, причому ряд збігається з імовірністю 1 при фіксованому t.

Природно, що за модель процесу броунівського руху $\widetilde{Y}(t)$ прийматимемо суму

$$\widetilde{Y}(t) = \sqrt{2T} \sum_{n=0}^{N} \xi_n \frac{\sin \frac{\frac{\pi}{2} + \pi n}{T}}{\frac{\pi}{2} + \pi n}, \tag{2}$$

де $N \in \mathbf{N}$.

3. Задача вибору розбиття області T. Як вже зазначалось вище, для того, щоб модель процесу Кокса, керованого броунівським рухом, була якомога близькою до справжнього процесу, необхідно щоб ймовірність того, що в кожен елемент розбиття потрапляє більше однієї точки була близькою до нуля. Тому розбиття $D_{\mathbf{T}}$ області $\mathbf{T} = [0, T]$, $T \in \mathbf{R}_+$ вибираємо так, щоб виконувалась нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_i\right) > 1\right\} < \delta, \tag{3}$$

де δ певне наперед задане число (наприклад, $\delta = 0.01$).

Теорема 1. *Нехай* $\{\nu\left(B_i\right), B_i \subset \mathfrak{B}\}$ *випадковий процес Кокса, керований процесом броунівського руху* $Y\left(t\right), t \in \mathbf{T}$, *розбиття* $D_{\mathbf{T}} = \{t_0, t_1, \ldots, t_k\}$ *таке, що* $B_i = [t_{i-1}, t_i]$, $t_{i+1} - t_i = d = \frac{T}{k}$, $i = \overline{0, k-1}$. *Для того, щоб виконувалось співвідношення* (3) *достатньо вибрати* $d = \frac{T}{k}$ *так, щоб виконувалась нерівність*

$$d \leq \sqrt{2\delta \exp\left\{-2T\right\}}.$$

Доведення. Оскільки

$$\mathbf{P}\left\{\nu\left(B_i\right) > 1\right\} = \mathbf{E}\left[1 - \exp\left\{-\mu\left(B_i\right)\right\} - \mu\left(B_i\right)\exp\left\{-\mu\left(B_i\right)\right\}\right],$$

та при $x > 0$ маємо $1 - \exp\left\{-x\right\}\left(1 + x\right) \leq \frac{x^2}{2}$, то для виконання нерівності (3) досить щоб справджувалась нерівність $\mathbf{E}\frac{\mu^2(B_i)}{2} < \delta$.

$$\mathbf{E}\mu^2\left(B_i\right) = \mathbf{E}\left[\int\limits_{B_i} \exp\left\{Y\left(t\right)\right\} dt\right]^2 = \mathbf{E}\int\limits_{B_i} \exp\left\{Y\left(t\right)\right\} dt \int\limits_{B_i} \exp\left\{Y\left(s\right)\right\} ds =$$

$$= \iint\limits_{B_i \times B_i} \mathbf{E}\exp\left\{Y\left(t\right) + Y\left(s\right)\right\} dtds \leq \iint\limits_{B_i \times B_i} \exp\left\{\frac{\mathbf{E}\left[Y\left(t\right) + Y\left(s\right)\right]^2}{2}\right\} dtds \leq$$

$$\leq \iint\limits_{B_i \times B_i} \exp\left\{\frac{\mathbf{E}Y^2(t)}{2} + \mathbf{E}(Y(t)Y(s)) + \frac{\mathbf{E}Y^2(s)}{2}\right\} dtds \leq$$

$$\leq \iint\limits_{B_i \times B_i} \exp\left\{2\min\left\{t, s\right\}\right\} dtds \leq d^2 \exp\left\{2T\right\}.$$

Таким чином, твердження теореми випливає з останніх двох нерівностей.

4. Наближення випадкового процесу Кокса, керованого броунівським рухом з певною точністю та надійністю. Очевидно, що модель випадкового процесу Кокса $\{\nu\left(B_i\right), B \subset \mathfrak{B}\}$, керованого броунівським рухом $Y(t)$ потрібно будувати так, щоб умовні ймовірності $p_{kY}(B_i)$ та $\widetilde{p}_{kY}(B_i)$ з ймовірністю близькою до одиниці відрізнялись мало. Тому природним є наступне означення.

