УДК 519.21

Т. В. Боярищева, І. Й. Поляк, П. В. Слюсарчук (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВОГО ВЕКТОРА ДО ФУНКЦІЇ РОЗПОДІЛУ ДВОВИМІРНОГО НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНУ

The paper contains the estimate of rate of convergence of distributive function of stochastic vector to the distributive function of two-dimensional normal law.

Робота містить оцінку швидкості збіжності функції розподілу випадкового вектора до функції розподілу двовимірного нормального закону.

Оцінки швидкості збіжності у граничних теоремах – питання, яке всебічно досліджувалось багатьма науковцями [1]. Однак переважна більшість згаданих результатів стосуються одновимірної випадкової величини. У даній роботі отримано оцінку швидкості збіжності для випадкового вектора. При цьому використовується псевдомомент, схожий на ті, що були введені В. М. Золотарьовим, узагальнений на двовимірний випадок.

Нехай (ξ_j, η_j), $j = 1, 2, \ldots$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових векторів з невиродженим розподілом $F(x, y)$, характеристичними функціями $f(s, t)$, $M\xi_j = 0$, $M\eta_j = 0$, $M\xi_j^2 = M\eta_j^2 = 1$. Позначимо через $\Phi(x, y)$ функцію розподілу двовимірного нормального закону, що має такі самі моменти першого і другого порядку, як і $F(x, y)$. Відповідна йому характеристична функція має вигляд

$$g(s,t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}(s^2 + 2\rho st + t^2)\right\},$$

де ρ – коефіцієнт кореляції (ξ_j, η_j). Функцію розподілу

$$\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}, \frac{\eta_1 + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}}\right)$$

позначимо через $F_n(x, y)$, а відповідну характеристичну функцію через $\varphi_n(s, t)$.

Оскільки $M\xi_j = 0$, $M\eta_j = 0$, $D\xi_j = 1$, $D\eta_j = 1$, і вектори (ξ_j, η_j) незалежні, то коефіцієнт кореляції даного вектора дорівнює ρ.

Вимагатимемо існування псевдомомента третього порядку

$$\nu = \int\int \left(|x|^3 + |y|^3\right) d(F(x,y) - \Phi(x,y)).$$

Теорема 1. *Для* $n > 2$

$$\sup_{x,y} |F_n(x,y) - \Phi(x,y)| \leq \frac{C \max\left(\nu, \nu^{\frac{1}{6}}\right)}{\sqrt{n}\,(1 - |\rho|)^{\frac{5}{2}}}. \tag{1}$$

Можна показати, що

$$(a^n - b^n) - (c^n - d^n) = (a - b)\,(A - B) + [(a - b) - (c - d)]\,B,$$

де

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i, \quad B = \sum_{i=0}^{n-1} c^{n-1-i} d^i.$$

Тоді

$$A - B = \sum_{i=0}^{n-1} \left(a^{n-1-i} b^i - c^{n-1-i} d^i\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\left(a^{n-1-i} - c^{n-1-i}\right) b^i + c^{n-1-i} \left(b^i - d^i\right)\right) =$$

$$= (a-c) \sum_{i=0}^{n-1} b^i \sum_{k=0}^{n-2-i} a^{n-2-i-k} c^k + (b-d) \sum_{i=0}^{n-1} c^{n-1-i} \sum_{k=0}^{i-1} b^{i-1-k} d^k.$$

Нехай

$$a = f\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, \frac{t}{\sqrt{n}}\right), \quad b = f\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0\right) f\left(0, \frac{t}{\sqrt{n}}\right),$$

$$c = g\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, \frac{t}{\sqrt{n}}\right), \quad d = g\left(\frac{s}{\sqrt{n}, 0}\right) g\left(0, \frac{t}{\sqrt{n}}\right).$$

