УДК 517.9

Ф. А. Асроров, П. В. Фекета
Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка

ОБМЕЖЕНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ НЕОДНОРІДНИХ СИСТЕМ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

The boundary-value problem on whole axis of linear extension of dynamical system defined in torus that undergo impulsive action at fixed moments of time is investigated.

Досліджено питання існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку лінійного розширення динамічної системи на торі, яка піддається імпульсним збуренням у фіксовані моменти часу.

Системи диференціальних рівнянь, які піддаються короткочасним імпульсним збуренням описують реальні механічні, економічні, суспільні, біологічні процеси. Важливим є встановлення умов існування та відшукання обмежених розв'язків таких систем. Дана робота присвячена дослідженню умов існування та єдиності обмеженого на всій осі розв'язку лінійного розширення динамічної системи на торі, яка піддається імпульсному збуренню в фіксовані моменти часу. Зокрема, такі системи розглядаються в теорії багаточастотних коливань.

Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь з імпульсною дією

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi), \\ \frac{dx}{dt} = P(t,\varphi)x + f(t,\varphi), t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} = B_i(\varphi)x + I_i(\varphi), \end{gathered} \tag{1}$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $\varphi \in T^m$, T^m - m-вимірний тор, $a(t,\varphi)$, $f(t,\varphi)$, $P(t,\varphi)$ - неперервні (кусково-неперервні з розривами першого роду при $t = \tau_i$) по t, неперервні і 2π-періодичні по φ_v, $v = 1,..,m$, обмежені при всіх $t \in \mathbb{R}$ векторні і матрична функції відповідно, функція $a(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця по $\varphi \in T^m$. $B_i(\varphi)$ і $I_i(\varphi)$ - рівномірно обмежені по i матриці і вектори, $det(E+B_i(\varphi)) \neq 0$ для будь-якого $\varphi \in T^m$. Послідовність моментів $\{\tau_i\}$ занумерована цілими числами так, що $\tau_i \to -\infty$ при $i \to -\infty$ і $\tau_i \to +\infty$ при $i \to +\infty$. Вважатимемо, що рівномірно по $t \in \mathbb{R}$ існує скінченна границя

$$\lim_{T\to+\infty} \frac{i(t,t+T)}{T} = p < \infty, \tag{2}$$

де $i(a,b)$ - кількість точок послідовності $\{\tau_i\}$ на проміжку $[a,b]$. Це означає, що існують числа l і натуральне q такі, що будь-який проміжок часу довжиною l містить не більше q точок послідовності $\{\tau_i\}$.

Вивчимо питання існування обмежених розв'язків системи (1). В силу компактності фазового простору системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(t,\varphi) \tag{3}$$

і припущень, накладених на функцію $a(t, \varphi)$, кожен розв'язок $\varphi_t(\tau, \varphi)$, який задовольняє початкову умову $\varphi_\tau(\tau, \varphi) = \varphi$, існує при будь-яких $\tau \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T^m$ і може бути продовжений по t на всю дійсну вісь.

Розглянемо однорідну систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))x, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi))x, \end{aligned} \tag{4}$$

залежну від $\varphi \in T^m$, $\tau \in \mathbb{R}$ як від параметрів. Позначимо через $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ матрицант цієї системи. В силу неперервної залежності розв'язку $\varphi_t(\tau, \varphi)$ від параметрів $\varphi \in T^m$, $\tau \in \mathbb{R}$, матрицант $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ теж залежить від цих параметрів неперервним чином.

Лема 1. *Для будь-яких $t, s, \tau, \sigma \in \mathbb{R}$ і $\varphi \in T^m$ справедливо*

$$\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)) = \Omega_s^t(\sigma, \varphi).$$

Доведення. Так як $\Omega_s^t(\tau, \varphi)$ матрицант системи (4), то

$$\frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau, \varphi) = P(t, \varphi_t(\tau, \varphi))\Omega_s^t(\tau, \varphi).$$

Замінимо φ на $\varphi_\tau(\sigma, \varphi))$ і, враховуючи властивість $\varphi_t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)) = \varphi_t(\sigma, \varphi)$ розв'язків $\varphi_t(\tau, \varphi)$ системи (3), отримаємо

$$\frac{d}{dt}\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)) = P(t, \varphi_t(\sigma, \varphi))\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi)).$$

