УДК 517.518

С.О.Кирилов (Одеський національний морський університет)

КОЕФІЦІЄНТНІ ОЦІНКИ У ВАГОВИХ ПРОСТОРАХ ЛЕБЕГА

Some new estimates of the Fourier coefficients for functions from weighted $L^p(p > 1)$ spaces are obtained.

Одержані нові оцінки коефіцієнтів Фур'є функцій з вагових просторів $L^p(p > 1)$.

Стаття присвячена одержанню оцінок коефіцієнтів Фур'є функцій, що належать певним функціональним просторам, за загальними ортонормовними системами. Такі оцінки мають теоретичне значення та застосовуються в теорії ортогональних рядів, теорії функціональних просторів.

Перші оцінки норм функцій у просторах Лебега через їх коефіцієнти Фур'є за тригонометричною системою були одержані Хаусдорфом і Юнгом, а також, дещо пізніше, Харді і Літтлвудом. У наступні роки у роботах Пелі, Марцинкевича і Зігмунда ці результати були перенесені на загальні ортонормовані системи. Аналоги таких результатів були також одержані в інших просторах функцій у роботах ряду математиків. Так, у роботі Пітта [1], було встановлено наступну оцінку.

Теорема 1. *Нехай $p > 1$ та α таке, що $\alpha < p - 1$, $\alpha \geq max(p-2, 0)$ і функція $f(x)$ задовольняє умову*

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^p x^\alpha dx < \infty \,.$$

Якщо $\{c_n\}$ - коефіцієнти Фур'є функції f за системою $\{e^{inx}\}$, то вірна нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p n^{p-2-\alpha} \leq c_{p,\alpha} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p x^\alpha dx \,.$$

Зазначимо, що деяке узагальнення цієї оцінки міститься у результатах Стейна [2]. Крім того, для ваги виду

$$x^\alpha \log^{\alpha_1} \frac{a_1}{x} \log^{\alpha_2} \log \frac{a_2}{x} \ldots \log^{\alpha_n} \ldots \log \frac{a_n}{x}$$

оцінка такого типу раніше була одержана В.М.Кокілашвілі [3].

Втім, ціла низка питань, пов'язаних з такими оцінками, залишилась відкритою. Зокрема, це питання, чи можна замінити зазначені вище вагові функції функціями більш загального вигляду.

Мета роботи полягає в тому, щоб, спираючись на оцінки незростаючих переставлень функцій, встановити нові оцінки норм цих функцій у вагових просторах Лебега $L^p(p > 1)$ через їх коефіцієнти Фур'є за загальними ортонормованими системами. А саме, у статті сформульовано і доведено дві теореми, що узагальнюють і посилюють теорему Пітта.

Для одержання результатів статті використовуються наступні відомі факти.

По-перше, якщо $f \in L_1$ і $\{c_n\}$ - коефіцієнти Фур'є функції f за системою $\{\varphi_n(x)\}$ з рівномірно обмеженими нормами в L_∞ , то

$$c_n^* \le c\left\{\int_0^{\frac{1}{n}} f^*(t)dt + \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_{\frac{1}{n}}^1 f^*(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}\right)\right\},$$

де $\{c_n^*\}$ - переставлення послідовності $\{|c_n|\}$ у незростаючому порядку, а $f^*(t)$ -незростаюче переставлення функції $f(x)$.

Це твердження було вперше одержано Монтгомері [4], та пізніше, іншим методом, у роботі [5].

По-друге, застосовується наступна лема.

Лема 1. *([6],стор.42-45). Нехай $1 \le p \le q \le \infty$. Для того, щоб існувала стала c, яка не залежить від функції f, і така, що*

$$\left|\int_0^1 \left|\omega(x)\int_0^x f(t)dt\right|^q dx\right|^{\frac{1}{q}} \le c\left|\int_0^1 |\nu(x)f(x)|^p\, dx\right|^{\frac{1}{p}}$$

необхідно і досить, щоб

$$B = \sup_{r>0}\left(\int_r^1 |\omega(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_0^r |\nu(x)|^{-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,\ p' = \frac{p}{p-1}.$$

Для того, щоб існувала стала c, яка не залежить від функції f , і така, що

$$\left|\int_0^1 \left|\omega(x)\int_x^1 f(t)dt\right|^q dx\right|^{\frac{1}{q}} \le c\left|\int_0^1 |\nu(x)f(x)|^p\, dx\right|^{\frac{1}{p}}$$

необхідно і досить, щоб

$$C = \sup_{r>0}\left(\int_0^r |\omega(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_r^1 |\nu(x)|^{-p'}dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,\ p' = \frac{p}{p-1}.$$

Зауважимо, що дане твердження містить у собі відому нерівність Харді ([7], с.296) і широко використовується, наприклад, у теорії вкладення функціональних просторів.

