УДК 519.21

Т. В. Боярищева (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКА ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ ДО ДВОВИМІРНОГО НОРМАЛЬНОГО ЗАКОНУ В РІВНОМІРНІЙ МЕТРИЦІ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

The paper contains estimate of rate of convergence by characteristic functions of two-dimensional stochastic vector.

Робота містить оцінку швидкості збіжності для характеристичних функцій двовимірного випадкового вектора.

Важливим напрямком у теорії ймовірностей є дослідження швидкості збіжності у граничних теоремах. Вивчаються як питання швидкості збіжності до граничних законів розподілу, так і досліджуються різноманітні характеристики, з допомогою яких отримуються результати. Дуже поширеним методом дослідження швидкості у граничних теоремах є використання псевдомоментів різного виду, що було запропоноване ще В. М. Золотарьовим [1]. У даній роботі здійснюється оцінка швидкості збіжності послідовності характеристичних функцій двовимірного випадкового вектора до характеристичної функції двовимірного нормального закону. Дослідження цієї теми проводились набагато рідше, ніж аналогічні одновимірні випадки [2, 3]. При цьому оцінка отримується з допомогою псевдомомента, структура якого аналогічна до введеної у [4], лише узагальнена на двовимірний випадок.

Нехай (ξ_j, η_j), $j = 1, 2, ...$ – послідовність незалежних однаково розподілених випадкових векторів з законом розподілу $F(x, y)$, характеристичною функцією $f(s, t)$ та $M\xi_j = M\eta_j = 0$, $M\xi_j^2 = M\eta_j^2 = 1$. Позначимо через $\Phi(x, y)$ функцію розподілу двовимірного нормального закону з тими ж моментами першого і другого порядку. Відповідна йому характеристична функція має вигляд $g(s,t) = e^{-\frac{1}{2}(s^2+2rst+t^2)}$, де r – коефіцієнт кореляції (ξ_j, η_j), $r \neq \pm 1$. Функцію розподілу випадкового вектора

$$\left(\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{\sqrt{n}}, \frac{\eta_1, + \ldots + \eta_n}{\sqrt{n}}\right)$$

позначимо через $F_n(x, y)$, а відповідну характеристичну функцію – $\varphi_n(s, t)$.

Для довільного $B > 0$ введемо псевдомоменти

$$\nu_{01}(B) = \iint\limits_{\substack{(x,y):\\ x^3+y^3 \le B}} \max\left(1, \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) d\Psi(x, y),$$

$$\nu'_{01}(B) = \iint\limits_{\substack{(x,y):\\ x^2+y^2 \le B}} \max\left(1, |x|^3 + |y|^3\right) d\Psi(x, y),$$

$$\nu_{02}(B) = \iint\limits_{\substack{(x,y):\\ x^2+y^2 > B}} \max\left(1, \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right) d\Psi(x, y),$$

де $\Psi(x,y) = F(x,\,y) - \Phi(x,\,y)$.

Позначимо через

$$\nu = \nu(B) = \max(\nu_{01}(B), \nu_{02}(B)),\ \ \nu' = \nu'(B) = \max(\nu'_{01}(B), \nu_{02}(B)).$$

Нехай $\rho_n = \sup_{x,y} |\varphi_n(s,t) - g(s,t)|$.

Теорема 1. *Нехай* $c \in \left(0, \frac{1}{16}\right)$ *– довільна стала. Тоді при* $n \geq 1$

$$\rho_n \leq \inf_{B>0} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\nu_{01}(B) C^{(1)}}{(1-|r|)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\nu_{02}(B) C^{(2)}}{1-|r|} + \delta \sup_{\substack{(s,t): \\ \sqrt{s^2+t^2} > \frac{c(1-|r|)^2}{\nu}}} |f(s,t)|^n \right),$$

де $C^{(i)}$ *– сталі, що залежать тільки від* c, *а* $\delta = \begin{cases} 0, & \nu \leq c(1-|r|)^2, \\ 1, & \nu > c(1-|r|)^2 \end{cases}$

Теорема 2. *Нехай* $c' \in \left(0, \frac{1}{64}\right)$ *– довільна стала. Тоді при* $n \geq 1$

$$\rho_n \leq \inf_{B>0} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\nu'_{01}(B) C^{(5)}}{(1-|r|)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\nu_{02}(B) C^{(6)}}{1-|r|} + \delta \sup_{\substack{(s,t): \\ \sqrt{s^2+t^2} > \frac{c(1-|r|)^2}{\nu}}} |f(s,t)|^n \right),$$

