УДК 519.8

В. І. Гренджа, А. Ю. Брила (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЯЖНІСТЬ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНІЄЇ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО-ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ОПТИМАЛЬНЕ ПРИЗНАЧЕННЯ

In paper the lexicographic-lexicografical setting problem with quadratic criterion functions is considered. The method of finding of optimum solutions, which are attainable on the weighed sum of criteria is proposed.

У роботі запропоновано метод знаходження оптимальних розв'язків квадратичної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації про оптимальне призначення, які є досяжними за зваженою сумою критеріїв.

Розглядається задача лексикографічно-лексикографічної максимізації ([1])

$$\max{}^{LL} c(x),\ x \in X, \tag{1}$$

де $c(x) = (c_1(x), c_2(x), ..., c_q(x))$ – векторна згортка критеріїв $c_k(x)$, $k = 1, 2, ...,$ q, в субординації строгого ранжирування $Rg(1, 2, ..., q)$. Кожен з критеріїв

$$c_k(x) = (c_{k1}(x), c_{k2}(x), ..., c_{kq_k}(x)),$$

$k \in \{1, 2, ..., q\}$, в свою чергу, є векторною згорткою критеріїв c_{kl}, $l = 1, 2, ..., q_k$, в субординації $Rg(1, 2, ..., q_k)$,

$$c_{kl}(x) = x^T Q^{kl} x,\ \ l = 1, 2, ..., q_k,\ \ k = 1, 2, ..., q, \tag{2}$$

де

$$Q^{kl} = \left\{q_{ij}^{kl}\right\}, \quad q_{ij}^{kl} \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n^2,\ j = 1, 2, ..., n^2,$$

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \\ \vdots \\ x_{n1} \\ x_{n2} \\ \vdots \\ x_{nn} \end{pmatrix} \in R^{n^2}.$$

Допустима множина $X \subset R^{n^2}$ задається за допомогою обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ i = 1, 2, .., n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1,\ \ j = 1, 2, .., n, \tag{4}$$

$$x_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right. , \quad i = 1, 2, .., n, \quad j = 1, 2, .., n. \tag{5}$$

Розв'язок лінійної багатокритеріальної задачі оптимізації, який може бути отриманий як розв'язок відповідної задачі лінійного програмування, з цільовою функцією, що є лінійною згорткою критеріїв цієї багатокритеріальної задачі оптимізації, називають досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв.

На основі задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації (1) побудуємо задачу лексикографічної оптимізації

$$\max{}^L \tilde{c}(x), \; x \in X, \tag{6}$$

де

$$\tilde{c}(x) = \left(c_{11}(x), c_{12}(x), ..., c_{1q_1}(x), ..., c_{q1}(x), c_{q2}(x), ..., c_{qq_q}(x) \right).$$

В [1] доводиться, що порядки віддачі переваги у задачах (1) і (6) еквівалентні, а отже, множина оптимальних розв'язків задачі (6) є множиною оптимальних розв'язків задачі (1).

Нехай

$$d_{kl} = \max \left\{ q_{ij}^{kl} \middle| \; i, j \in \{1, 2, ..., n^2\} \right\}, \; l = 1, 2, ..., q_k, \;\; k = 1, 2, ..., q,$$

$$\mu_{kl} = \min \left\{ \left| q_{ij}^{kl} - q_{tp}^{kl} \right| \middle| \; i, j, t, p \in \left\{1, 2, ..., n^2\right\}, \; q_{ij}^{kl} \neq q_{tp}^{kl} \right\}, \quad l = 1, 2, ..., q_k, \;\; k = 1, 2, ..., q.$$

Враховуючи вигляд критеріїв (2) та структуру допустимої множини X, визначимо величини

$$M_{kl} = n^4 d_{kl} \geq \max c_{kl}(x), \; x \in X, \; l = 1, 2, ..., q_k, \; k = 1, 2, ..., q, \tag{7}$$

$$\mu_{kl} \leq \inf \left| c_{kl}(x) - c_{kl}(y) \right|, \; x, y \in X, c_{kl}(x) \neq c_{kl}(y), \; l = 1, 2, ..., q_k, \; k = 1, 2, ..., q. \tag{8}$$

Розглянемо функціонал

$$L(x) = \sum_{k=1}^{q} \sum_{l=1}^{q_k} \alpha_l^k c_{kl}(x), \tag{9}$$

де $\alpha_{q_q}^q$ – довільне додатне число, а всі інші $\alpha_{q_q-1}^q, \alpha_{q_q-2}^q, ..., \alpha_1^1$ визначаються з умов

$$\alpha_r^k > \frac{1}{\mu_{kr}} \left(\sum_{l=r+1}^{q_k} \alpha_l^k M_{kl} + \sum_{t=k+1}^{q} \sum_{l=1}^{q_t} \alpha_l^t M_{tl} \right). \tag{10}$$

Позначимо $\hat{X}^V$ множину крайніх точок множини $\hat{X}$, яка задається за допомогою обмежень

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; i = 1, 2, .., n, \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \;\; j = 1, 2, .., n, \tag{12}$$

$$x_{ij} \geq 0, \;\; i = 1, 2, .., n, \;\; j = 1, 2, .., n. \tag{13}$$

Нехай $\hat{X}^*$ множина оптимальних розв'язків задачі

$$\max L(x), \, x \in \hat{X}.$$

Теорема 1 ([3]). Якщо X^*є множиною оптимальних розв'язків задачі (6), тоді

$$\hat{X}^V \cap \hat{X}^* \subset X^*.$$

Теорема 2. Якщо X^{**} є множиною оптимальних розв'язків задачі (1), тоді

$$\hat{X}^V \cap \hat{X}^* \subset X^{**}.$$

Доведення теореми легко отримати на основі теореми 1 та еквівалентності порядків віддачі переваги у задачах (1) і (6).

1. *Червак Ю. Ю.* Оптимізація. Непокращуваний вибір. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. — 312 с.
2. *Подиновский В.В., Гаврилов В.М.* Опимизация по последовательно применяемым критериям. — М.:Наука, 1975. — 192 с.
3. *Гренджа В.І., Брила А.Ю.* Досяжність оптимальних розв'язкців однієї лексикографічної задачі про оптимальне призначення//Наук. вісник Ужгород. ун.-ту. Сер. матем. і інформ. — 2009. Вип.18. — С. 51-53.

Одержано ..2010