Нехай Φ -множина усіх невід'ємних функцій, які монотонно зростають на $[0,1]$. Скажімо, що функція $\omega \in \Phi$ задовольняє Δ_2 - умову, якщо

$$\omega(2t) \le c\omega(t), t > 0.$$

Припустимо, що при $p > 1$ $\omega \in \Phi$ задовольняє наступні умови

$$B' = \sup_{0<r<1}\left(\int_r^1 \left(\frac{\omega(t)}{t}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^r |\omega(t)|^{-p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty, \tag{2}$$

$$C' = \sup_{0<r<1}\left(\int_0^r \left(\frac{\omega(t)}{\sqrt{t}}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_r^1 |\sqrt{t}\omega(t)|^{-p'}dt\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty. \tag{3}$$

Тепер сформулюємо основне твердження.

Теорема 2. *Нехай* $\{\varphi_n(x)\}$ *- ортонормована система на відрізку* $[0,1]$ *і* $||\varphi_n||_\infty \le M$ *при всіх* $n = 1, 2, \dots$ *, а також*

$$\int_0^1 f^{*p}(t)\omega^p(t)dt < \infty,\ p > 1,$$

послідовність $\{c_n\}$ *є послідовністю коефіцієнтів Фур'є функції* f *і* $\omega \in \Phi$ *задовольняє* Δ_2 *-умову. Якщо* $p = 2$ *і* $\omega(t) \equiv const$, *або* $p > 1$, *а* $\omega(t)$ *задовольняє умови (2), (3), то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{*p} n^{p-2} \omega^p\left(\frac{1}{n}\right) \le c\int_0^1 f^{*p}(t)\omega^p(t)dt\,.$$

Доведення. При $p = 2$, $\omega(t) \equiv const$ наша нерівність вироджується у нерівність Бесселя. Нехай $p > 1$, а $\omega(t)$ задовольняє умови (2), (3).

Із нерівності (1) виходить

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{*p} n^{p-2}\omega^p\left(\frac{1}{n}\right) \le c\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{\frac{1}{n+1}} f^*(t)dt\right)^p n^{p-2}\omega^p\left(\frac{1}{n}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{\frac{1}{n+1}}^1 f^*(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}\right)^p n^{\frac{p}{2}-2}\omega^p\left(\frac{1}{n}\right)\right\} \equiv c\{I_1 + I_2\}\,.$$

Оцінимо I_1.

$$I_1 \le c\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\int_0^s f^*(t)dt\right)^p ds\right] n^p\omega^p\left(\frac{1}{n}\right)\,.$$

Використаємо Δ_2 - умову.

$$I_1 \le c\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}}\left(\int_0^s f^*(t)dt\right)^p\left(\frac{\omega(s)}{s}\right)^p ds \le c\int_0^1\left(\int_0^s f^*(t)dt\right)^p\left(\frac{\omega(s)}{s}\right)^p ds\,.$$

Враховуючи (2) і лему 1, одержуємо

$$I_1 \le c\int_0^1 f^{*p}(t)\omega^p(t)dt,$$

що і треба було довести. Оцінимо I_2.

$$I_2 \le c\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{1}{n+2}}^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_s^1 f^*(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}\right)^p\left(\frac{\omega(s)}{\sqrt{s}}\right)^p ds \le c\int_0^1\left(\int_s^1 f^*(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}\right)^p\left(\frac{\omega(s)}{\sqrt{s}}\right)^p ds\,.$$

Врахуємо (3) і лему 1. Одержимо

$$I_2 \le c\int_0^1 f^{*p}(t)\omega^p(t)dt\,,$$

що разом з оцінкою для I_1 доводить нашу теорему.