Остання рівність означає, що $\Omega_s^t(\tau, \varphi_\tau(\sigma, \varphi))$ є фундаментальною матрицею системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = P(t, \varphi_t(\sigma, \varphi))x,$$

яка при $t = s$ є одиничною матрицею. Але цю ж властивість має і матриця $\Omega_s^t(\sigma, \varphi)$. Тому ці матриці співпадають, лему доведено.□

Нехай $C(t, \varphi)$ – неперервна по $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T^m$, 2π-періодична по φ_v, $v = 1, .., m$ матрична функція. Покладемо

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} \Omega_s^t(t, \varphi)C(s, \varphi_s(t, \varphi)), & s \le t, \\ -\Omega_s^t(t, \varphi)[E - C(s, \varphi_s(t, \varphi))], & s > t \end{cases} \tag{5}$$

і назвемо $G(t, s, \varphi)$ функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} = a(t, \varphi), \frac{dx}{dt} &= P(t, \varphi)x, t \ne \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= B_i(\varphi)x, \end{aligned} \tag{6}$$

якщо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(t, s, \varphi)\| \, ds \le k < \infty \tag{7}$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T^m$. З визначення $G(t,s,\varphi)$ випливає, що функція Гріна-Самойленка неперервна для всіх $t,s \in \mathbb{R}$, $t \neq s$, $\varphi \in T^m$, 2π-періодична по φ_v, $v = 1,..,m$, причому

$$G(s+0,s,\varphi) - G(s-0,s,\varphi) = E.$$

Беручи до уваги лему 1, маємо

$$G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \begin{cases} \Omega_s^t(t,\varphi)C(s,\varphi_s(t,\varphi)), & s \leq t, \\ -\Omega_s^t(t,\varphi)[E - C(s,\varphi_s(t,\varphi))], & s > t. \end{cases}$$

При $s = \tau$ одержимо

$$G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \begin{cases} \Omega_\tau^t(t,\varphi)C(\tau,\varphi), & \tau \leq t, \\ -\Omega_\tau^t(t,\varphi)[E - C(\tau,\varphi)], & \tau > t. \end{cases}$$

Як бачимо, матриця $G(t,\tau,\varphi_t(\tau,\varphi))$ складається з розв'язків однорідної системи (4), що розглядається при $t \geq \tau$ і $t < \tau$ відповідно. Припустимо, що система (4) є гіперболічною, тобто фазовий простір $\mathbb{R}^n$ можна подати у вигляді прямої суми підпросторів E^+ і E^- так, що для будь-яких $x^+ \in E^+$ і $x^- \in E^-$ справджуються оцінки

$$\left\|\Omega_s^t(\tau,\varphi)x^+\right\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}, \quad t \geq s,$$
$$\left\|\Omega_s^t(\tau,\varphi)x^-\right\| \leq Ke^{\gamma(t-s)}, \quad t \leq s,$$

для деяких сталих $K \geq 1$, $\gamma > 0$ і для будь-яких $t,s \in \mathbb{R}$.

Не обмежуючи загальності, вважатимемо, що матриці $P(t,\varphi)$ і $B_i(\varphi)$ мають блочно-діагональну структуру

$$P(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) = \begin{pmatrix} P_+(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) & 0 \\ 0 & P_-(t,\varphi_t(\tau,\varphi)) \end{pmatrix}, \quad B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) = \begin{pmatrix} B_i^+(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) & 0 \\ 0 & B_i^-(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\Omega_{s^+}^t(\tau,\varphi)$ і $\Omega_{s^-}^t(\tau,\varphi)$ матриціанти систем

$$\frac{dx_1}{dt} = P_+(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x_1, \quad \Delta x_1|_{t=\tau_i} = B_i^+(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x_1 \tag{8}$$

і

$$\frac{dx_2}{dt} = P_-(t,\varphi_t(\tau,\varphi))x_2, \quad \Delta x_2|_{t=\tau_i} = B_i^-(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))x_2 \tag{9}$$

відповідно. Тоді справедливі оцінки

$$\left\|\Omega_{s^+}^t(\tau,\varphi)\right\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}, \quad t \geq s, \tag{10}$$

$$\left\|\Omega_{s^-}^t(\tau,\varphi)\right\| \leq Ke^{\gamma(t-s)}, \quad t \leq s \tag{11}$$

для деяких сталих $K \geq 1$, $\gamma > 0$ і для будь-яких $t,s \in \mathbb{R}$. Справедлива теорема