де $C^{(i)}$ *– сталі, що залежать тільки від* c', *а* $\delta = \begin{cases} 0, & \nu' \leq c'(1-|r|)^2, \\ 1, & \nu' > c'(1-|r|)^2 \end{cases}$

Лема 1. *Для довільних значень* s, t *виконуються оцінки:*

$$\omega(s,t) = |f(s,t) - g(s,t)| \leq \min \Bigg\{ \nu_{01}(B) + \nu_{02}(B);$$

$$\frac{(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}}{6} \nu_{01}(B) + (s^2+t^2)\nu_{02}(B); \frac{s^2+t^2}{2} \left(\nu_{01}(B) + \nu_{02}(B)\right) \Bigg\}.$$

Доведення.

$$|f(s,t) - g(s,t)| = \iint_{R^2} |e^{i(sx+ty)}||d\Psi(x,y)| \leq \iint_{R^2} |d\Psi(x,y)| = \iint_{x^2+y^2 \leq B} |d\Psi(x,y)| +$$

$$+ \iint_{x^2+y^2 > B} |d\Psi(x,y)| \leq \iint_{x^2+y^2 \leq B} \max\left(1,\ (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\right) |d\Psi(x,y)| +$$

$$+ \iint_{x^2+y^2 > B} |d\Psi(x,y)| = \nu_{01}(B) + \nu_{02}(B).$$

$$|f(s,t) - g(s,t)| = \left| \iint_{R^2} e^{i(sx+ty)} d\Psi(x,y) \right| =$$

$$= \left| \iint_{R^2} \left(e^{i(sx+ty)} - 1 - i(sx+ty) - \tfrac{(i(sx+ty))^2}{2} \right) d\Psi(x,y) \right| \leq$$

$$\leq \iint\limits_{x^2+y^2\leq B} \left| e^{i(sx+ty)} - 1 - i(sx+ty) - \tfrac{(i(sx+ty))^2}{2} \right| d\Psi(x,y) +$$

$$+ \iint\limits_{x^2+y^2> B} \left| e^{i(sx+ty)} - 1 - i(sx+ty) - \tfrac{(i(sx+ty))^2}{2} \right| d\Psi(x,y) \leq$$

$$\leq \iint\limits_{x^2+y^2\leq B} \tfrac{|sx+ty|^3}{6} \left| d\Psi(x,y) \right| + \iint\limits_{x^2+y^2> B} 2\tfrac{|sx+ty|^2}{2} \left| d\Psi(x,y) \right| \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{6}\left(s^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}} \iint\limits_{x^2+y^2\leq B} \left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} |d\Psi(x,y)| + (s^2+t^2) \iint\limits_{x^2+y^2> B} (x^2+y^2)\, |d\Psi(x,y)| \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{6}\left(s^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}} \iint\limits_{x^2+y^2\leq B} \max\Big(1,\, (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big)\, |d\Psi(x,y)| +$$

$$+ (s^2+t^2) \iint\limits_{x^2+y^2> B} \max\left(1,\, (x^2+y^2)\right) |d\Psi(x,y)| = \tfrac{1}{6}(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}\nu_{01}(B) + (s^2+t^2)\nu_{02}(B).$$

Тут використано нерівності:

$$\left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2} \right| \leq \begin{cases} \frac{|\alpha|^3}{6}, \\ \alpha^2, \end{cases} \quad \text{а також } (st+ty)^2 \leq (s^2+t^2)(x^2+y^2).$$

$$|f(s,t) - g(s,t)| = \left| \iint\limits_{R^2} e^{i(sx+ty)} d\Psi(x,y) \right| =$$

$$= \left| \iint\limits_{R^2} \Big(e^{i(sx+ty)} - 1 - i(sx+ty) - \tfrac{(i(sx+ty))^2}{2} \Big) d\Psi(x,y) \right| \leq$$

$$\leq \iint\limits_{R^2} \tfrac{|i(sx+ty)|^2}{2} |d\Psi(x,\, y)| \leq \tfrac{1}{2}(s^2+t^2) \iint\limits_{R^2} (x^2+y^2) |d\Psi(x,\, y)| =$$

$$= \tfrac{1}{2}(s^2+t^2) \Big(\iint\limits_{x^2+y^2\leq B} (x^2+y^2)|d\Psi(x,\, y)| + \iint\limits_{x^2+y^2> B} (x^2+y^2)|d\Psi(x,\, y)| \Big) \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{2}(s^2+t^2) \Big(\iint\limits_{x^2+y^2\leq B} \max\Big(1,\, (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big) |d\Psi(x,\, y)| +$$

$$+ \iint\limits_{x^2+y^2> B} \max\Big(1,\, (x^2+y^2)\Big) |d\Psi(x,\, y)| \Big) = \tfrac{1}{2}(s^2+t^2)\Big(\nu_{01}(B) + \nu_{02}(B)\Big).$$

