УДК 517.925

І. І. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ІНТЕГРУВАННЯ ВИРОДЖЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З ВИРОДЖЕННЯМ В ІМПУЛЬСНИХ УМОВАХ

In this paper the general solution of the linear homogeneous degenerative systems of differential-algebraical equations with singular matrix in impulse action are built. The problem of existence of the solutions of the linear boundary value problem systems was solved.

У роботі побудовано загальний розв'язок лінійних вироджених диференціально- алгебраїчних рівнянь, які піддаються імпульсному впливу з виродженням. Розв'язано питання існування розв'язків лінійної крайової задачі для таких систем.

У роботі досліджено структуру розв'язку вироджених диференціально-алгебраїчних систем, які в фіксовані моменти часу піддаються імпульсній дії з виродженням, знайдено умови розв'язності задачі Коші, досліджено питання існування розв'язків лінійної крайової задачі.

Постановка задачі. Розглянемо питання існування розв'язків виродженої лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \neq \tau_i, \quad x, f \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

яка піддається імпульсному збуренню в фіксовані моменти часу τ_i, у випадку, коли таке збурення задається за допомогою виродженої матриці $B(t)$:

$$\Delta(Bx)|_{t=\tau_i} \equiv B(\tau_i+0)x(\tau_i+0) - B(\tau_i-0)x(\tau_i) = S_iB(\tau_i)x(\tau_i) + s_i. \tag{2}$$

де $rank(B(t)) = n - r = const\ \forall t \in [a,b]$, $r > 0$; вектор-функція $f(t)$ і $(n\times n)$-вимірні матриці $A(t)$, $B(t)$ є достатньо гладкими: $f(t), A(t), B(t) \in C^k[a,b]$, k — деяке натуральне число; $a < \tau_1 < \ldots < \tau_p < b,\ p < \infty$.

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти кусково неперервно диференційовну на $[a,b]\backslash\{\tau_i\}$, $i = \overline{1,p}$ функцію

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [a,\tau_1], \\ x_j(t), & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}], \quad j = \overline{1,p-1}, \\ x_p(t), & t \in (\tau_p, b], \end{cases}$$

з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$, яка задовольняє систему (1) та імпульсні умови (2). Будемо вважати функції $x_i(t)$ визначеними і неперервно-диференційовними на відповідних замкнених інтервалах:

$$x_i(t) \in C[\tau_i, \tau_{i+1}], \quad x_i(\tau_i) = x_i(\tau_i+0) = \lim_{t\to\tau_i+0} x_i(t),$$

і що розв'язок є неперервним зліва, тобто

$$x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) = x_{i-1}(\tau_i) = \lim_{t\to\tau_i-0} x_{i-1}(t).$$

У просторі неперервно-диференційовних n-вимірних вектор-функцій $C^1[a,b]$ розглянемо оператор L та спряжений до нього оператор $L^\top$:

$$L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}, \qquad L^\top(t) = A^\top(t)x(t) + \frac{d}{dt}\,B^\top(t).$$

Справедливе наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай*

1) $rank(B(t)) = n - r = const\ \forall t \in [a,b]$;

2) матриця $B(t)$ *має при всіх* $t \in [a,b]$ *повний жорданів набір [1] векторів* $\varphi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,s_i}$ *відносно оператора* $L(t)$, *який складається з* r *ланцюжків завдовжки* $s_1, \ldots, s_r$;

3) $A(t), B(t) \in C^{3q-2}([a,b], \mathbb{R}^{n\times n})$, $f(t) \in C^{q-1}([a,b], \mathbb{R}^n)$, *де* $\max\limits_i s_i = q$.

Тоді існують неособливі при всіх $t \in \mathbb{R}$ $(n\times n)$*-вимірні матриці* $P(t), Q(t) \in C^{q-1}([a,b], \mathbb{R}^n)$ *такі, що множенням на* $P(t)$ *та заміною*

$$x = Q(t)u \tag{3}$$

вироджена диференціально-алгебраїчна система рівнянь з імпульсною дією (1), (2) *зводиться до диференціально-алгебраїчної системи в центральній канонічній формі*

$$\begin{bmatrix} E_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & E_s \end{bmatrix} u + P(t)f(t), \tag{4}$$

яка піддається імпульсному впливу вигляду

$$\Delta\left(\begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} u\right)\Big|_{t=\tau_i} = P(\tau_i)S_iP^{-1}(\tau_i)\begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} u(\tau_i) + P(\tau_i)s_i. \tag{5}$$

де $\mathbb{E}_{n-s}$ — $(n–s)$-вимірна одинична матриця, I — s-вимірна нільпотентна матриця.