Теорема 1. *Якщо лінійна система з імпульсним збуренням (4) є гіперболічною, то для будь-якої обмеженої на всій осі функції* $f(t,\varphi)$ *і обмеженої послідовності функцій* $\{I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))\}$ *система (1) має єдиний обмежений при всіх* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T^m$ *розв'язок* $x^*(t,\varphi)$ *і можна вказати доданту сталу* C *таку, що*

$$\|x^*(t,\varphi)\| \leq C \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in T^m} \|f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\| + \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in T^m} \|I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))\| \right). \tag{12}$$

Доведення. Позначимо через

$$G(t,s,\varphi) = \begin{cases} diag(\Omega^t_{s^+}(\tau,\varphi),0), & t \geq s, \\ diag(0,\Omega^t_{s^-}(\tau,\varphi)), & t < s. \end{cases} \tag{13}$$

В силу нерівностей (10) і (11) функція $G(t,s,\varphi)$ допускає оцінку

$$\|G(t,s,\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-s|} \tag{14}$$

для деяких сталих $K \geq 1$, $\gamma > 0$ і для всіх $t,s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T^m$. Визначимо функцію

$$\begin{aligned} x^*(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} & G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ & \sum_{i=-\infty}^{+\infty} G(t,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)). \end{aligned} \tag{15}$$

Права частина рівності (15) визначена, оскільки нерівності (2) і (14) забезпечують рівномірну збіжність інтеграла та суми з (15). Дійсно

$$\|x^*(t,\varphi)\| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} Ke^{-\gamma(t-s)} \|f(s,\varphi_s(t,\varphi))\| ds + \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Ke^{-\gamma|t-\tau_i|} \|I_i(\varphi_{\tau_i}(\varphi))\| \leq$$

$$\leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in T^m} \|f(t,\varphi)\| + K \sup_{i\in\mathbb{Z}} \max_{\varphi\in T^m} \|I_i(\varphi)\| \sum_{i=-\infty}^{+\infty} e^{-\gamma|t-\tau_i|}.$$

В силу (2), будь-який проміжок осі t довжини l містить не більше q точок послідовності $\{\tau_i\}$. Тоді для $j \geq i$ маємо

$$j - i + 1 \leq q \left(\left[\frac{\tau_j - \tau_i}{l} \right] + 1 \right) \leq q \left(\frac{\tau_j - \tau_i}{l} + 1 \right),$$

звідки

$$\tau_j - \tau_i \leq l \left(\frac{1}{q} - 1 \right) + \frac{1}{q}(j-1).$$

Тому

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} e^{-\gamma|t-\tau_i|} = \sum_{\tau_i \leq t} e^{-\gamma(t-\tau_i)} + \sum_{\tau_i > t} e^{\gamma(t-\tau_i)} \leq \sum_{\tau_i \leq t} e^{-\gamma(\tau_j-\tau_i)} +$$

$$+ \sum_{\tau_i > \tau_j} e^{-\gamma(\tau_i-\tau_{j+1})} \leq 2e^{\gamma l(1-\frac{1}{q})} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\frac{\gamma l m}{q}} = \frac{2e^{\gamma l(1-\frac{1}{q})}}{1-e^{-\frac{\gamma l}{q}}}.$$

Таким чином, маємо оцінку

$$\|x^*(t,\varphi)\| \le C\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\max_{\varphi\in T^m}\|f(t,\varphi_t(\tau,\varphi))\| + \sup_{t\in\mathbb{R}}\max_{\varphi\in T^m}\|I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))\|\right),$$

де

$$C = \max\left(\frac{2K}{\gamma}, \frac{2e^{\gamma l(1-\frac{1}{q})}}{1-e^{-\frac{\gamma l}{q}}}\right). \tag{16}$$

Покажемо, що функція $x^*(t,\varphi)$, визначена рівністю (15), є розв'язком системи рівнянь (1). Подамо $x^*(t,\varphi)$ у вигляді

$$\begin{aligned} x^*(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{t} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ + \int_{t}^{+\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi)) f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ + \sum_{\tau_i<t} G(t,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + \sum_{\tau_i>t} G(t,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)). \end{aligned} \tag{17}$$