Означення 2. *Скажемо, що модель випадкового процесу Кокса* $\{\nu\left(B_i\right), B_i \subset \mathfrak{B}\}$, *керованого броунівським рухом* $Y(t)$, *наближає його з точністю* α, $0 < \alpha < 1$ *та надійністю* $1 - \gamma$, $0 < \gamma < 1$, *якщо виконується нерівність*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i \in \mathfrak{B}} \left| p_{kY}\left(B_i\right) - \widetilde{p}_{kY}\left(B_i\right)\right| > \alpha\right\} < \gamma.$$

Лема 1. *Має місце нерівність*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B}}\left|p_{kY}\left(B_i\right)-\widetilde{p}_{kY}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}\leq\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}.$$

Доведення див. в [2].

Лема 2. $\forall p>1$ *справедлива оцінка*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}\leq\frac{2k\,J_N^p\,p^{\frac{p}{2}}\exp\left\{-\frac{p}{2}+p^2T\right\}}{\alpha^p},$$

де

$$J_N=\frac{2dT^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{N+\frac{1}{2}}}.$$

Доведення. Очевидні нерівності:

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_{i_1,\ldots,i_n}\right)\right|>\alpha\right\}\leq$$
$$\leq\sum_{i=1}^{k}\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}\leq$$
$$\leq k\max_{B_i\in\mathfrak{B}}\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}. \quad (4)$$

За нерівністю Чебишева маємо

$$\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}\leq\frac{\mathbf{E}\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|^p}{\alpha^p}. \quad (5)$$

Нехай $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $p,q>0$, і згідно нерівності Гельдера отримуємо

$$\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|\leq\int\limits_{B_i}\left|\exp\left\{Y\left(t\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}\right|dt\leq$$
$$\leq\left(\int\limits_{B_i}\left|\exp\left\{Y\left(t\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int\limits_{B_i}1^q dt\right)^{\frac{1}{q}}=$$
$$=d^{n\left(1-\frac{1}{p}\right)}\left(\int\limits_{B_i}\left|\exp\left\{Y\left(t\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}. \quad (6)$$

Підставляючи (6) в (5), справджується нерівність

$$\mathbf{P}\left\{\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}\leq$$
$$\leq\frac{\mathbf{E}\,d^{p-1}\int_{B_i}\left|\exp\left\{Y\left(t\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}\right|^p dt}{\alpha^p}=$$
$$=\frac{d^{p-1}\int_{B_i}\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(t\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}\right|^p dt}{\alpha^p}. \quad (7)$$

Оцінимо $\mathbf{E}\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right|^p$. Використовуючи спочатку нерівність

$$|\exp\{x\}-\exp\{y\}|\le|x-y|\exp\{\max(x,\,y)\}\,,$$

а потім нерівність Гельдера, отримаємо

$$\mathbf{E}\left|\exp\{Y(t)\}-\exp\left\{\widetilde{Y}(t)\right\}\right|^p\le\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^p\exp\left\{p\max\left(Y(t)\,,\,\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\le$$
$$\le\left(\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\mathbf{E}\exp\left\{2p\max\left(Y(t)\,,\,\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (8)$$

Для моментів нормально розподіленої випадкової величини ξ з параметрами 0, σ^2 має місце рівність

$$\mathbf{E}\,|\xi|^p=c_p\,\left(\sigma^2\right)^{\frac{p}{2}}\,, \quad (9)$$

де

$$c_p\le\sqrt{2}p^{\frac{p}{2}}\exp\left\{-\frac{p}{2}\right\}. \quad (10)$$

Із (9) випливає, що

$$\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^{2p}=c_{2p}\left(\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^2\right)^p.$$

Врахувавши, що в зображеннях (1) і (2) процесу броунівського руху $Y(t)$ та його моделі $\widetilde{Y}(t)$ відповідно, $\mathbf{E}\xi_k\xi_l=\delta_{kl}$, де δ_{kl} – символ Кронекера, матимемо:

$$\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^2=\mathbf{E}\left|\sqrt{2T}\sum_{k=0}^{\infty}\xi_k\frac{\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\pi k}{T}}{\frac{\pi}{2}+\pi k}-\sqrt{2T}\sum_{k=0}^{N}\xi_k\frac{\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\pi k}{T}}{\frac{\pi}{2}+\pi k}\right|^2=$$
$$=\mathbf{E}\left|\sqrt{2T}\sum_{k=N+1}^{\infty}\xi_k\frac{\sin\frac{\frac{\pi}{2}+\pi k}{T}}{\frac{\pi}{2}+\pi k}\right|^2=2T\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{\frac{\pi}{2}+\pi k}{T}}{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)^2}\le$$
$$\le\frac{2T}{\pi^2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{2}+k\right)^2}\le\frac{2T}{\pi^2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{1}{2}\right)}=$$
$$=\frac{2T}{\pi^2}\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\left(k-\frac{1}{2}\right)}-\frac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)}\right)=\frac{2T}{\pi^2\left(N+\frac{1}{2}\right)}.$$