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай* $\nu = \max\big(\nu_{01}(B),\, \nu_{02}(B)\big)$, $c \in \left(0,\, \frac{1}{16}\right)$. *Тоді при*

$$\nu \leq c(1-|r|)^2 \ \ i \ \sqrt{s^2+t^2} \leq T_1 = \sqrt{-\frac{2}{1-|r|}\ln \nu}$$

виконується оцінка

$$f(s,\, t) \leq e^{-(1-|r|)(s^2+t^2)c_1}, \ \ \text{де } c_1 = \frac{1}{4} - \sqrt{c} > 0.$$

Якщо $\sqrt{s^2+t^2} > T_1$, *то має місце нерівність* $f(s,\, t) \le 3\nu$.

Якщо $\nu > c(1-|r|)^2$, *то при умові, що*

$$\nu_{02}(B) \le c(1-r)^2 \ \text{і при} \ \sqrt{s^2+t^2} \le T_2 = \frac{c(1-|r|)^{\frac{3}{2}}}{\nu}$$

виконується

$$f(s,t) \le e^{-(1-|r|)(s^2+t^2)c_2}, \ \text{де} \ c_2 = \frac{1}{2} - 2c\sqrt{e} > 0.$$

Доведення. Нехай $\nu \le c(1-|r|)^2$, $s^2+t^2 \le T_1$. Тоді, згідно леми 1 і очевидної нерівності $s^2+2rst+t^2 \ge (1-|r|)(s^2+t^2)$ одержимо таку оцінку:

$$|f(s,\,t)| = \left|f(s,\,t) - e^{-\frac{1}{2}(s^2+2rst+t^2)} + e^{-\frac{1}{2}(s^2+2rst+t^2)}\right| \le \omega(s,\,t) + e^{-\frac{1}{2}(s^2+2rst+t^2)} \le$$

$$\le \frac{1}{2}(s^2+t^2)\big(\nu_{01}(B)+\nu_{02}(B)\big) + e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)(s^2+t^2)} =$$

$$= e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}\Big(\frac{1}{2}(s^2+t^2)\big(\nu_{01}(B)+\nu_{02}(B)\big)e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)} + e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}\Big) \le$$

$$\le e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}\Big(1 + \frac{1}{2}(s^2+t^2)\big(\nu_{01}(B)+\nu_{02}(B)\big)e^{\frac{1}{4}(1-|r|)T_1^2}\Big) =$$

$$= e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}\Big(1 + \frac{1}{2}(s^2+t^2)2\nu e^{\frac{1}{4}(1-|r|)\left(-\frac{2}{1-|r|}\ln\nu\right)}\Big) =$$

$$= e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}\big(1+\sqrt{\nu}(s^2+t^2)\big) \le$$

$$\le e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}\big(1+\sqrt{c}(1-|r|)(s^2+t^2)\big) \le e^{-\frac{1}{4}(1-|r|)(s^2+t^2)}e^{\sqrt{c}(1-|r|)(s^2+t^2)} =$$

$$= e^{(1-|r|)(s^2+t^2)\left(\frac{1}{4}-\sqrt{c}\right)} = e^{(1-|r|)(s^2+t^2)c_1},$$

де $c_2 = \frac{1}{2} - 2c\sqrt{e} > 0$.

Додаткова умова $\nu_{02}(B) \le c(1-|r|)^2$, що використовувалася при одержанні попередньої оцінки, є очевидною. Адже в іншому випадку,

$$\text{якщо } \nu_{02}(B) > c(1-|r|)^2, \ \text{отримуємо: } \rho_n \le 2 \le 2\frac{\nu_{02}}{c(1-|r|)^2},$$

тобто твердження леми виконується відразу. Таким чином, лему доведено.