Доведення. Звідність системи (1) до центральної канонічної форми (4) показано в [1, 2], а формула (5) одержується з (2) безпосередньо заміною (3) з урахуванням того, що матриці $Q(t)$ і $P(t)$ є неперервними в точках імпульсів і

$$B(t) = P^{-1}(t) \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} Q^{-1}(t), \tag{6}$$

що завершує доведення.

Розв'язки відповідної (1), (2) однорідної імпульсної системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{7}$$

$$\Delta(Bx)|_{t=\tau_i} = S_iB(\tau_i)x(\tau_i). \tag{8}$$

будемо шукати у вигляді

$$x(t) = \begin{cases} Q(t)\begin{bmatrix} X(t) \\ 0 \end{bmatrix} c_0, & t \in [a, \tau_1], \\[2mm] Q(t)\begin{bmatrix} X(t) \\ 0 \end{bmatrix} c_j, & t \in (\tau_j, \tau_{j+1}], \quad j \in \overline{1, p-1}, \\[2mm] Q(t)\begin{bmatrix} X(t) \\ 0 \end{bmatrix} c_p, & t \in (\tau_p, b], \end{cases} \tag{9}$$

де $X(t)$ — $((n-s)\times(n-s))$-вимірна фундаментальна матриця системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{du_1}{dt} = M(t)u_1, \quad u_1 \in \mathbb{R}^{n-s}, \tag{10}$$

$X(t,\sigma), X(\sigma,\sigma) = \mathbb{E}_{n-s}$ – матрицант системи (10), $c_0, c_i \in \mathbb{R}^{n-s}$, $i=\overline{1,p}$ – довільні сталі вектори. Імпульсні умови (8) у точці $t=\tau_i$ можемо записати у вигляді

$$B(\tau_i)Q(\tau_i)\begin{bmatrix} X(\tau_i) \\ 0 \end{bmatrix} c_i = (\mathbb{E}_n + S_i)B(\tau_i)Q(\tau_i)\begin{bmatrix} X(\tau_i) \\ 0 \end{bmatrix} c_{i-1}.$$

Беручи до уваги (6) і множачи зліва на $P(\tau_i)$, одержимо:

$$\begin{bmatrix} X(\tau_i)c_i \\ 0 \end{bmatrix} = P(\tau_i)(\mathbb{E}_n + S_i)P^{-1}(\tau_i)\begin{bmatrix} X(\tau_i)c_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Позначаючи

$$P(\tau_i)S_iP^{-1}(\tau_i) = \begin{bmatrix} S_{i,1} & S_{i,2} \\ S_{i,3} & S_{i,4} \end{bmatrix},$$

де $S_{i1}, S_{i2}, S_{i3}, S_{i4}$ при всіх $i=\overline{1,p}$ є відповідно $((n-s)\times(n-s))$-, $((n-s)\times s)$-, $(s\times(n-s))$- та $(s\times s)$-вимірними блоками, бачимо, що лінійна алгебраїчна відносно c_i система (11) є сумісною тоді і тільки тоді, коли S_{i3} є нуль-матрицею. Таким чином, без обмеження загальності можемо прийняти, що матриці S_i задовольняють умову

$$P(\tau_i)S_iP^{-1}(\tau_i) = \begin{bmatrix} S_{i,1} & S_{i,2} \\ 0 & S_{i,4} \end{bmatrix}.$$

Якщо, крім того,

$$det(\mathbb{E}_{n-s} + S_{i,1}) \neq 0, \quad \forall i = \overline{1,p}, \tag{12}$$

то система (11) має єдиний розв'язок:

$$c_i = X^{-1}(\tau_i)(\mathbb{E}_n + S_{i,1})X(\tau_i)c_{i-1}.$$

Підставляючи його у (9), одержимо значення розв'язку $x(t)$ на кожному з інтервалів $(\tau_i, \tau_{i+1}]$:

$$x(t) = \widetilde{X}_{n-s}(t)c_0, \tag{13}$$

де $\widetilde{X}_{n-s}(t)$ – $(n\times(n-s))$-вимірна матриця, стовпцями якої є лінійно незалежні розв'язки системи (7), (8):

$$\widetilde{X}_{n-s}(t) = Q(t)\begin{bmatrix} \widetilde{\Omega}_x(t) \\ 0 \end{bmatrix},$$

де

$$\widetilde{\Omega}_x(t) = \begin{cases} X(t), \quad \text{при} \quad t\in[a,\tau_1], \\ X(t,\tau_1)(\mathbb{E}_{n-s}+S_{1,1})X(\tau_1), \quad \text{при} \quad t\in(\tau_1,\tau_2], \\ X(t,\tau_i)\left(\prod\limits_{\nu=i}^{2}(\mathbb{E}_{n-s}+S_{\nu,1})X(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})\right)(\mathbb{E}_{n-s}+S_{1,1})X(\tau_1), \\ \quad \text{при} \quad t\in(\tau_i,\tau_{i+1}], \ i\geq 2, \end{cases}$$