Позначимо через $\chi = \max\left(|a|, |b|, |c|, |d|\right)$. *Тоді справедливі нерівності*

$$\left|(a^n - b^n) - (c^n - d^n)\right| \le |a-b| \max\left(|a-c|, |b-d|\right) n (n-1) \chi^{n-2} +$$

$$+ |a - b - (c - d)| \, n \chi^{n-1}. \tag{2}$$

Для доведення теореми необхідні такі леми:

Лема 1. *Для всіх* s, t *справедливі нерівності*

$$|a-c| \le \frac{2}{3}\left(|s|^3 + |t|^3\right) \nu \, n^{-\frac{3}{2}}; \quad |b-d| \le \frac{2}{3}\left(|s|^3 + |t|^3\right) \nu \, n^{-\frac{3}{2}}.$$

Доведення. Нехай $\frac{s}{\sqrt{n}} = s'$, $\frac{t}{\sqrt{n}} = t'$. Тоді, врахувавши, що $F(x,y), \Phi(x,y)$ мають однакові моменти першого і другого порядків, отримаємо

$$|a-c| = |f(s',t') - g(s',t')| = \left|\iint e^{i(s'x+t'y)} d\left(F(x,y) - \Phi(x,y)\right)\right| =$$

$$= \left|\iint \left(e^{i(s'x+t'y)} - 1 - \frac{i(s'x+t'y)}{1!} - \frac{\left(i(s'x+t'y)\right)^2}{2!}\right) d\left(F(x,y) - \Phi(x,y)\right)\right| \le$$

$$\le \iint \left|e^{i(s'x+t'y)} - 1 - \frac{i(s'x+t'y)}{1!} - \frac{\left(i(s'x+t'y)\right)^2}{2!}\right| \left|d\left(F(x,y) - \Phi(x,y)\right)\right|.$$

З нерівностей

$$\left|e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!} - \dots - \frac{(i\alpha)^n}{n!}\right| \le \frac{|\alpha|^{n+1}}{(n+1)!};$$

$$(x+y)^3 \le 4\left(x^3+y^3\right),$$

отримаємо, що

$$|a-c| \le \iint \frac{|s'x+t'y|^3}{3!} \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{2}{3} \iint \left(|s'x|^3+|t'y|^3\right) \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{2}{3}\left(|s'|^3 \iint |x|^3 \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| + |t'|^3 \iint |y|^3 \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right|\right) \le$$

$$\le \frac{2}{3}\left(|s'|^3+|t'|^3\right)\nu,$$

де

$$\nu = \iint \left(|x|^3+|y|^3\right) \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right|.$$

$$|b-d| = \left|f\left(\tfrac{s}{\sqrt{n}},0\right) f\left(0,\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(\tfrac{s}{\sqrt{n}},0\right) g\left(0,\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| =$$

$$= \left|\left(f\left(\tfrac{s}{\sqrt{n}},0\right) - g\left(\tfrac{s}{\sqrt{n}},0\right)\right) f\left(0,\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) + g\left(\tfrac{s}{\sqrt{n}},0\right)\left(f\left(0,\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(0,\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)\right| \le$$

$$\le \left|f\left(\tfrac{s}{\sqrt{n}},0\right) - g\left(\tfrac{s}{\sqrt{n}},0\right)\right| + \left|f\left(0,\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right) - g\left(0,\tfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le n^{-\frac{3}{2}}\tfrac{2}{3}\left(|s|^3+|t|^3\right)\nu.$$

Лема 2. *Для всіх s,t виконуються оцінки*

$$|f(s,t)-g(s,t)| \le \nu \min\left(1, \frac{2}{3}\max\left(|s|^3,|t|^3\right)\right).$$

Доведення.

$$|f(s,t)-g(s,t)| \le \iint \frac{|sx+ty|^3}{6} \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{2}{3}\max\left(|s|^3,|t|^3\right) \iint \left(|x|^3+|y|^3\right) \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{2}{3}\max\left(|s|^3,|t|^3\right) \iint \max\left(1,|x|^3+|y|^3\right) \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| =$$

$$= \frac{2}{3}\nu\max\left(|s|^3,|t|^3\right).$$

$$|f(s,t)-g(s,t)| \le \iint \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| \le$$

$$\le \iint \max\left(1,|x|^3+|y|^3\right) \left|d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| = \nu.$$

З даних оцінок одержується твердження леми.

