УДК 517.946

В. В. Маринець, А. В. Добридень (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ОДИН КОНСТРУКТИВНИЙ МЕТОД ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ У ВИПАДКУ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

The boundary value problem for system quazilinear differential equations has been researched by the help of monotonous two-sided method. The theorem of existence and uniqueness of solution and the theorem of the differential inequality have been prooved for this problem. The condition of affiliation solution of the problem to space $C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$ has been obtained.

За допомогою монотонного двостороннього методу досліджено крайову задачу для системи квазілінійних диференціальних рівнянь, доведено теореми існування та єдиності розв'язку, про диференціальну нерівність, отримано умову належності розв'язку поставленої задачі простору $C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$.

Одним із конструктивних методів дослідження та наближеного інтегрування задач теорії диференціальних рівнянь є двосторонній метод, який дає можливість на кожному кроці ітераційного процесу шуканий розв'язок охопити у „вилку“ і тим самим одержати зручну апостеріорну оцінку похибки послідовних наближень.

Хоча вперше ідея двостороннього методу була висловлена академіком С.О. Чаплигіним біля 100 років тому і опублікована в його першій статті з цієї проблеми „Основания нового способа приближенного интегрирования дифференциальных уравнений“ [1], інтерес до даного методу не згасає і в даний час, свідченням чого є багаточисельні наукові публікації з даної тематики (праці Макарова В.Л., Букжальова Е.Е., С.Г. Гристова, С. Лейла, В. Лакшмікантам, Т.Янковського, Рагмат Алі Хана та інших). В даній статті побудовано модифікацію двостороннього методу для дослідження однієї крайової задачі теорії ДРЧП гіперболічного типу, а саме [2]:

в просторі функцій $C^*(\overline{D}) = C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$, $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 = \{(x,y) | x \in \in [x_1, x_0], y \in (g_1(x), y_1)\}$, $D_2 = \{(x,y) | x \in [x_0, x_2], y \in (g_2(x), y_1)\}$, $x_1 < x_0 < x_2$, $y_0 < y_1$, $y = g_r(x)$, $r = 1,2$ – задані „вільні“ криві, причому $g_1'(x) < 0$, $x \in [x_1, x_0]$, $g_2'(x) > 0$, $x \in [x_0, x_2]$, $g_1(x_0) = g_2(x_0) = y_0$, $g_r(x_r) = y_1$, $r = 1,2$, знайти розв'язок системи ДРЧП

$$U_{xy}(x,y) + A_1(x,y)U_x(x,y) + A_2(x,y)U_y(x,y) = f(x,y,U(x,y)) \equiv F[U(x,y)], \quad (1)$$

який задовольняє на „вільних“ кривих $y = g_r(x)$ умови

$$U(x, g_r(x)) = \begin{cases} \Phi_1(x), x \in [x_1, x_0], r = 1, \\ \Phi_2(x), x \in [x_0, x_2], r = 2, \end{cases} \qquad (2)$$
$$U_y(x, g_1(x)) = \Psi(x), x \in [x_1, x_0]$$

і

$$\Phi_1(x_0) = \Phi_2(x_0), \quad (3)$$

де $U(x,y) = (u_i(x,y))$, $f[U(x,y)] = (f_i[U(x,y)])$, $\Phi_r(x) = (\varphi_{ri}(x))$, $\Psi(x) = (\psi_i(x))$, $i = \overline{1,n}$ — вектор-функції, причому задані функції $\varphi_{1i}(x) \in C^1[x_1, x_0]$, $\varphi_{2i}(x) \in$

$C^1[x_0, x_2]$, $\psi_i(x) \in C[x_1, x_0]$, а $A_s(x,y) = (\delta_{i,j} a_{i,j}^{(s)}(x,y))$, $s = 1,2$ — відомі матриці, $\delta_{i,j}$ — символ Кронеккера, $i, j = \overline{1,n}$.