Диференціюючи $x^*(t,\varphi)$ по t при $t \ne \tau_i$, одержимо

$$\begin{aligned} \frac{x^*(t,\varphi)}{dt} = \int_{-\infty}^{t} \frac{dG(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))}{dt} f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ + \sum_{\tau_i<t} \frac{dG(t,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))}{dt} I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + \int_{t}^{+\infty} \frac{dG(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))}{dt} f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds + \\ + \sum_{\tau_i>t} \frac{dG(t,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))}{dt} I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) = P(t,\varphi)x_t^*(\tau,\varphi) + f(t,\varphi), \end{aligned}$$

оскільки

$$\begin{aligned} \frac{dG(t,s,\varphi)}{dt} = P(t,\varphi)G(t,s,\varphi), \quad t \ne s, t \ne \tau_i, \\ G(t,t-0,\varphi) - G(t,t+0,\varphi) = E, \quad t \ne \tau_i. \end{aligned}$$

З (17) також видно, що при $t = \tau_j$

$$\begin{aligned} x^*(\tau_j+0,\varphi) - x^*(\tau_j,\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(G(\tau_j+0,s,\varphi) - G(\tau_j,s,\varphi)\right) f(s,\varphi_s(\tau,\varphi))ds + \\ + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left(G(\tau_j+0,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) - G(\tau_j,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))\right) I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + I_j(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) = \\ = B_j x^*(\tau_j,\varphi) + I_j(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)). \end{aligned}$$

Отже, функція $x^*(t,\varphi)$ є обмеженим на всій осі розв'язком системи (1). Нехай існує ще один обмежений на всій осі розв'язок $y(t,\varphi)$ системи (1). Тоді їх різниця є обмеженою на всій осі функцією, що є ров'язком однорідної системи (4). Однак, в силу гіперболічності, ця система має лише тривіальний розв'язок, який обмежений на всій осі. Тому розв'язки $x^*(t,\varphi)$ і $y(t,\varphi)$ співпадають і система (1) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок. Теорему доведено. □

Теорема 2. *Нехай в системі (4)*

$$P(t, \varphi_t(\tau, \varphi)) = P_+(t, \varphi_t(\tau, \varphi)), \quad B_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)) = B_i^+(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)).$$

Тоді система (1) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок $x^*(t, \varphi)$, причому цей розв'язок асимптотично стійкий.

Доведення. З теореми 1 легко бачити, що розв'язок $x^*(t, \varphi)$ можна подати у вигляді

$$x^*(t, \varphi) = \int_{-\infty}^{t} G(t, s, \varphi_t(\tau, \varphi)) f(s, \varphi_s(t, \varphi_t(\tau, \varphi)))ds + \\ + \sum_{\tau_i < t} G(t, \tau_i, \varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)) I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau, \varphi)),$$

де функція Гріна-Самойленка $G(t, s, \varphi) = \Omega_{s+}^t(\tau, \varphi)$. Асимптотична стійкість розв'язку випливає з оцінки матриціанта

$$\left\|\Omega_{s+}^t(\tau, \varphi)\right\| \leq Ke^{-\gamma(t-s)}$$

для деяких сталих $K \geq 1$, $\gamma > 0$ і для всіх $t \geq s \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T^m$.□

Розглянемо окремий випадок системи (1)

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(t, \varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= Px + f(t, \varphi), t \neq \tau_i, \\ \Delta x|_{t=\tau_i} &= Bx + I_i(\varphi), \end{aligned} \tag{18}$$

де P і B – сталі матриці, $det(E + B) \neq 0$, вектори $a(t, f)$, $f(t, \varphi)$ і $I_i(\varphi)$ такі ж самі, як в системі (1). Відносно моментів імпульсних збурень вважатимемо, що існує скінченна границя (2).

Теорема 3. *Нехай в системі (18) матриці P і B комутують. Якщо дійсні частини власних значень матриці*

$$\Lambda = P + pLn(E + B) \tag{19}$$

відмінні від нуля, то система (18) має єдиний обмежений на всій осі розв'язок. Якщо ж дійсні частини всіх власних значень матриці Λ від'ємні, то розв'язок системи (18) асимптотично стійкий.

