УДК 512.86

А. О. Кирилюк (Ужгородський нац. ун-т)

ПЕРША ГРУПА КОГОМОЛОГІЙ НЕЗВІДНИХ 3-ПІДГРУП ГРУПИ $GL(6,\mathbb{Z})$

The description of the classes of 1-cocyclus of the finite irreducible 3-subgroups of the group $GL(6,\mathbb{Z})$ and the first cogoniology group are given in the paper.

В роботі описуються класи 1-коциклів і перша група когомологій скінченних незвідних 3-підгруп групи $GL(6,\mathbb{Z})$.

В $[1,2]$ розглянуто узагальнення класичних кристалографічних груп на деякі кільця R. На основі результатів [3] в [4] описуються класи коциклів скінченних незвідних 3-підгруп групи $GL(3,\mathbb{Z}[\varepsilon])$, $\varepsilon^3=1$, $\varepsilon\neq 1$. У даній роботі описані класи 1-коциклів та перша група когомологій скінченних незвідних 3-підгруп групи $GL(6,\mathbb{Z})$.

Нехай $F=\mathbb{Q}(\varepsilon)$ $(\varepsilon^3=1,\varepsilon\neq 1)$, $K=\mathbb{Z}[\varepsilon]$. Введемо матричне $\mathbb{Q}$-зображення ρ степеня 2 поля F:

$$\rho(\alpha+\beta\varepsilon)=\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\ (\alpha,\beta\in\mathbb{Q}).$$

Відмітимо, що $\rho(x)$ – матриця множення на x в $\mathbb{Q}$-базисі $1,\varepsilon$ поля $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ $(x\in\mathbb{Q}(\varepsilon))$.

Якщо A – матриця над полем F, то через $\rho(A)$ позначимо матрицю над $\mathbb{Q}$, яка одержується заміною кожного матричного елемента a в матриці A на $\rho(a)$ $(a\in F)$. Якщо H – підгрупа в $GL(n,F)$, то покладемо $\rho(H)=\{\rho(A)\mid A\in H\}$.

Нехай $\widetilde{\varepsilon}=\rho(\varepsilon)$, $\mathbb{Q}(\widetilde{\varepsilon})=\rho(Q(\varepsilon))$. Очевидно, що ρ є ізоморфізмом груп

$$GL(n,\mathbb{Q}(\varepsilon))\ \text{ і }\ GL(n,\mathbb{Q}(\widetilde{\varepsilon}))\subseteq GL(2n,\mathbb{Q}).$$

Нехай $P_3=P_3(K)=\langle\varepsilon\rangle$ – силовська 3-підгрупа групи K^*, $\widetilde{P_3}=\langle\widetilde{\varepsilon}\rangle$ – силовська 3-підгрупа групи $(\mathbb{Z}[\widetilde{\varepsilon}])^*$. Як відомо, [3], силовська 3-підгрупа G_3 групи $GL(3,F)$ спряжена зі сплетенням $P_3\int C_3$ групи P_3 з групою підстановок $C_3=\langle\delta=(123)\rangle$, а силовська 3-підгрупа групи $GL(6,\mathbb{Q})$ спряжена з групою $\widetilde{G_3}=\rho(G_3)=\widetilde{P_3}\int C_3$. Групи G_3 і $\widetilde{G_3}$ є незвідними підгрупами груп $GL(3,F)$ і $GL(6,\mathbb{Q})$ відповідно.

Лема 1. *Нехай G – незвідна 3-підгрупа групи $GL(6,\mathbb{Q})$. Тоді існує така незвідна 3-підгрупа H групи $GL(3,\mathbb{Q}(\varepsilon))$, що G спряжена в $GL(6,\mathbb{Q})$ з групою $\rho(H)$.*

Доведення. Нехай G – незвідна підгрупа групи $GL(6,\mathbb{Q})$, $Z(G)$ – центр групи G. Тоді $Z(G)$ спряжена в $GL(6,\mathbb{Q})$ з групою $\langle diag[\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon}]\rangle$.

Якщо X – матриця над $\mathbb{Q}$, спряжена з матрицею $\widetilde{\varepsilon}$, то X спряжена з $\widetilde{\varepsilon}$ і над кільцем $\mathbb{Z}$. Отже, група $Z(G)$ спряжена з групою $\langle diag[\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon}]\rangle$ в групі $GL(6,\mathbb{Z})$. Будь-яка матриця X над $\mathbb{Q}$, що комутує з матрицею $diag[\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon},\widetilde{\varepsilon}]$ буде матрицею над $\mathbb{Q}(\varepsilon)$. Зокрема, якщо X – $\mathbb{Z}$-матриця, то вона є матрицею над $\mathbb{Z}[\widetilde{\varepsilon}]$. Таким чином, група G спряжена над $\mathbb{Z}$ з групою матриць над кільцем $\mathbb{Z}[\widetilde{\varepsilon}]$. З точністю до спряженості можна вважати, що G є групою над $\mathbb{Z}[\varepsilon]$, тобто $G=\rho(H)$ для деякої незвідної підгрупи $H\subset GL(3,K)$. Лему доведено.