Позначимо через $Z_1(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_1$ – розв'язок задачі Коші (1), (2), через $Z_2(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_2$ – розв'язок задачі Дарбу (1),(2) і $Z_2(x_0,y) = Z_1(x_0,y)$, $y \in [y_0, y_1]$. Тоді, очевидно, розв'язок задачі (1)–(3) $U(x,y) = Z_i(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_i$, $i = 1,2$.

Надалі будемо вважати, що $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$ і

$$A_{1,x}(x,y) = A_{2,y}(x,y), (x,y) \in D, \tag{4}$$

а $f(x,y,U(x,y)) \in C(\overline{B})$, $f : \overline{B} \to R^n$, $\overline{B} \subset R^{n+2}$.

Справедлива наступна

Лема 1. *Якщо розв'язок задачі Коші-Дарбу* (1)–(3) *в області* $\overline{D}$ *існує, то для того, щоб він належав просторові* $C^*(\overline{D})$, *необхідно і досить виконання умови*

$$\Phi_2'(x_0) - \Phi_1'(x_0) + (g_1'(x_0) - g_2'(x_0))\Psi(x_0) \equiv Q(x_0) = 0. \tag{5}$$

У супротивному випадку має місце рівність

$$Z_{2x}(x_0,y) - Z_{1x}(x_0,y) = A_3(x_0,y_0;y)Q(x_0), y \in [y_0,y_1], \tag{6}$$

де $A_3(x_0,y_0;y) = \left(\delta_{i,j} \exp\left(\int\limits_y^{y_0} a_{i,j}^1(x_0,\tau)d\tau\right)\right)$.

Домноживши рівняння (1) при $(x,y) \in \overline{D}_2$ на матрицю $G(x,y;x_0)$, легко показати, що задачу Коші-Дарбу (1)–(2) в області $\overline{D}$ можна звести до системи еквівалентних інтегральних рівнянь вигляду [3]

$$\begin{gathered}
Z_1(x,y) = \Omega_1(x,y) + \int\limits_{g_1(x)}^{y} \int\limits_{k_1(\eta)}^{x} G_1(x,y;\xi,\eta)F[Z_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta, (x,y) \in \overline{D}_1, \\
Z_2(x,y) = \Omega_2(x,y) + A_3(x,g_2(x);y) \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{g_2(x)}^{y} G(\xi,\eta;x)F[Z_2(\xi,\eta)]d\eta d\xi, \\
(x,y) \in \overline{D}_2,
\end{gathered} \tag{7}$$

де $x = k_r(y)$, $r = 1,2$ — обернені функції до $y = g_r(x)$, $F[Z_r(x,y)] = (f_i[Z_r(x,y)] + [a_{i,ix}^{(1)}(x,y) + a_{i,i}^{(1)}(x,y)a_{i,i}^{(2)}(x,y)]Z_{r,i}(x,y))$, $i = \overline{1,n}$ — вектор-функція,

$$G_1(x,y;\xi,\eta) = \left(\delta_{i,j} \exp\left(\int\limits_x^{\xi} a_{i,i}^{(2)}(\tau,\eta)d\tau + \int\limits_y^{\eta} a_{i,i}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right)\right) \equiv$$
$$\equiv \left(\delta_{i,j} g_{i,i}^{(1)}(x,y;\xi,\eta)\right),$$
$$G(\xi,\eta;x) = \left(\delta_{i,j} \exp\left(\int\limits_{g_2(\xi)}^{\eta} a_{i,i}^{(1)}(\xi,\tau)d\tau + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_x^{\xi} [a_{i,i}^{(2)}(\tau,g_2(\tau)) + g_2'(\tau)a_{i,i}^{(1)}(\tau,g_2(\tau))]d\tau\right)\right) \equiv (\delta_{i,j} g_{i,i}(\xi,\eta;x)), i,j = \overline{1,n} -$$