Доведення теореми 1. При $n=1$ з леми 1 відразу одержуємо $\rho_1 \le \le \nu_{01}(B)+\nu_{02}(B)$, тобто твердження теореми є справедливим. Тому розглянемо випадок $n>1$:

$$\rho_n = \sup_{(s,\,t)\in R}|\varphi_n(s,\,t) - g(s,\,t)| =$$

$$= \sup_{(s,\,t)\in R}\left|f^n\Big(\frac{s}{\sqrt{n},\,\frac{t}{\sqrt{n}}}\Big) - g^n\Big(\frac{s}{\sqrt{n},\,\frac{t}{\sqrt{n}}}\Big)\right| = \sup_{(s,\,t)\in R}\left|f^n(s,\,t) - g^n(s,\,t)\right|.$$

Нехай

$$k = \begin{cases} 1, & \nu \le c(1-|r|)^2, \\ 2, & \nu > c(1-|r|)^2, \quad \nu_{02} \le c(1-|r|)^2. \end{cases}$$

Очевидно, що
$\rho_n = \sup\limits_{(s,\,t)\in R} |f^n(s,\,t) - g^n(s,\,t)| \le$

$$\le \max\left\{ \sup_{\substack{(x,\,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}\le T_k}} |f^n(s,\,t) - g^n(s,\,t)|\,,\ \sup_{\substack{(x,\,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}> T_k}} |f^n(s,\,t)| + \sup_{\substack{(x,\,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}> T_k}} |g^n(s,\,t)| \right\}.$$

При подальшому оцінюванні використаємо очевидну нерівність

$$|a^n - b^n| \le (a-b)\sum_{j=1}^{n} a^{n-j} b^{j-1},$$

поклавши $a = f(s,\,t)$, $b = g(s,\,t)$.

Розглянемо випадок $\sqrt{s^2+t^2} \le T_k$.

$$|f^n(s,\,t) - g^n(s,\,t)| \le |f(s,\,t) - g(s,\,t)| \sum_{j=1}^{n} |f^{n-j}|\,|g^{j-1}| \le$$

$$\le \left(\tfrac{1}{6}\nu_{01}(B)\,(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}} + \nu_{01}(B)(s^2+t^2)\right)\sum_{j=1}^{n} e^{-\left(1-|r|(s^2+t^2)\right)c_k(n-j)} e^{-\frac{1}{2}\left(x^2+2rst+t^2\right)(j-1)} \le$$

$$\le \left(\tfrac{1}{6}\nu_{01}(B)\,(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}} + \nu_{02}(B)(s^2+t^2)\right)\sum_{j=1}^{n} e^{-\left(1-|r|(s^2+t^2)\right)c_k(n-j)} e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)\left(x^2+t^2\right)(j-1)} \le$$

$$\le n\left(\tfrac{1}{6}\nu_{01}(B)\,(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}} + \nu_{02}(B)(s^2+t^2)\right) e^{-\left(1-|r|(s^2+t^2)\right)c_k(n-j)}.$$

Тоді

$$\sup_{\substack{(x,\,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}\le T_k}} |f^n(s,\,t) - g^n(s,\,t)| \le$$

$$\le \sup_{\substack{(x,\,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}\le T_k}} \left(n\left(\tfrac{1}{6}\nu_{01}(B)\,(s^2+t^2)^{\frac{3}{2}} + \nu_{02}(B)(s^2+t^2)\right) e^{-\left(1-|r|(s^2+t^2)\right)c_k(n-j)}\right) =$$

$$= \sup_{\substack{(x,\,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}\le T_k}} \left(n\frac{\frac{1}{6}\nu_{01}(B)\left(s^2+t^2\right)^{\frac{3}{2}}((1-|r|)(n-1)c_k)^{\frac{3}{2}}}{(1-|r|)^{\frac{3}{2}}\,(n-1)^{\frac{3}{2}}\,c_k^{\frac{3}{2}}}\; e^{-\left(1-|r|(s^2+t^2)\right)c_k(n-1)} + \right.$$

$$\left. + \, n\frac{\nu_{02}(B)\left(s^2+t^2\right)(1-|r|)(n-1)c_k}{(1-|r|)(n-1)c_k} e^{-\left(1-|r|(s^2+t^2)\right)c_k(n-1)}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\nu_{01}(B)c_3}{(1-|r|)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\nu_{02}(B)c_4}{1-|r|}. \qquad (1)$$