Для довільного $x_i = \alpha_i + \beta_i\varepsilon$ $(\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{Q})$ через $\widehat{x_i}$ будемо позначати координатний рядок (α_i, β_i). Якщо $x = (x_1, x_2, x_3)$ – трьохвимірний вектор над F, то через $\widehat{x}$ будемо позначати 6-вимірний вектор $\widehat{x} = (\widehat{x_1}, \widehat{x_2}, \widehat{x_3})$ $(x_i \in F)$.

Лема 2. *Нехай $x \in F$. Тоді $(\widehat{\varepsilon x}) = \widetilde{\varepsilon} \cdot \widehat{x}$.*

Доведення випливає з формули для координат образу вектора при дії лінійного оператора.

Нагадаємо деякі позначення. Очевидно, $\mathbb{C} = \mathbb{R}(\varepsilon)$ $(\varepsilon^3 = 1, \varepsilon \neq 1)$. Нехай

$$C = \mathbb{C}^+/\mathbb{Z}[\varepsilon]^+,\ R = \mathbb{R}^+/\mathbb{Z}^+,\ C^3 = (\mathbb{C}^3)^+/(\mathbb{Z}[\varepsilon]^3)^+ \text{ і } R^6 = (\mathbb{R}^6)^+/(\mathbb{Z}^6)^+.$$

Лема 3. *Нехай G – підгрупа групи $GL(3,K)$, f – 1-коцикл групи G із значеннями в групі C^3. Якщо $g \in G$ і $f(g) = (f_1, f_2, f_3)$ $(f_i \in C)$, то нехай $\widehat{f}(g) = \left(\widehat{f_1}, \widehat{f_2}, \widehat{f_3}\right)$. Тоді $\widehat{f}$ буде 1-коциклом групи $\rho(G)$ зі значеннями в групі R^6.*

Доведення. Нехай $g, h \in G$. Тоді $f(gh) = gf(h) + f(g)$. Тому що ρ – гомоморфізм груп, то за лемою 2:

$$\widehat{f}(gh) = \widehat{f}\left(\rho(g), \rho(h)\right) = \rho(g)\widehat{f}\left(\rho(h)\right) + \widehat{f}\left(\rho(g)\right),$$

тобто $\widehat{f}$ – 1-коцикл групи $\rho(G)$ зі значеннями в групі R^6. Лема доведена.

Лема 4. *Нехай $x \in G$ такий, що $(\varepsilon - 1)x = 0$. Тоді $\widehat{x} = \alpha(1,2)$, де $\alpha \in R$, $3\alpha = 0$.*

Доведення. Нехай

$$\widehat{x} = (x_1, x_2) \quad \text{і} \quad (\widehat{\varepsilon - 1})x = (\widetilde{\varepsilon} - E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

над R. Тоді

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - 2x_2 = 0, \end{cases}$$

звідки $x_2 = -x_1$, $3x_2 = 3x_1 = 0$. Поклавши $x_1 = \alpha$, $x_2 = 2\alpha$, одержимо $\widehat{x} = (\alpha, 2\alpha) = \alpha(1,2)$, де $3\alpha = 0$ в R. Лема доведена.

Твердження 1. *Нехай H – незвідна 3-підгрупа групи $GL(3,K)$ з першою групою когомологій $H^1(H, C^3)$ і $G = \rho(H)$. Заміна кожного 1-коцикла $f : H \to C^3$ на $\widehat{f} : G \to R^6$ дає опис групи $H^1(G, R^6)$.*

Доведення твердження випливає з лем 1, 3, 4.

Використовуючи твердження 1 та роботу [4], одержимо описання групи $H^1(G, R^6)$, де G пробігає з точністю до спряженості незвідні 3-підгрупи групи $GL(6,\mathbb{Z})$.