Зауважимо, що із теореми 2 випливає твердження теореми Пітта. Справді, покладемо $\omega(t) = t^{\frac{\alpha}{p}}$, $\alpha \geq max(0, p-2)$, $\alpha < p-1$, $p > 1$. Якщо $p = 2$, $\alpha = 0$, теорема Пітта вироджується у нерівність Бесселя. В інших випадках перевіримо умови (2) і (3) .

Тут

$$B' = \sup_{0<r<1} \left(\int_r^1 t^{\alpha-p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^r t^{-\frac{\alpha}{p-1}} dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \,.$$

Оскільки $\alpha < p-1$, то другий інтеграл існує. Далі

$$B' = \sup_{0<r<1} \left(1 - r^{\alpha-p+1}\right)^{\frac{1}{p}} r^{\frac{-\alpha+p-1}{p}} < \infty.$$

Аналогічно

$$C' = \sup_{0<r<1} \left(\int_0^r t^{\alpha-\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_r^1 t^{-\frac{p+2\alpha}{2(p-1)}} dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \,.$$

Отже, доведено, що при приведених вище припущеннях

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{*p} n^{p-2-\alpha} \leq c \int_0^1 f^{*p}(t) t^{\alpha} dt \,. \tag{4}$$

Це твердження дещо сильніше за оцінку Пітта, бо у лівій частині нерівності (4) стоїть величина більша, ніж в оцінці Пітта, а в правій - менша.

Тепер одержимо аналогічну вагову оцінку у випадку, коли ортонормована система вже не є рівномірно обмеженою. Тут використаємо таку лему.

Лема 2. *Нехай* $\{\varphi_n(x)\}$ *- ортонормована система на відрізку* $[0,1]$ *і* $||\varphi_n||_\infty \leq M_n$, $B_n = \sum_{k=1}^n M_k^2$, $n = 1, 2, \ldots$.
Тоді

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| M_k \leq B_n \int_0^t f^*(s) ds + \sqrt{B_n} \left(\int_t^1 f^*(s) \frac{ds}{\sqrt{s}} \right) \,. \tag{5}$$

Доведення. Покладемо

$$\tilde{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{sign} c_k M_k \varphi_k(x) \,.$$

Використовуючи відомі властивості незростаючих переставлень функцій ([8], стор. 88-93), маємо

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k| M_k = \int_0^1 f(x) \tilde{S}_n(x) dx \leq \int_0^1 f^*(t) \tilde{S}_n^*(t) dt \leq$$

$$\leq \int_0^t f^*(u) \tilde{S}_n^*(u) du + \int_t^1 f^*(u) \tilde{S}_n^*(u) du \leq$$

$$\leq \int_0^t f^*(u) du ||\tilde{S}_n^*||_\infty + \int_t^1 f^*(u) \frac{du}{\sqrt{u}} ||\tilde{S}_n^*||_2 \,.$$

Далі помічаємо

$$||\tilde{S}_n^*||_\infty \le \sum_{k=1}^{n} M_k^2 = B_n \,.$$

І, нарешті,

$$||\tilde{S}_n^*||_2 \le \left(\sum_{k=1}^{n} M_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{B_n} \,.$$

Об'єднуючи ці оцінки, одержуємо потрібний результат.

Теорема 3. *Нехай* $\{\varphi_n(x)\}$, M_n , B_n $(n = 1, 2, ...)$ *визначені, як і вище. Якщо при* $p > 1$

$$\int_0^1 f^{*p}(t)\omega^p(t)dt < \infty \,,$$

послідовність $\{c_n\}$ *є послідовністю коефіцієнтів Фур'є функції* f, $\omega \in \Phi$ *задовольняє* Δ_2 *-умову і умови (2), (3), то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}|c_k|M_k\right)^p B_n^{p-2}\omega^p\left(\frac{1}{B_n}\right) \le c\int_0^1 f^{*p}(t)\omega^p(t)dt \,.$$

Доведення. Визначимо послідовність $\{\nu_n\}$ таким чином. Позначимо

$$\nu_1 = 1, \nu_{n+1} = min\,\{s : B_s > 2B_{\nu_n}\}\,, (n = 1, 2, \dots).$$

Використовуючи (5) і Δ_2 -умову , одержимо

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}|c_k|M_k\right)^p B_n^{p-2}\omega^p\left(\frac{1}{B_n}\right) \le$$

$$\le c\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{1/B_{\nu_n}} f^*(t)dt\right)^p B_{\nu_n}^{p-1}\omega^p\left(\frac{1}{B_{\nu_n}}\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_{1/B_{\nu_n}}^{1} f^*(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}\right)^p B_{\nu_n}^{\frac{p}{2}-1}\omega^p\left(\frac{1}{B_{\nu_n}}\right)\right\} \equiv c\{I_1 + I_2\}\,.$$