є [3] $((n-s)\times(n-s))$-вимірною фундаментальною матрицею невиродженої лінійної однорідної імпульсної системи

$$\frac{d\widetilde{u}_1}{dt} = M(t)\widetilde{u}_1, \quad t \neq \tau_i, \quad \Delta\widetilde{u}_1|_{t=\tau_i} = S_{i,1}\widetilde{u}_1(\tau_i). \tag{14}$$

При цьому

$$\widetilde{X}_{n-s}(t,\sigma) = Q(t)\begin{bmatrix} \widetilde{\Omega}_x(t,\sigma) \\ 0 \end{bmatrix},$$

де матрицант $\widetilde{\Omega}_x(t,\sigma) = \widetilde{\Omega}_x(t)\widetilde{\Omega}_x^{-1}(\sigma)$, $\tau_{j-1} < \sigma \leq \tau_j < \cdots < \tau_i < t \leq \tau_{i+1}$, $\widetilde{\Omega}_x(\sigma,\sigma) = \mathbb{E}_{n-s}$ системи (14) має вигляд

$$\widetilde{\Omega}_x(t,\sigma)=X(t,\tau_i)\left(\prod_{\nu=i}^{j+1}(\mathbb{E}_{n-s}+S_{\nu,1})X(\tau_\nu,\tau_{\nu-1})\right)(\mathbb{E}_{n-s}+S_{j,1})X(\tau_j,\sigma).$$

Спряжені системи. Розглянемо вироджену диференціально-алгебраїчну систему з імпульсною дією

$$\frac{d}{dt}\Big(B^\top(t)y(t)\Big) = -A^\top(t)y(t), \quad t \neq \tau_i, \tag{15}$$

$$\Delta y|_{t=\tau_i} = -(\mathbb{E}_n + S_i^\top)^{-1}S_i^\top y(\tau_i), \tag{16}$$

яку будемо називати спряженою до системи (7), (8). Її розв'язок будемо шукати у вигляді

$$y(t) = y_i(t) = P^\top(t)\begin{bmatrix} Y(t) \\ 0 \end{bmatrix} d_i, \quad t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \quad d_i \in \mathbb{R}^{n-s}, \tag{17}$$

де через $Y(t,\sigma)$ позначимо матрицант системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dv_1}{dt} = -M^\top(t)v_1, \quad v_1 \in \mathbb{R}^{n-s}, \tag{18}$$

де $d_0 \in \mathbb{R}^{n-s}$ – довільна стала. Якщо

$$det\,(\mathbb{E}_s+S_{i,4}) \neq 0, \quad \forall i = \overline{1,p}, \tag{19}$$

то підставляючи (17) у (16) і, беручи до уваги, що

$$(P^\top(\tau_i))^{-1}(\mathbb{E}_n + S_i^\top)^{-1}(P^\top(\tau_i)) = \left(\Big(P(\tau_i)(\mathbb{E}_n + S_i)P^{-1}(\tau_i)\Big)^\top\right)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} + S_{i,1}^\top & 0 \\ S_{i,2}^\top & \mathbb{E}_s + S_{i,4}^\top \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} + S_{i,1}^\top & 0 \\ S_{i,2}^\top & \mathbb{E}_s + S_{i,4}^\top \end{bmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\mathbb{E}_{n-s} + S_{i,1}^\top\right)^{-1} & 0 \\ -\left(\mathbb{E}_s + S_{i,4}^\top\right)^{-1} S_{i,2}^\top \left(\mathbb{E}_{n-s} + S_{i,1}^\top\right)^{-1} & \left(\mathbb{E}_s + S_{i,4}^\top\right)^{-1} \end{bmatrix},$$

одержимо наступну алгебраїчну систему для знаходження d_i:

$$\begin{bmatrix} Y(\tau_i) \\ 0 \end{bmatrix} d_i = \begin{bmatrix} \left(\mathbb{E}_{n-s} + S_{i,1}^\top\right)^{-1} Y(\tau_i) \\ -\left(\mathbb{E}_s + S_{i,4}^\top\right)^{-1} S_{i,2}^\top \left(\mathbb{E}_{n-s} + S_{i,1}^\top\right)^{-1} Y(\tau_i) \end{bmatrix} d_{i-1}.$$

З (12), (19) випливає, що вона сумісна тоді і тільки тоді, коли $S_{i,2}$ є нульовою матрицею, а її розв'язок при цьому має вигляд

$$d_i = Y^{-1}(\tau_i)\left(\mathbb{E}_{n-s} + S_{i,1}^{\top}\right)^{-1} Y(\tau_i) d_{i-1},$$