Теорема 1. *Нехай*

$$U_0 = \langle a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varepsilon \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ b \mid a^9 = b^3 = (ab^{-1}) = 1,\ b^{-1}a^3b = a^3,\ (ba)^3 = a^3\rangle,$$

де b – матриця підстановки (123),

$$U_1 = T_1^{-1}U_0T_1,\ \text{де}\ T_1 = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ t = \varepsilon - 1,$$

$$U_2 = T_2^{-1}U_0T_2,\ \text{де}\ T_2 = \begin{pmatrix} t & 0 & 1 \\ 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$U_i \subset GL(3, \mathbb{Z}[\varepsilon])$ *і* $G_i = \rho(U_i), \quad i = \overline{0, 2}.$

В кожному класі 1*-коциклів групи* G_i *із значеннями в групі* R^6 *існує відповідно єдиний коцикл* $\widehat{f}$ *такий, що мають місце співвідношення:*

Група	$\widehat{f}(a)$	$\widehat{f}(b)$
$\rho(U_0)$	0	$(\beta_1, 2\beta_1, \beta_2, 2\beta_2, -\beta_1 - \beta_2, \beta_1 + \beta_2), 3\beta_i = 0$
$\rho(U_1)$	0	$(\beta_1, 2\beta_1, \beta_2, 2\beta_2, -\beta_2 - 2\beta_2), 3\beta_i = 0$
$\rho(U_2)$	0	$(\beta_1, 2\beta_1, \beta_2, 2\beta_2, 0, 0), 3\beta_i = 0$

Групи $H^1(G_i, R^6)$ *є елементарними абелевими групами типу* $(3, 3)$.

Теорема 2. *Нехай*

$V_0 = \langle a_0 = diag[\varepsilon, \varepsilon, \varepsilon],\ a_1 = diag[1, \varepsilon, \varepsilon^2],\ b \mid a_0a_1 = a_1a_0,\ a_0, b = ba_0,\ b^{-1}a_1b = a_0a_1\rangle;$

$V_1 = T_1^{-1}V_0T_1, \quad V_2 = T_2^{-1}V_0T_2, \quad V_i \subset GL(3, \mathbb{Z}[\varepsilon]),\ G_i = \rho(V_i),\ i = \overline{0, 2}.$

В кожному класі 1*-коциклів групи* G_i *із значеннями в групі* R^6 *існує відповідно єдиний коцикл* $\widehat{f}$ *такий, що виконуються співвідношення:*

Група	$\widehat{f}(a_0)$	$\widehat{f}(a_1)$	$\widehat{f}(b)$
$\rho(V_0)$	0	$(\alpha_1, 2\alpha_1, \alpha_2, 2\alpha_2, \alpha_3, 2\alpha_3), 3\alpha_i = 0$	0
$\rho(V_1)$	0	$(0, 0, \alpha, 2\alpha, -\alpha, -2\alpha), 3\alpha_i = 0$	$(\beta_1, 2\beta_1, 0, 0, \beta_3, 2\beta_3), 3\beta_i = 0$
$\rho(V_2)$	0	$(0, 0, 0, 0, \alpha, 2\alpha), 3\alpha_i = 0$	$(0, 0, \beta_2, 2\beta_2, \beta_3, 2\beta_3), 3\beta_i = 0$

Групи $H^1(G_i, R^6)$ *є елементарними абелевими* 3*-групами типу* $(3, 3, 3)$.

Теорема 3. *Нехай*

$W_0 = \langle a, a_1 | a_1^3 = a^9 = 1, a_1^{-1}aa_1 = a^4\rangle,\ W_1 = T_1^{-1}W_0T_1,\ W_2 = T_2^{-1}W_0T_2,$

$W_i \subset GL(3, \mathbb{Z}[\varepsilon]),\ i = 0, 1, 2, \quad G_i = \rho(W_i).$

В кожному класі 1*-коциклів групи* G_i *із значеннями в групі* R^6 *існує відповідно єдиний коцикл* $\widehat{f}$ *такий, що виконуються співвідношення:*

Група	$\widehat{f}(a)$	$\widehat{f}(a_1)$
$\rho(W_0)$	0	$(\alpha, 2\alpha, \alpha, 2\alpha, \alpha, 2\alpha), 3\alpha = 0$
$\rho(W_1)$	0	$(\alpha, 2\alpha, \alpha, 2\alpha, \alpha, 2\alpha), 3\alpha = 0$
$\rho(W_2)$	0	$(\alpha, 2\alpha, -\alpha, -2\alpha, 0, 0), 3\alpha = 0$

Групи $H^1(G_i, R^6)$ є циклічними групами порядку 3.

1. *Гудивок П. М., Рудько В. П., Бовді В. А.* Кристалографічні групи. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2006. – 173 с.
2. *Bovdi V. A., Rudko V. P.* Extensions of the representations modules of a prime order // Journal of Algebra . – 2006. – P. 441–451.
3. *Гудивок П. М., Кирилюк А. О., Кирилюк О. А.* Незвідні скінченні нільпотентні підгрупи групи $GL(pq, \mathbb{Z})$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14–15. – С. 33–40.
4. *Кирилюк А. О.* Перша група когомологій для незвідних 3-підгруп групи $GL(3, \mathbb{Z}[\varepsilon])$ // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2008. – Вип. 17. – С. 96–100.

Одержано 09.11.2009