Нехай $\nu \le c(1-|r|)^2$ $(k=1)$. Тоді

$$\sup_{\substack{(x,\,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}> T_1}} |f^n(s,\,t)| \le (3\nu) \le 3\nu(3c(1-|r|))^{n-1} \le \frac{\nu_{01}(B)c_5}{\sqrt{n}} + \nu_{02}(B)c_6. \qquad (2)$$

$$\sup_{\substack{(x,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}>T_1}} |g^n(s,\,t)| \le \sup_{\substack{(x,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}>T_1}} e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)\left(s^2+t^2\right)n} \le e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)T_1^2 n} = e^{-\frac{1}{2}(1-|r|)\left(-\frac{2}{1-|r|}\ln\nu\right)n} =$$

$$= \nu^n \le \nu\left(c(1-|r|)^2\right)^{n-1} \le \nu c^{n-1} \le \frac{\nu_{01}(B)c_7}{\sqrt{n}} + \nu_{02}(B)c_8. \qquad (3)$$

Отже, при $n > 1$ внаслідок (1)–(3) виконується перше твердження теореми. Нехай тепер $\nu > c(1-|r|)^2$ $(k = 2)$.

$$\sup_{\substack{(x,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}>T_2}} |g^n(s,\,t)| \le \sup_{\substack{(x,y):\\ \sqrt{x^2+t^2}>T_2}} e^{-\frac{n}{2}(1-|r|)\left(s^2+t^2\right)} = e^{-\frac{n}{2}(1-|r|)\frac{(1-|r|)^3}{\nu^2}c^2} =$$

$$= \frac{\nu}{\sqrt{n}(1-|r|)^2}\left(\frac{\sqrt{n}(1-|r|)^2}{\nu}\, e^{-\frac{n(1-|r|)^4}{2\nu^2}c^2}\right) \le \frac{\nu}{\sqrt{n}(1-|r|)^2}\, c_9 \le$$

$$\le \frac{c_9}{(1-|r|)^2}\left(\frac{\nu_{01}(B)}{\sqrt{n}} + \nu_{02}(B)\right). \qquad (4)$$

Із (1) і (4) слідує друге твердження теореми 1.

Доведення теореми 2 за незначними винятками аналогічне доведенню теореми 1. При цьому використовуються наступні леми, доведення яких теж здійснюється за схемою доведення відповідно лем 1 і 2.

Лема 3. *Для довільних значень s, t виконуються оцінки:*

$$\omega(s,\,t) = |f(s,\,t) - g(s,\,t)| \le \min\{\nu_{01}'(B) + \nu_{02}(B)\,;$$

$$\left.\frac{2}{3}\left(|s|^3 + |t|^3\right)\nu_{01}'(B) + \left(s^2+t^2\right)\nu_{02}(B); \left(s^2+t^2\right)\left(\nu_{01}'(B) + \nu_{02}(B)\right)\right\}.$$

Лема 4. *Нехай $\nu' = \max\left(\nu_{01}'(B), \nu_{02}(B)\right)$, $c' \in \left(0,\ \frac{1}{64}\right)$. Тоді при $\nu' \le c'(1-|r|)^2$ і $\sqrt{s^2+t^2} \le T_1' = \sqrt{-\frac{2}{1-|r|}\ln\nu'}$ виконується оцінка $f(s,\,t) \le e^{-(1-|r|)\left(s^2+t^2\right)c_1'}$, де $c_1' = \frac{1}{4} - 2\sqrt{c'} > 0$.*

Якщо $\sqrt{s^2+t^2} > T_1'$, то має місце нерівність $f(s,\,t) \le 3\nu'$. 0,2cm
Якщо $\nu' > c'(1-|r|)^2$, то при умові, що

$$\nu_{02}(B) \le c'(1-|r|)^2 \ \text{ і при } \sqrt{s^2+^2} \le T_2' = \frac{c'\,(1-|r|)^{\frac{3}{2}}}{\nu'}$$

виконується $f(s,\,t) \le e^{-(1-|r|)\left(s^2+t^2\right)c_2'}$, де $c_2' = \frac{1}{2} - \frac{5}{3}{'}\sqrt{\ } > 0$.

1. *Золотарев В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука. – 1986. – 416 с.
2. *Садикова С. М.* Некоторые неравенства для характеристических функций // Теория вероятностей и её применения . – 1966. – Вип. 3. – Т. XI. – С. 500–506.
3. *Боярищева Т. В., Поляк І. Й.* Швидкість збіжності до двовимірного нормального закону в рівномірній метриці для характеристичних функцій // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 18. – С. 25–30.
4. *Боярищева Т. В., Поляк І. Й., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості розподілів сум до нормального закону // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2000. – Вип. 5. – С. 4–10.

Одержано 20.03.2010