тобто

$$d_i = Y^{-1}(\tau_i)\left(\prod_{\nu=i}^{1}\left(\mathbb{E}_{n-s} + S_{\nu,1}^{\top}\right)^{-1} Y(\tau_\nu, \tau_{\nu-1})\right) Y(\tau_0) d_0. \tag{20}$$

Підставляючи (20) в (15), отримаємо розв'язок

$$y(t) = \widetilde{Y}_{n-s}(t) d_0, \tag{21}$$

системи (15), (16), де

$$\widetilde{Y}_{n-s}(t) = P^{\top}(t)\begin{bmatrix} \widetilde{\Omega}_y(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

є $(n\times(n-s))$-вимірною матрицею, стовпці якої є лінійно незалежними розв'язками спряженої системи (15), (16), а $\widetilde{\Omega}_y(t)$ є матрицантом невиродженої імпульсної диференціальної системи, спряженої до (14):

$$\widetilde{\Omega}_y(t) = \begin{cases} Y(t), \quad \text{при} \quad t \in [a, \tau_1], \\ Y(t,\tau_1)(\mathbb{E}_{n-s}+S_{1,1}^{\top})^{-1}Y(\tau_1), \quad \text{при} \quad t \in (\tau_1, \tau_2], \\ Y(t,\tau_i)\left(\prod\limits_{\nu=i}^{2}(\mathbb{E}_{n-s}+S_{\nu,1}^{\top})^{-1}Y(\tau_\nu, \tau_{\nu-1})\right)(\mathbb{E}_{n-s}+S_{1,1}^{\top})^{-1}Y(\tau_1), \\ \quad \text{при} \quad t\in(\tau_i, \tau_{i+1}],\ i\geq 2, \end{cases}$$

З вищенаведеного випливає, що без обмеження загальності можемо прийняти, що матриці S_i мають наступну структуру:

$$S_i = P^{-1}(\tau_i)\begin{bmatrix} S_{i,1} & 0 \\ 0 & S_{i,4} \end{bmatrix} P(\tau_i), \quad det(\mathbb{E}_n + S_i) \neq 0. \tag{22}$$

а тому надалі будемо вважати, що матриці S_i мають вигляд (22).

Залежність між розв'язками системи (7), (8) та розв'язками спряженої до неї системи (15), (16) встановлює наступна лема.

Лема 1. *Нехай виконуються умови теореми 1 і матриці S_i мають вигляд* (22). *Тоді*

1) *для будь-яких розв'язків $x(t)$ системи* (7), (8) *і розв'язків $y(t)$ системи* (15), (16) *виконується рівність*

$$\langle B(t)x(t), y(t)\rangle = const \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

2) *фундаментальні матриці $\widetilde{X}_{n-s}(t)$ і $\widetilde{Y}_{n-s}(t)$ відповідних вироджених систем* (7), (8) *і* (15), (16), *задовольняють співвідношення*

$$\widetilde{Y}_{n-s}^{\top}(t)B(t)\widetilde{X}_{n-s}(t) = C,$$

де C — невироджена квадратна $(n-s)$-вимірна стала матриця, причому якщо фундаментальні матриці $X(t)$ і $Y(t)$ взаємно спряжених систем звичайних диференціальних рівнянь (10) *і* (18) *вибрати так, щоб $Y^{\top}(t_0)X(t_0) = \mathbb{E}_{n-s}$, при деякому $t = t_0 \in [a, b]$, тоді $\widetilde{Y}_{n-s}^{\top}(t)B(t)\widetilde{X}_{n-s}(t) = \mathbb{E}_{n-s}$.*

Доведення. Для розв'язків $x(t)$ і $y(t)$ вигляду відповідно (13) і (21) маємо:

$$\Delta\langle B(t)x(t), y(t)\rangle|_{t=\tau_i} =$$

$$= \langle B(\tau_i)x(\tau_i+0), y(\tau_i+0)\rangle - \langle B(\tau_i)x(\tau_i), y(\tau_i)\rangle =$$

$$= \langle(\mathbb{E}_n+S_i)B(\tau_i)x(\tau_i), (\mathbb{E}_n+S_i^\top)^{-1}y(\tau_i)\rangle - \langle B(\tau_i)x(\tau_i), y(\tau_i)\rangle =$$

$$= \langle B(\tau_i)x(\tau_i), (\mathbb{E}_n+S_i^\top)(\mathbb{E}_n+S_i^\top)^{-1}y(\tau_i)\rangle - \langle B(\tau_i)x(\tau_i), y(\tau_i)\rangle = 0.$$

Далі проведення проводиться аналогічно до доведення леми 2 [4].