Оцінимо I_1. Маємо

$$I_1 \le c\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{1/B_{\nu_{n+1}-1}}^{1/B_{\nu_n}}\left(\int_0^{\frac{1}{B_{\nu_n}}} f^*(t)dt\right)^p ds\right] B_{\nu_n}^p\omega^p\left(\frac{1}{B_{\nu_n}}\right) \le$$

$$\le c\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{1/B_{\nu_{n+1}-1}}^{1/B_{\nu_n}} f^{**p}\left(\frac{1}{B_{\nu_n}}\right)ds\right]\omega^p\left(\frac{1}{B_{\nu_n}}\right) .$$

У останній оцінці $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du$ - незростаюча функція (див. [8]). Далі

$$I_1 \le c\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/B_{\nu_{n+1}-1}}^{1/B_{\nu_n}} f^{**p}(s)\omega^p(s)ds \le c\int_0^1\left(\int_0^s f^*(t)dt\right)^p\left(\frac{\omega(s)}{s}\right)^p ds \,.$$

Враховуючи (2) і застосовуючи лему 1,

$$I_1 \le c \int_0^1 f^{*p}(t)\omega^p(t)dt\,.$$

Тепер оцінимо I_2.

$$I_2 \le c\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{1/B_{\nu_{n+1}-1}}^{1/B_{\nu_n}}\left(\int_s^1 f^*(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}\right)^p ds\right] B_{\nu_n}^{\frac{p}{2}}\omega^p\left(\frac{1}{B_{\nu_n}}\right).$$

Використовуючи Δ_2 -умову, маємо

$$I_2 \le c\sum_{n=1}^{\infty}\int_{1/B_{\nu_{n+1}-1}}^{1/B_{\nu_n}}\left(\int_s^1 f^*(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}\right)^p\left(\frac{\omega(s)}{\sqrt{s}}\right)^p ds \le$$

$$\le c\int_0^1\left(\int_s^1 f^*(t)\frac{dt}{\sqrt{t}}\right)^p\left(\frac{\omega(s)}{\sqrt{s}}\right)^p ds\,.$$

Враховуємо (3) і застосовуємо лему 1. Одержимо

$$I_2 \le c \int_0^1 f^{*p}(t)\omega^p(t)dt\,.$$

що разом із оцінкою I_1 доводить нашу теорему.

Висновки. У роботі доведено, що в оцінках коефіцієнтів Фур'є функцій з вагових просторів Лебега $L^p (p > 1)$ вагові функції, які використовувались в роботах [1]- [3], можна замінити функцією більш загального вигляду. Таке твердження має місце як у випадку обмежених у сукупності ортонормованих систем, так і для систем, що не є обмеженими у сукупності.

1. *Pitt H.R.* Theorems on Fourier series and power series// Duke Math.J. -1937.-V.3.-P.747-755.
2. *Stein E.M.* Interpolation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc. -1956.-V.83.- P.482-492.
3. *Кокилашвили В.М.* О коэффициентах степенных рядов и рядов Фурье//Сообщ. АН Груз.ССР.-1970.-т.60.- №2.-С.281-284.
4. *Montgomery H.L.* A note on rearrangement of Fourier coefficients// Ann. Inst. Fourier (Grenoble) .-1976.-V.26.-P.29-34.
5. *Родин В.А., Овчинников В.И., Распопова В.Д.* Точные оценки коэффициентов Фурье и K-функционалы// Матем. заметки.-1982.-Т.32.-вып.3.-С.295-302.
6. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л.Соболева.-Л:Изд-во Ленингр. ун-та, 1985.- 416 с.
7. *Харди Г.Г., Литтлвуд Д.Е., Полиа Г.* Неравенства.-М:ИЛ,1948.-456 с.
8. *Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М.* Интерполяция линейных операторов.-М:Наука,1978.-400 с.

Одержано 10.01.2010