Лема 3. *Для всіх* s, t

$$(a-b)-(c-d) \leq \frac{2}{3}|st|\left(s^2+t^2\right)\nu n^{-2}.$$

Доведення. Нехай $\frac{s}{\sqrt{n}} = s'$, $\frac{t}{\sqrt{n}} = t'$. Тоді

$$(a-b)-(c-d) = \iint \left(e^{is'x}-1\right)\left(e^{it'y}-1\right) d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)+$$

$$+\left(f(s',0)-g(s',0)\right)\left(1-f(0,t')\right)+\left(f(0,t')-g(0,t')\right)\left(1-g(s',0)\right).$$

$$|(a-b)-(c-d)| = |f(s,t)-f(s,0)f(0,t)-g(s,t)+g(s,0)g(0,t)| =$$

$$= \left|\iint \left(e^{isx}-1-isx\right)\left(e^{ity}-1\right) d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)+\iint isxe^{ity} d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)+\right.$$

$$\left.+f(s,0)-g(s,0)+f(0,t)-g(0,t)-f(s,0)f(0,t)+g(s,0)g(0,t)\right| \leq$$

$$\leq \left|\iint \left(e^{isx}-1-isx\right)\left(e^{ity}-1\right) d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)+is\iint xe^{ity} d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right|+$$

$$+|f(s,0)-g(s,0)|\,|1-g(0,t)|+|f(0,t)-g(0,t)|\,|1-f(s,0)|.$$

$$\left|\iint \left(e^{isx}-1-isx\right)\left(e^{ity}-1\right) d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)+is\iint xe^{ity} d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} \frac{1}{2}s^2|t|\nu+\frac{1}{2}t^2|s|\nu = \frac{1}{2}\nu|st|\left(|s|+|t|\right), \\ |st|\nu. \end{cases}$$

Таким чином,

$$\left|\iint \left(e^{isx}-1-isx\right)\left(e^{ity}-1\right) d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)+is\iint xe^{ity} d\left(F(x,y)-\Phi(x,y)\right)\right| \leq$$

$$\leq |st|\nu\min\left(1, \frac{|s|+|t|}{2}\right).$$

$$|1-g(0,t)| = \left|\iint \left(e^{ity}-1\right) dG(x,y)\right| \leq |t|\sigma_{01},$$

$$|1-f(s,0)| \leq |s|\sigma_{10}.$$

Тому

$$|a-b-c+d| \leq \nu|st|\min\left(1, \frac{1}{2}\left(|s|+|t|\right)\right)+|t|\sigma_{01}\nu\min\left(1, \frac{2}{3}|s|^3\right)+$$

$$+|s|\sigma_{10}\nu\min\left(1, \frac{2}{3}|t|^3\right).$$

Оскільки

$$|a-b| \leq \frac{2}{n}|st|, \quad |c-d| \leq \frac{2}{n}|st|.$$

Тепер, на основі леми 1, маємо

$$|f(s',0)-g(s',0)| \le \frac{2}{3}|s|^3 \nu n^{-\frac{3}{2}},$$

$$|f(0,t')-g(0,t')| \le \frac{2}{3}|t|^3 \nu n^{-\frac{3}{2}},$$

$$|1-f(0,t')| = \left|\int\int \left(e^{it'x}-1\right) dF(x,y)\right| \le \int\int \left|e^{it'x}-1\right| |dF(x,y)| \le$$

$$\le |t'|\int\int |x|\,|dF(x,y)| \le |t'| = \frac{t}{\sqrt{n}}.$$

Аналогічно

$$|1-g(s',0)| \le \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

Отже, $|(a-b)-(c-d)| \le \frac{2}{3}\left(|s|^3|t|+|t|^3|s|\right)\nu n^{-2}$.