Структура загального розв'язку неоднорідних систем. З'ясуємо вигляд загального розв'язку лінійної неоднорідної імпульсної системи (1), (2). Згідно [1, 2], розв'язок системи (1) на інтервалі $t \in [a, \tau_1]$ має вигляд

$$x(t) = x_0(t) = X_{n-s}(t)c_0 + \int_a^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^\top(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \Phi(t)r(t), \tag{23}$$

де

$$r(t) = \sum_{k=0}^{m-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\Big(\big(\Psi^\top(t)L(t)\Phi(t)\big)^{-1}\Psi^\top(t)f(t)\Big),$$
$$\Phi(t) = [\varphi_1^{(1)}(t), \dots, \varphi_1^{(s_1)}(t), \dots, \varphi_r^{(1)}(t), \dots, \varphi_r^{(s_r)}(t)],$$
$$\Xi(t) = [\psi_1^{(s_1)}(t), \dots, \psi_1^{(1)}(t), \dots, \psi_r^{(s_r)}(t), \dots, \psi_r^{(1)}(t)],$$

вектори $\psi_i^{(j)}(t) \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,s_i}$ утворюють повний жорданів набір з r жорданових ланцюжків завдовжки s_i матриці $B^\top(t)$ відносно оператора $L^\top(t)$.

Продовжимо розв'язок $x_0(t)$ вигляду (23) з інтервалу $t \in [a, \tau_i]$ на розв'язок $x_1(t)$ вигляду

$$x_1(t) = X_{n-s}(t)c_1 + \int_{\tau_1}^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^\top(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \Phi(t)r(t), \tag{24}$$

який визначений на інтервалі $t \in (\tau_1, \tau_2]$. Для знаходження зв'язку між c_0 і c_1 підставимо (23), (24) в (2) при $i = 1$:

$$B(\tau_1)x_1(\tau_1+0) = (\mathbb{E}_n + S_1)B(\tau_1)x_0(\tau_1) + s_1,$$

Беручи до уваги (6) перепишемо цю рівність наступним чином:

$$P^{-1}(\tau_1)\begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(\tau_1)c_1 \\ -Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix} =$$

$$= (\mathbb{E}_n + S_1)P^{-1}(\tau_1)\begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X(\tau_1)c_0 + \int_a^{\tau_1} X(\tau_1,\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma \\ -Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix} + s_1.$$

Множачи зліва на $P(\tau_1)$ і беручи до уваги (22), одержимо:

$$\begin{bmatrix} X(\tau_1)c_1 \\ -IQ_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s}+S_{1,1} & 0 \\ 0 & \mathbb{E}_s+S_{1,4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(\tau_1)c_0+\int\limits_a^{\tau_1} X(\tau_1,\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma \\ -IQ_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix} + P(\tau_1)s_1.$$

Остання рівність сумісна тоді і тільки тоді, коли

$$s_1 = P^{-1}(\tau_1) \begin{bmatrix} p_1 \\ S_{1,4}IQ_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix},$$

де $p_1 \in \mathbb{R}^{n-s}$ – сталий вектор. При цьому розв'язком є

$$c_1 = X^{-1}(\tau_i)(\mathbb{E}_{n-s}+S_{1,1})X(\tau_i)\left\{c_0+\int\limits_a^{\tau_1} X^{-1}(\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma\right\}+X^{-1}(\tau_1)p_1.$$

Підставляючи його в (24), одержимо:

$$x_1(t)=Q(t)\begin{bmatrix} \widetilde{\Omega}_x(t)c_0+\int\limits_a^{\tau_1}\widetilde{\Omega}_x(t,\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma+\int\limits_{\tau_1}^{t}\widetilde{\Omega}_x(t,\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma+\widetilde{\Omega}_x(t,\tau_1+0)p_1 \\ -Q_{22}^{-1}(\tau_1)r(\tau_1) \end{bmatrix},$$

тобто

$$x_1(t)=X_{n-s}(t,a)c_0+\int\limits_a^t X_{n-s}(t,\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma + X_{n-s}(t,\tau_1+0)p_1-\Theta(t)r(t).$$

Аналогічно продовжуючи розв'язок далі, можемо переконатися, що справедливим є наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці* S_i *і вектори* s_i *мають вигляд відповідно* (22) *і* (25)*:*

$$s_i = P^{-1}(\tau_i) \begin{bmatrix} p_i \\ S_{i,4}IQ_{22}^{-1}(\tau_i)r(\tau_i) \end{bmatrix}, \tag{25}$$

де $p_i \in \mathbb{R}^{n-s}$ *– сталі вектори.*

Тоді розв'язок виродженої диференціальної системи (1) *з імпульсною дією* (2) *визначається за формулою*

$$x(t)=\widetilde{X}_{n-s}(t,a)c_0+\int\limits_a^t \widetilde{X}_{n-s}(t,\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma+\sum_{a<\tau_i<t}\widetilde{X}_{n-s}(t,\tau_i+0)p_i-\Theta(t)r(t). \tag{26}$$