матриці, а

$$\Omega_1(x,y)=(\omega_{1,i}(x,y))=\left(\varphi_{1,i}(x)\exp\left(\int\limits_y^{g_1(x)}a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right)+\int\limits_{g_1(x)}^{y}[\psi_i(k_1(\eta))+\right.$$
$$\left.+a_{i,i}^{(1)}(k_1(\eta),\eta)\varphi_{1,i}(k_1(\eta))]\exp\left(\int\limits_x^{k_1(\eta)}a_{i,i}^{(2)}(\xi,\eta)d\xi+\int\limits_y^{\eta}a_{i,i}^{(1)}(x,\tau)d\tau\right)d\eta\right),$$
$$\Omega(x,y)=\left(\varphi_{2,i}(x)+g_{i,i}(x_0,g_2(x_0);x)\int\limits_{g_2(x)}^{y}\exp\left(\int\limits_{x_0}^{k_1(\eta)}a_{i,i}^{(2)}(\tau,\eta)d\tau+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\int\limits_{y_0}^{\eta}a_{i,i}^{(1)}(x_0,\tau)d\tau\right)[\psi_i(k_1(\eta))+a_{i,i}^{(1)}(k_1(\eta),\eta)\varphi_{1,i}(k_1(\eta))]d\eta\right),$$
$$\Omega_2(x,y)=A_3(x,g_2(x);y)\left(\Omega(x,y)+\right.$$
$$\left.+G(x_0,g_2(x_0);x)\int\limits_{g_2(x)}^{y}\int\limits_{k_1(\eta)}^{x_0}G_1(x_0,y_0;\xi,\eta)F[Z_1(\xi,\eta)]d\xi d\eta\right)-$$

вектор-функції.

Для дослідження та наближеного розв'язання інтегральних рівнянь (7) побудуємо модифікацію двостороннього методу. З цією метою будемо вважати, що $F[U(x,y)]\in C_3(\overline{B}_1)$, де $C_3(\overline{B}_1)$ — простір вектор-функцій, які задовольняють наступним умовам:

1) $F[U(x,y)]\in C(\overline{B})$;

2) в просторі вектор-функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1\subset R^{2(n+1)}$, $\Pi p_{x0y}\overline{B}_1=\overline{D}$, існує така вектор-функція $H(x,y,U(x,y);V(x,y))\equiv H[U(x,y);V(x,y)]$, що $H[U(x,y);U(x,y)]\equiv F[U(x,y)]$ і для довільних з простору $C(\overline{D})$ двох пар вектор-функцій $U_s(x,y),V_s(x,y)\in\overline{B}_1$, які задовольняють умови $U_s(x,y)\le V_s(x,y)$, $s=1,2$, $(x,y)\in\overline{D}$, в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність

$$H[U_1(x,y);V_2(x,y)]\ge H[V_1(x,y);U_2(x,y)],(x,y)\in\overline{D};$$

3) вектор-функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умову Ліпшіца

$$|H[U_1(x,y);V_1(x,y)]-H[U_2(x,y);V_2(x,y)]|\le$$
$$\le L\left(|U_1(x,y)-U_2(x,y)|+|V_1(x,y)-V_2(x,y)|\right),(x,y)\in\overline{D};$$

для всяких неперервних функцій $U_s(x,y),V_s(x,y)\in\overline{B}_1$, $s=1,2$, L — матриця Ліпшіца.

Очевидно, що якщо вектор-функція $f[U(x,y)]$ в області $\overline{B}$) неперервна і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, то $F[U(x,y)]$ завжди належить просторові $C_3(\overline{B}_1)$ [4].