Доведення. За допомогою невиродженої сталої матриці S подамо матрицю Λ у вигляді

$$\Lambda = S^{-1} diag(\Lambda_+, \Lambda_-)S, \tag{20}$$

де Λ_+, Λ_- - квадратні матриці, дійсні частини власних значень яких є відповідно додатними і від'ємними. Визначемо матрицю $G(t, s, \varphi)$ співвідношеннями

$$G(t, s, \varphi) = \begin{cases} -S^{-1} diag(e^{\Lambda_+(t-s)}, 0)S(E + B)^{-p(t-s)+i(t,s)}, & t < s, \\ S^{-1} diag(e^{\Lambda_-(t-s)}, 0)S(E + B)^{-p(t-s)+i(t,s)}, & t > s. \end{cases}$$

Матриця $G(t,s,\varphi)$ при $\tau_i < t < \tau_{i+1}$, $\tau_j < s < \tau_{j+1}$, $t \neq s$ задовольняє рівності

$$\frac{dG(t,s,\varphi)}{dt} = PG(t,s,\varphi), \tag{21}$$

при $t = \tau_i$, $s \neq \tau_j$ - умові

$$G(\tau_i + 0, s, \varphi) - G(\tau_i, s, \varphi) = BG(\tau_i - 0, s, \varphi), \tag{22}$$

а при $t = s$, $s \neq \tau_i$ терпить розрив першого роду зі стрибком

$$G(s+0,s,\varphi) - G(s-0,s,\varphi) = E.$$

Покажемо справедливість рівності (21). Нехай $t > s$, тоді

$$\frac{dG(t,s,\varphi)}{dt} = S^{-1}diag(0, e^{\Lambda_-(t-s)})(diag(0,\Lambda_-) - SpLn(E+B))(E+B)^{-p(t-s)+i(t,s)}.$$

Оскільки

$$diag(0, e^{\Lambda_-(t-s)})diag(0,\Lambda_-) = diag(0, e^{\Lambda_-(t-s)})diag(\Lambda_+, \Lambda-),$$

то

$$\frac{dG(t,s,\varphi)}{dt} = S^{-1}diag(0, e^{\Lambda_-(t-s)})S(P - pLn(E+B))(E+B)^{-p(t-s)+i(t,s)} = PG(t,s,\varphi),$$

так як матриці P і $S^{-1}diag(0, e^{\Lambda_-(t-s)})S$ комутують. Дійсно

$$\begin{gathered}
\Lambda P = P\Lambda \quad \Rightarrow \quad e^{\Lambda t}P = Pe^{\Lambda t} \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad diag(e^{\Lambda_+ t}, e^{\Lambda_- t})SPS^{-1} = SPS^{-1}diag(e^{\Lambda_+ t}, e^{\Lambda_- t}) \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad diag(0, e^{\Lambda_- t})SPS^{-1} = SPS^{-1}diag(0, e^{\Lambda_- t}) \quad \Rightarrow \\
\Rightarrow \quad S^{-1}diag(0, e^{\Lambda_- t})SP = PS^{-1}diag(0, e^{\Lambda_- t})S.
\end{gathered}$$

Аналогічно доводиться справедливість рівності (21) для $t < s$, $t \neq \tau_i$, $s \neq \tau_j$. Властивість (22) перевіряється безпосередньо з урахуванням того, що кожна з матриць $S^{-1}diag(e^{\Lambda_+ t}, 0)S$ і $S^{-1}diag(0, e^{\Lambda_- t})S$ комутує з матрицею B.

За умовою теореми, дійсні частини власних значень матриці Λ відмінні від нуля, а для моментів $\{\tau_i\}$ існує скінченна границя (2), тоді можна вказати сталі $K \geq 1$ і $\gamma > 0$ такі, що

$$\|G(t,s,\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-s|}, \quad t,s \in \mathbb{R}, \varphi \in T^m. \tag{23}$$

В цьому неважко переконатися, враховуючи, що

$$\begin{gathered}
\left\|e^{\Lambda_+(t-s)}\right\| \leq K_1 e^{\gamma_1(t-s)}, \quad t \leq s, \\
\left\|e^{\Lambda_-(t-s)}\right\| \leq K_2 e^{-\gamma_2(t-s)}, \quad t \geq s, \\
\left\|(E+B)^{-p(t-s)+i(t,s)}\right\| \leq K_3(\varepsilon)e^{\varepsilon\|Ln(E+B)\||t-s|}
\end{gathered}$$