Зауваження 1. *Розв'язок системи* (1), (2) *можна також представити у наступному вигляді:*

$$x(t) = \widetilde{X}_{n-s}(t,a)c_0 + \int_a^t \widetilde{X}_{n-s}(t)\widetilde{Y}_{n-s}^{\top}(\sigma)f(\sigma)d\sigma +$$

$$+ \sum_{a<\tau_i<t} \widetilde{X}_{n-s}(t,a)\widetilde{\Omega}_x^{-1}(\tau_i+0,a)p_i - \Theta(t)r(t).$$

Стосовно існування розв'язку виродженої імпульсної системи (1), (2), які задовольняють початкову умову

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in [a,b], \tag{27}$$

має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці S_i і вектори s_i мають вигляд відповідно* (22) *і* (25)*. Тоді для того, щоб задача Коші* (1), (2), (27)*, мала розв'язок, необхідно і достатньо, щоб вектор x_0 задовольняв умову*

$$\sum_{i=0}^{k-1} \frac{d^i}{dt^i}\langle A(t_0)x_0 + f(t_0), \psi_j^{k-i}(t_0)\rangle = 0; \quad j = \overline{1,r}, \quad k = \overline{1,s_j}.$$

При цьому розв'язок задачі Коші (1), (2), (27) *единий і має наступний вигляд*

$$x(t) = \widetilde{X}_{n-s}(t,t_0)\left[\mathbb{E}_{n-s}, 0\right] Q^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t \widetilde{X}_{n-s}(t,\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma +$$

$$+ \sum_{t_0<\tau_i<t} \widetilde{X}_{n-s}(t,\tau_i+0)p_i - \Theta(t)r(t).$$

Доведення проводиться аналогічно до доведення теореми 3 [4].

Лінійні нетерові крайові задачі. Розглянемо питання існування розв'язку вироджених імпульсних лінійних систем диференціальних рівнянь (1), (2), які задовольняють крайові умови

$$\ell x(\cdot) = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}^m, \tag{28}$$

де ℓ – лінійний m-вимірний вектор-функціонал над простором неперервних на $[a,b]$ вектор-функцій: $\ell : C([a,b],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ – сталий вектор. Припускаємо, що система (1), (2) задовольняє умови теореми 1, а матриці S_i і вектори s_i мають вигляд відповідно (22) і (25).

Якщо, згідно теореми Ф. Рісса [5], записати крайові умови (28) за допомогою інтеграла Рімана-Стілтєса у вигляді

$$\int_a^b \left[dC(t)\right]x(t) = \alpha,$$

де $C(t)$ — $(m \times n)$-вимірна матрично-значна функція обмеженої варіації, і підставити в них загальний розв'язок (26) виродженої імпульсної системи (1), (2), то одержимо алгебраїчну систему:

$$\widetilde{F}c_0 = \alpha - \int_a^b Z_{n-s}(\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma - \sum_{i=1}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)p_i + z_\Theta, \tag{29}$$

де $\widetilde{F}$ і $Z_{n-s}(t)$ є $(m \times (n-s))$-вимірними матрицями, z_Θ — m-вимірний вектор:

$$\widetilde{F} = \ell\widetilde{X}_{n-s}(\cdot, a) = \int_a^b [dC(t)]\widetilde{X}_{n-s}(t,a),$$

$$Z_{n-s}(s) = \int_s^b [dC(t)]X_{n-s}(t,s), \quad z_\Theta = \int_s^b [dC(t)]\Theta(t)r(t).$$

Для розв'язності системи (29) необхідно і досить [6], щоб виконувалася умова

$$P_{\widetilde{F}^\top_{k^*}} \left(\alpha - \int_a^b Z_{n-s}(\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma - \sum_{i=1}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)p_i + z_\Theta \right) = 0, \tag{30}$$

де $P_{\widetilde{F}^\top_{k^*}}$ — $(k^* \times m)$-вимірна матриця, рядки якої є лінійно незалежними рядками ортопроектора $P_{\widetilde{F}^\top}$, $k^* = m - rank(\widetilde{F})$, а її розв'язок має при цьому вигляд

$$c_0 = P_{\widetilde{F}_k}\xi + \widetilde{F}^+ \left(\alpha - \int_a^b Z_{n-s}(\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma - \sum_{i=1}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)p_i + z_\Theta \right),$$

де $\xi \in \mathbb{R}^k$ – вектор довільних сталих, $k = n - s - rank(\widetilde{F})$. При цьому розв'язок крайової задачі (1), (2), (28) має вигляд

$$\begin{gathered} x(t,\xi) = \widetilde{X}_{n-s}(t,a)P_{\widetilde{F}_k}\xi + \\ +\widetilde{X}_{n-s}(t,a)\widetilde{F}^+\left(\alpha - \int_a^b Z_{n-s}(\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma - \sum_{i=1}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)p_i + z_\Theta\right) + \\ + \int_a^t \widetilde{X}_{n-s}(t,\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma + \sum_{a<\tau_i<t} \widetilde{X}_{n-s}(t,\tau_i+0)p_i - \Theta(t)r(t). \end{gathered} \tag{31}$$

Отже справедливе наступне твердження щодо розв'язності задачі (1), (2), (28).