Доведення теореми. Покладемо в нерівності Садикової з [3] $T=\frac{1}{\sqrt{2}}X\sqrt{n}$. Тоді

$$|F_n(x,y)-\Phi(x,y)| \le \frac{2}{(2\pi)^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{f^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}},\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-f^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}},0\right)f^n\left(0,\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{st}-\right.$$

$$\left.-\frac{g^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}},\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-g^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}},0\right)g^n\left(0,\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{st}\right|dsdt+$$

$$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{f^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}},0\right)-g^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}},0\right)}{s}\right|ds+\frac{2}{\pi}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{f^n\left(0,\frac{t}{\sqrt{n}}\right)-g^n\left(0,\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{t}\right|dt+\frac{B}{T}, \quad (3)$$

де B – абсолютна стала.

Позначимо перший інтеграл у (3) через I_1, другий і третій відповідно через I_2 і I_3.

Для оцінки інтегралів правої частини необхідно оцінити величину χ, яка входить у нерівність (2), і $\chi=\max(|a|,|b|,|c|,|d|)$.

Згідно леми 3 при $\sqrt{s^2+t^2}\le X\sqrt{n}$

$$|a|=\left|f\left(\frac{s}{\sqrt{n}},\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le \exp\left\{-c_2\min\left(c_1,\frac{1}{n}(1-|\rho|)\left(s^2+t^2\right)\right)\right\}.$$

Аналогічно при $\sqrt{s^2+t^2}\le X_1\sqrt{n}$ $\left(X_1=\sqrt{\frac{c_1}{1-|\rho|}}\right)$

$$|a| \le e^{-c_2\frac{1-|\rho|}{n}\left(s^2+t^2\right)},$$

а при $X_1\sqrt{n}\le\sqrt{s^2+t^2}\le X\sqrt{n}$

$$|a| \le e^{-c_2c_1}.$$

Тоді при $\sqrt{s^2+t^2} \le X_1\sqrt{n}$

$$|b| = \left| f\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0\right)\right| \left| f\left(0, \frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right| \le e^{-c_2\frac{1-|\rho|}{n}\left(s^2+t^2\right)},$$

а при $X_1\sqrt{n} \le \sqrt{s^2+t^2} \le X\sqrt{n}$

$$|b| \le e^{-c_2c_1}.$$

$$|c| = g\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left\{-\frac{1}{n}\left(s^2+st+t^2\right)\right\} \le \exp\left\{-\frac{1-|\rho|}{2n}\left(s^2+t^2\right)\right\}, \text{ а}$$

$$|d| = g\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0\right) g\left(0, \frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left\{-\frac{s^2+t^2}{2}\right\}.$$

Таким чином, при $\sqrt{s^2+t^2} \le X_1\sqrt{n}$

$$\chi \le \max\left\{e^{-c_2\frac{1-|\rho|}{n}\left(s^2+t^2\right)}, e^{-\frac{1-|\rho|}{2n}\left(s^2+t^2\right)}, e^{-\frac{s^2+t^2}{n}}\right\} \le e^{-c_3\frac{1-|\rho|}{n}\left(s^2+t^2\right)}, \tag{4}$$

де $c_3 = \min\left(c_2, \frac{1}{2}\right)$, а при $X_1\sqrt{n} \le \sqrt{s^2+t^2} \le X\sqrt{n}$

$$\chi \le \max\left\{e^{-c_1c_2}, e^{-2c_1c_2}, e^{-\frac{1-|\rho|}{2n}\left(s^2+t^2\right)}\right\} \le \max\left\{e^{-c_1c_2}, e^{-\frac{1-|\rho|}{2n}X_1^2 n}\right\} =$$

$$= \max\left\{e^{-c_1c_2}, e^{-\frac{c_1}{2}}\right\} = e^{-c_4}, \tag{5}$$

де $c_4 = \min\left(c_1c_2, \frac{c_1}{2}\right)$.