Отже,

$$\mathbf{E}\left|Y(t)-\widetilde{Y}(t)\right|^{2p}\le c_{2p}\left(\frac{2T}{\pi^2\left(N+\frac{1}{2}\right)}\right)^p \quad (11)$$

Перейдемо до оцінювання $\mathbf{E}\exp\left\{2p\max\left(Y(t)\,,\,\widetilde{Y}(t)\right)\right\}$. Оскільки для випадкової величини $\xi=N\left(0,\,\sigma^2\right)$ має місце співвідношення $\mathbf{E}\exp\{\lambda\xi\}=\exp\left\{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}\right\}$, то

$$\mathbf{E}\exp\left\{2p\max\left(Y(t)\,,\widetilde{Y}(t)\right)\right\}\le\mathbf{E}\exp\{2pY(t)\}+\mathbf{E}\exp\left\{2p\widetilde{Y}(t)\right\}$$
$$=\exp\left\{2p^2\mathbf{E}Y^2(t)\right\}+\exp\left\{2p^2\mathbf{E}\widetilde{Y}^2(t)\right\}\le2\exp\left\{2p^2T\right\}. \quad (12)$$

Беручи до уваги (11),(12), із (8) матимемо:

$$\mathbf{E}\left|\exp\left\{Y\left(t\right)\right\}-\exp\left\{\widetilde{Y}\left(t\right)\right\}\right|^{p}\leq c_{2p}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2T}{\pi^{2}\left(N+1\right)}\right)^{\frac{p}{2}}2^{\frac{1}{2}}\exp\left\{p^{2}T\right\}. \qquad (13)$$

Враховуючи оцінки (13), (10), (7), очевидно, що твердження леми випливає із (4).

Лема 3. *Якщо* $J_N<\alpha\exp\left\{\frac{1-4T}{2}\right\}$, *тоді*

$$\mathbf{P}\left\{\max_{B_i\in\mathfrak{B}}\left|\mu\left(B_i\right)-\widetilde{\mu}\left(B_i\right)\right|>\alpha\right\}\leq$$

$$\leq 2k\left(\frac{1-2\ln\frac{J_N}{\alpha}}{4T}\right)^{\frac{1-2\ln\frac{J_N}{\alpha}}{8T}}\exp\left\{-\frac{\left(2\ln\frac{J_N}{\alpha}-1\right)^{2}}{16T}\right\},$$

де J_N *визначено в умові леми 2.*

Доведення. Знайшовши значення функції $\frac{2kJ_N^p\,p^{\frac{p}{2}}\exp\left\{-\frac{p}{2}+p^2T\right\}}{\alpha^p}$ в точці $p_0=\frac{1-2\ln\frac{J_N}{\alpha}}{4T}$ близькій до її точки мінімуму, легко бачити, що дана лема є наслідком леми 2.

Теорема 2. *Нехай* $\left\{\nu\left(B_i\right),\,B_i\subset\mathfrak{B}\right\}$ *випадковий процес Кокса, керований процесом броунівського руху* $Y(t)$, *тоді його модель* $\left\{\widetilde{\nu}\left(B_i\right),\,B_i\subset\mathfrak{B}\right\}$ *наближає його з точністю* α *та надійністю* $1-\gamma$, *якщо виконуються умови:*

$$J_N<\alpha\exp\left\{\frac{1-4T}{2}\right\},$$

$$2k\left(\frac{1-2\ln\frac{J_N}{\alpha}}{4T}\right)^{\frac{1-2\ln\frac{J_N}{\alpha}}{8T}}\exp\left\{-\frac{\left(2\ln\frac{J_N}{\alpha}-1\right)^{2}}{16T}\right\}<\gamma,$$

де $J_N=\frac{2dT^{\frac{1}{2}}}{\pi\sqrt{N+\frac{1}{2}}}$.

Доведення. Твердження тереми є наслідком лем 1, 3 та означення 2.

5. Висновки. В роботі розглянуто випадкові процеси Кокса, керовані процесом броунівського руху. Описано алгоритм побудови моделей та наведено достатні умови наближення даного класу процесів їх моделями з наперед заданими точністю та надійністю.

1. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 568 с.
2. *Погоріляк О.О.* Моделювання логарифмічно строго субгауссових процесів Кокса. // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія математика і інформатика. – 2011 – Випуск 22, №2. – С 110-116.

Одержано 19.04.2012