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці S_i і вектори s_i мають вигляд відповідно* (22) *і* (25)*. Тоді крайова задача* (1), (2), (28) *має розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (30)*. При цьому задача* (1), (2), (28) *має k-параметричну сім'ю розв'язків вигляду* (31)*.*

Покажемо, що в задачі (1), (2), (28) ми можемо задавати керуючі параметри $\alpha = \widetilde{\alpha}$, $f(t) = \widetilde{f}(t)$, $s_i = \widetilde{s}_i$ так, щоб нерозв'язна крайова задача з виродженою матрицею в імпульсних умовах (1), (2), (28) перетворювалася на розв'язну крайову задачу. З теореми 4 випливають наступні твердження.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови теореми 1, а матриці S_i мають вигляд* (22).

Тоді при довільних неоднорідностях $f(t)\in C^{q-1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ і $s_i\in\mathbb{R}^n$ вигляду (25) *завжди існує значення*

$$\alpha=\widetilde{\alpha}=P_{\widetilde{H}_{k_\alpha}}\xi_{k_\alpha}+\widetilde{H}^{+}\widetilde{H}\left(\int\limits_a^b Z_{n-s}(\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma+\sum_{i=1}^{p}Z_{n-s}(\tau_i+0)p_i-z_\Theta\right)$$

таке, що крайова задача (1), (2), (28) *має розв'язки. Тут*

$$\widetilde{H}=P_{\widetilde{F}^{\top}_{k^*}} \tag{32}$$

є $(k^*\times m)$-вимірною матрицею, рядки якої є лінійно незалежними рядками ортопроектора $P_{\widetilde{H}^{\top}}$ матриці $\widetilde{H}^{\top}$, $P_{\widetilde{H}_{k_\alpha}}$ — $(m\times k_\alpha)$-вимірна матриця, стовпцями якої є лінійно незалежні стовпці ортопроектора $P_{\widetilde{H}}$ матриці $\widetilde{H}$, $\widetilde{H}^{+}$ — єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом [6] до $\widetilde{H}$ матриця, $k_\alpha=m-rank(\widetilde{H})$, $\xi\in\mathbb{R}^{k_\alpha}$ — довільний вектор.

Наслідок. *Якщо виконуються умови теореми 1, матриці S_i мають вигляд* (22), *$m=n-s$ і $\widetilde{F}$ є нуль-матрицею, то для довільних $f(t)\in C^{q-1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ і $s_i\in\mathbb{R}^n$ вигляду* (25) *завжди існує єдине значення $\alpha=\widetilde{\alpha}$, при якому крайова задача* (1), (2), (28) *має розв'язки:*

$$\alpha=\widetilde{\alpha}=\int\limits_a^b Z_{n-s}(\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma+\sum_{i=1}^{p}Z_{n-s}(\tau_i+0)p_i-z_\Theta.$$

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці S_i і вектори s_i мають вигляд відповідно* (22) *і* (25), *і для деякого цілого μ, $1\le\mu\le p$ виконується умова*

$$P_{\widetilde{M}^{\top}_{k^*_\mu}}\widetilde{H}\left(\alpha-\int\limits_a^b Z_{n-s}(\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma-\sum_{i=1,i\ne\mu}^{p}Z_{n-s}(\tau_i+0)p_i+z_\Theta\right)=0,$$

де $\widetilde{M}=\widetilde{H}\,Z_{n-s}(\tau_\mu+0)$ — $(k^*\times(n-s))$-вимірна матриця, $P_{\widetilde{M}^{\top}_{k^*_\mu}}$ — $(k^*_\mu\times k^*)$-вимірна матриця, рядками якої є лінійно незалежні рядки ортопроектора $P_{\widetilde{M}^{\top}}$, $k^*_\mu=k^*-rank(\widetilde{M})$.