Із нерівностей (2), (4), (5), лем 1, 2, 3 одержимо, що при $\sqrt{s^2+t^2} \le X_1\sqrt{n}$

$$|a^n - b^n - (c^n - d^n)| \le$$

$$\le \frac{2\,|st|}{n}\frac{2}{3}\left(|s|^3+|t|^3\right)\nu n^{-\frac{3}{2}} n\,(n+1)\,e^{-c_3\frac{n-2}{n}(1-|\rho|)\left(s^2+t^2\right)} +$$

$$+ n\frac{2}{3}\,|st|\left(s^2+t^2\right)\nu n^{-n} e^{-c_3\frac{n-2}{n}(1-|\rho|)\left(s^2+t^2\right)} \le$$

$$\le \nu\,|st|\,e^{-c_3\frac{n-2}{n}(1-|\rho|)\left(s^2+t^2\right)} n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{3}\left(|s|^3+|t|^3\right)+\frac{2}{3}\left(s^2+t^2\right)\right) \tag{6}$$

а при $X_1\sqrt{n} \le \sqrt{s^2+t^2} \le X\sqrt{n}$

$$|a^n - b^n - (c^n - d^n)| \le \nu\,|st|\,e^{-c_4(n-2)} n^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{8}{3}\left(|s|^3+|t|^3\right)+\frac{2}{3}\left(s^2+t^2\right)\right). \tag{7}$$

Нехай $D = \{s,t : |s| \le T, |t| \le T\}$, $D_1 = \left\{s,t : \sqrt{s^2+t^2} \le X_1\sqrt{n}\right\}$.
Тоді

$$I_1 = \frac{2}{(2\pi)^2}\int\limits_{-T}^{T}\int\limits_{-T}^{T}\left|\frac{a^n - b^n - (c^n - d^n)}{st}\right| dsdt =$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^2} \iint\limits_{D_1} \left| \frac{a^n - b^n - (c^n - d^n)}{st} \right| dsdt + \frac{2}{(2\pi)^2} \iint\limits_{D} \left| \frac{a^n - b^n - (c^n - d^n)}{st} \right| dsdt = I_1' + I''_1.$$

Для оцінки I_1' врахуємо нерівність (6), тоді

$$I_1' = \frac{2}{(2\pi)^2} \iint\limits_{D_1} \left| \frac{a^n - b^n - c^n + d^n}{st} \right| dsdt \le$$

$$\le \frac{2}{(2\pi)^2} \nu n^{-\frac{1}{2}} \iint\limits_{D_1} \left(\frac{8}{3} \left(|s|^3 + |t|^3 \right) + \frac{2}{3} \left(s^2 + t^2 \right) \right) e^{-c_3 \frac{n-2}{n} (1-|\rho|) \left(s^2 + t^2 \right)} dsdt \le$$

$$\le C_1 \nu n^{-\frac{1}{2}} \left(1 - |\rho| \right)^{-\frac{5}{2}},$$

а, врахувавши (7), одержимо

$$I_1'' \le \frac{2}{(2\pi)^2} \nu e^{-c_4(n-2)} n^{-\frac{1}{2}} \iint\limits_{D \setminus D_1} \left(\frac{8}{3} \left(|s|^3 + |t|^3 \right) + \frac{2}{3} \left(s^2 + t^2 \right) \right) dsdt \le$$

$$\le C_2 \nu e^{-c_4(n-2)} n^{-\frac{1}{2}} \left(T^5 + T^4 \right) = C_2 \nu e^{-c_4(n-2)} n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\sqrt{2}} \nu^{-p} c^{\frac{5}{2}} \left(1 - |\rho| \right) \right)^{\frac{5}{2}}.$$

Оскільки ми вважаємо, що $X_1 < X$, то

$$\nu \le c_1^2 \left(1 - |\rho| \right)^{\frac{3}{2}}, \text{то} \quad p = \frac{1}{6}.$$