де $0 < \gamma_1 < \min_j Re\lambda_j(\Lambda_+)$, $0 < \gamma_2 < \min_j(-Re\lambda_j(\Lambda_-))$, $\varepsilon > 0$, $K_1, K_2, K_3(\varepsilon)$ – додатні сталі. Розглянемо функцію

$$x^*(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds+ \\ + \sum_{i=-\infty}^{\infty} G(t,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)). \tag{24}$$

Права частина рівності (24) визначена, оскільки згідно (2) і (23) інтеграл та сума збігаються для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T^m$, причому збіжність є рівномірною на кожному скінченному відрізку дійсної осі. Дійсно,

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} G(t,s,\varphi)f(t,\varphi) \right\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} Ke^{-\gamma|t-s|} \left\| f(t,\varphi) \right\| ds \leq \frac{2K}{\gamma} \sup_{t\in\mathbb{R}} \max_{\varphi\in T^m} \left\| f(t,\varphi) \right\|, \tag{25}$$

$$\|G(t,\tau_i,\varphi)I_i\| \leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} Ke^{-\gamma|t-s|} \|I_i\| \leq \\ \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{t+ml<\tau_i<t+(m+1)l} Ke^{-\gamma|t-\tau_i|} \|I_i\| \leq \frac{2K(p+1)l}{1-e^{-\gamma l}} \sup \|I_i\| \tag{26}$$

Записавши $x^*(t,\varphi)$ у вигляді

$$x^*(t,\varphi) = \int_{-\infty}^{t} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds+ \\ + \int_{t}^{\infty} G(t,s,\varphi_t(\tau,\varphi))f(s,\varphi_s(t,\varphi_t(\tau,\varphi)))ds+ \\ + \sum_{\tau_i<t} G(t,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi)) + \sum_{\tau_i>t} G(t,\tau_i,\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))I_i(\varphi_{\tau_i}(\tau,\varphi))$$

і формально продиференціювавши по t при $t \neq \tau_i$, з урахуванням (21), отримаємо

$$\frac{dx^*}{dt} = Px^* + f(t,\varphi).$$

Диференціювання законне, так як невласні інтеграли та суми, отримані в результаті формального диференціювання, збігаються рівномірно на кожному скінченному інтервалі. При $t = \tau_i$, враховуючи (22), маємо

$$\Delta x^*|_{t=\tau_i} = Bx^*(\tau_i,\varphi) + I_i,$$

тобто $x^*(t,\varphi)$ є розв'язком системи рівнянь (18). Обмеженість $x^*(t,\varphi)$ на всій осі випливає з (25) і (26). Єдиність обмеженого для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in T^m$ розв'язку $x^*(t,\varphi)$ системи (18) випливає з того, що різниця двох обмежених розв'язків є обмеженим на всій осі розв'язком системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = Px,\ t \neq \tau_i, \quad \Delta x|_{t=\tau_i} = Bx.$$

Остання ж при зроблених припущеннях має обмеженим лише тривіальний розв'язок.

Покажемо, що якщо дійсні частини всіх власних значень матриці Λ від'ємні, то розв'язок $x^*(t,\varphi)$ асимптотично стійкий. Нехай $x = \varphi_t(\tau,\varphi)$ - довільний розв'язок системи рівнянь (18). Тоді різниця $z(t,\varphi) = \varphi_t(\tau,\varphi) - x^*(\tau,\varphi)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\frac{dz}{dt} = Pz,\ t \neq \tau_i, \quad \Delta z|_{t=\tau_i} = Bz \tag{27}$$

і при $t \geq 0$ подається у вигляді $z(t) = e^{Pt}(E+B)^{i(0,t)}z_0$ або

$$z(t) = e^{\Lambda t}(E+B)^{pt(\frac{i(0,t)}{pt}-1)}z_0.$$

Звідси видно, що при $Re\lambda_j(\Lambda) < 0$, з урахуванням умови (2), всі розв'язки системи рівнянь (27) прямують до нуля при $t \to \infty$, що і доводить асимптотичну стійкість розв'язку $x = x^*(t,\varphi)$.$\square$

Таким чином, ми виокремили клас задач, для якого імпульсна система вигляду (1) має єдиний обмежений на всій дійсній осі розв'язок. Вказали достатні умови асимптотичної стійкості такого розв'язку і розглянули систему (1) у випадку, коли матриці $P(t,\varphi)$ та $B_i(\varphi)$ сталі.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследование дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функции Ляпунова. — К.: Наук. думка, 1990. — 272 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Выща шк., 1987. — 288 с.

Одержано ..2010