Тоді неоднорідність $a_\mu=\widetilde{a}_\mu$ завжди можна вибрати так, щоб крайова задача (1), (2), (28) *мала розв'язки, а саме*

$$\widetilde{a}_\mu=Q(\tau_i)\begin{bmatrix}P_{\widetilde{M}_{k_\mu}}\xi_{k_\mu}+\widetilde{M}^{+}\widetilde{H}\left(\alpha-\int\limits_a^b Z_{n-s}(\sigma)g^{(1)}(\sigma)d\sigma-\sum\limits_{i=1,i\ne\mu}^{p}Z_{n-s}(\tau_i+0)p_i+z_\Theta\right)\\ S_{i,4}Q_{22}^{-1}(\tau_i)r(\tau_i)\end{bmatrix}, \tag{33}$$

де $P_{\widetilde{M}_{k_\mu}}$ — $((n-s)\times k_\mu)$-вимірна матриця, стовпцями якої є лінійно незалежні стовпці ортопроектора $P_{\widetilde{M}}$, $k_\mu=n-s-rank(\widetilde{M})$, $\widetilde{M}^{+}$ — єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до $\widetilde{M}$ матриця, $\xi_{k_\mu}\in\mathbb{R}^{k_\mu}$ — довільний вектор.

Наслідок. *Нехай виконуються умови теореми 1, матриці* S_i *і вектори* s_i *мають вигляд відповідно* (22) *і* (25), $rank(\widetilde{H}) = k^*$ *і для деякого цілого* μ, $1 \le \mu \le p$ *виконується умова* $rank(Z_{n-s}(\tau_\mu+0)) = m$. *Тоді в точці імпульсного збурення* $t=\tau_\mu$ *завжди можна вказати значення керуючого параметра* $a_\mu = \widetilde{a}_\mu$ *таке (а саме* (33)*), щоб крайова задача* (1), (2), (28) *мала розв'язок.*

Наступна теорема показує, що якщо крайова задача (1), (2), (28) не має розв'язків, то завжди можна подіяти деякою зовнішньою силою на систему (1) так, щоб відповідна крайова задача (34), (2), (28) мала розв'язок,

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t) + \widetilde{H}(t), \quad t \ne \tau_i. \tag{34}$$

Теорема 7. *Нехай виконуються умови теореми 1, а матриці* S_i *мають вигляд* (22).

Тоді при довільних значеннях $\alpha \in \mathbb{R}^m$, $f(t) \in C^{q-1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *та* $s_i \in \mathbb{R}^n$ *вигляду* (25) *існує функція* $\widetilde{H}(t) \in C^{q-1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ *така, що крайова задача* (34), (2), (28) *має розв'язки.*

Доведення. Полягає в перевірці виконання умови

$$\widetilde{H}\left(\alpha - \int_a^b Z_{n-s}(\sigma)\big(g^{(1)}(\sigma) + \widetilde{h}^{(1)}(\sigma)\big)d\sigma - \sum_{i=1}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)p_i + z_\Theta\right) = 0,$$

де $h^{(2)}(t) \in C^{q-1}([a,b],\mathbb{R}^{n-s})$ — довільна функція,

$$\widetilde{h}^{(1)}(t) = Z^{\top}_{n-s}(t)\widetilde{H}^{\top}\widetilde{R}_1^{-1}\widetilde{H}\widetilde{d},$$

$$\widetilde{d} = \widetilde{H}\left(\alpha - \int_a^b Z_{n-s}(\sigma)\widetilde{g}^{(1)}(\sigma)d\sigma - \sum_{i=1, i\ne\mu}^{p} Z_{n-s}(\tau_i+0)s_i + z_\Theta\right),$$

$\widetilde{H}$ – $(k^* \times m)$-вимірна матриця вигляду (32),

$$\widetilde{R}_1 = \widetilde{H}\int_a^b Z_{n-s}(\sigma)Z^{\top}_{n-s}(\sigma)d\sigma\widetilde{H}^{\top}.$$

Тоді за функцію $\widetilde{H}(t)$ можемо взяти наступну: $\widetilde{H}(t) = P^{-1}(t)\begin{bmatrix} \widetilde{h}^{(1)}(t) \\ h^{(2)}(t) \end{bmatrix}$, що завершує доведення теореми.

1. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. — К.: Вища школа., 2000. — 294 с.
2. *Самойленко А.М., Яковец В.П.* О приводимости вырожденной линейной системы к центральной канонической форме // Доп. НАН України. – 1993.– №4. – С. 10–15.
3. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. — К.: Вища школа, 1987. — 288 с.
4. *Король І.І.* Дослідження розв'язків вироджених диференціальних систем з імпульсною дією/ І.І. Король // Наук. вісник Ужгородського університету, Сер. Матем. - Ужгород: УжНУ, 2009. – Вип.18. – С. 73 – 84.
5. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа: Учеб. пос. – М.: Высш. школа, 1982. – 271 с.
6. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. — К. Ін-т матем. НАН України, 1995. — 318 с.

Одержано 02.10.2009