Тому $I_1'' \le C_4 \nu^{\frac{1}{6}} n^{-\frac{1}{2}}$.
Таким чином,

$$I_1 \le C_5 \max \left\{ \nu, \nu^{\frac{1}{6}} \right\} n^{-\frac{1}{2}} \left(1 - |\rho| \right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Переходимо до оцінки інтегралів I_2 та I_3. Будемо використовувати нерівності

$$\left| f^n \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) - g^n \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right| \le$$

$$\le n \left| f \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) - g \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right| \left(\max \left\{ \left| f \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right|, \left| g \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right| \right\} \right)^{n-1} \le$$

$$\le n \left| f \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) - g \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right| \chi^{n-1}. \qquad (8)$$

Тоді із нерівностей (4), (5), (8) при $|s| \le X_1 \sqrt{n}$ одержимо

$$\left| f^n \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) - g^n \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right| \le n \frac{|s|^3}{n^{\frac{3}{2}}} \nu e^{-c_3 (1-|\rho|) \frac{n-1}{n} s^2},$$

а при $X_1 \sqrt{n} \le |s| \le X \sqrt{n}$

$$\left| f^n \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) - g^n \left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0 \right) \right| \le n \frac{|s|^3}{n^{\frac{3}{2}}} \nu e^{-c_4(n-1)}.$$

Тоді

$$I_2 = \frac{2}{\pi} \int\limits_{-T}^{T} \left| \frac{f^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0\right) - g^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0\right)}{s} \right| ds \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int\limits_{|s| \leq X_1\sqrt{n}} \left| \frac{f^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0\right) - g^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0\right)}{s} \right| ds +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int\limits_{X_1\sqrt{n} \leq |s| \leq X\sqrt{n}} \left| \frac{f^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0\right) - g^n\left(\frac{s}{\sqrt{n}}, 0\right)}{s} \right| ds \leq$$

$$\leq \frac{2}{\pi} n^{-\frac{1}{2}} \nu \int\limits_{|s| \leq X_1\sqrt{n}} s^2 e^{-c_3(1-|\rho|)\frac{n-1}{n}s^2} ds + \frac{2}{\pi} \nu n^{-\frac{1}{2}} e^{-c_4(n-1)} \int\limits_{X_1\sqrt{n} \leq |s| \leq X\sqrt{n}} s^2 ds \leq$$

$$\leq (1-|\rho|)^{-\frac{3}{2}} n^{-\frac{1}{2}} \nu C_6 + C_7 \nu n^{-\frac{1}{2}} e^{-c_4(n-1)} \left(X\sqrt{n}\right)^3 \leq C_8 \max\left\{\nu, \nu^{\frac{1}{2}}\right\} n^{-\frac{1}{2}} (1-|\rho|)^{-\frac{3}{2}}.$$

Аналогічно

$$I_3 \leq C_8 \max\left\{\nu, \nu^{\frac{1}{2}}\right\} n^{-\frac{1}{2}} (1-|\rho|)^{-\frac{3}{2}}.$$

Підставляючи оцінки для I_1, I_2 та I_3 в (3), одержимо

$$|F_n(x,y) - \Phi(x,y)| \leq C_9 \frac{\max\left(\nu, \nu^{\frac{1}{6}}\right) n^{-\frac{1}{2}}}{(1-|\rho|)^{\frac{5}{2}}}.$$

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука. – 1986. – 416 с.
2. *Садикова С. М.* Двумерные аналоги неравенства Эсесена с применением к центральной предельной теореме // Теория вероятностей и её применения . – 1966. – Вип. 3. – Т. XI. – С. 369–380.
3. *Садикова С. М.* Некоторые неравенства для характеристических функций // Теория вероятностей и её применения . – 1966. – Вип. 3. – Т. XI. – С. 500–506.
4. *Садикова С. М.* О многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятностей и её применения . – 1968. – Вип. 1. – Т. XIII. – С. 164–170.

Одержано 16.06.2009