Введемо позначення:

$$
\begin{gathered}
F_s^p(x,y) \equiv H[Z_{s,p}(x,y); V_{s,p}(x,y)], \\
F_{p,s}(x,y) \equiv H[V_{s,p}(x,y); Z_{s,p}(x,y)], (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2, \\
T_1 f(\xi,\eta) = \int\limits_{g_1(x)}^{y} \int\limits_{k_1(\eta)}^{x} G_1(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta, (x,y) \in \overline{D}_1, \\
T_2 f(\xi,\eta) = A_3(x, g_2(x); y) \int\limits_{x_0}^{x} \int\limits_{g_2(x)}^{y} G(\xi,\eta;x) f(\xi,\eta) d\eta d\xi, (x,y) \in \overline{D}_2, \\
T_3 f(\xi,\eta) = G(x_0, g_2(x_0); x) \int\limits_{g_2(x)}^{y} \int\limits_{k_1(\eta)}^{x_0} G_1(x_0,y_0;\xi,\eta) f(\xi,\eta) d\xi d\eta, (x,y) \in \overline{D}_2,
\end{gathered} \tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
\alpha_{s,p}(x,y) = Z_{s,p}(x,y) - \Omega_s^p(x,y) - T_s F^p(\xi,\eta), \\
\beta_{s,p}(x,y) = V_{s,p}(x,y) - \Omega_{s,p}(x,y) - T_s F_p(\xi,\eta), (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\Omega_1^p(x,y) = \Omega_{1,p}(x,y) = \Omega_1(x,y), \forall p = 0,1,2,..., (x,y) \in \overline{D}_1, \\
\Omega_2^p(x,y) = A_3(x, g_2(x); y)(\Omega(x,y) + T_3 F^p(\xi,\eta)), \\
\Omega_{2,p}(x,y) = A_3(x, g_2(x); y)(\Omega(x,y) + T_3 F_p(\xi,\eta)), (x,y) \in \overline{D}_2,
\end{gathered}
$$

$$
W_{s,p}(x,y) = Z_{s,p}(x,y) - V_{s,p}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_i, s = 1,2, p = 0,1,2,...
$$

і побудуємо послідовності вектор-функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{V_{s,p}(x,y)\}$ згідно формул

$$
\begin{gathered}
Z_{s,p+1}(x,y) = \Omega_s^p(x,y) + T_s F^p(\xi,\eta), \\
V_{s,p+1}(x,y) = \Omega_{s,p}(x,y) + T_s F_p(\xi,\eta), (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2,
\end{gathered} \tag{9}
$$

$p = 0,1,2...$, де за нульове наближення $Z_{s,0}(x,y)$, $V_{s,0}(x,y)$, $s = 1,2$, вибираємо довільні вектор-функції з простору $C(\overline{D}_s)$, які задовольняють умови

$$
\alpha_{s,0}(x,y) \geq 0, \beta_{s,0}(x,y) \leq 0, W_{s,0}(x,y) \geq 0, (x,y) \in \overline{D}_s. \tag{10}
$$

Легко переконатися в справедливості наступних лем.

Лема 2. *Нехай $F[U(x,y)] \in C_3(\overline{B}_1)$ і система інтегральних рівнянь* (7), *при виконанні умов* (4), *в просторі вектор-функцій $C(\overline{D}_s)$ мають розв'язки, які при $(x,y) \in \overline{D}_s$ задовольняють умови*

$$
V_{s,0}(x,y) \leq Z_s(x,y) \leq Z_{s,0}(x,y), (x,y) \in \overline{D}_s, s = 1,2. \tag{11}
$$

Тоді в області $\overline{B}_1$ справедливі нерівності (10).

Лема 3. *Якщо $F[U(x,y)] \in C_3(\overline{B}_1)$, то множина вектор-функцій нульового наближення $Z_{s,0}(x,y), V_{s,0}(x,y) \in C(\overline{D}_s)$, $s = 1,2$, які задо-вольняють умови* (10)*, непорожня.*

Використовуючи справедливість рівностей

$$
\begin{gathered}
Z_{s,p}(x,y)-Z_{s,p+1}(x,y)=\alpha_{s,p}(x,y),\\
V_{s,p}(x,y)-V_{s,p+1}(x,y)=\beta_{s,p}(x,y),\\
\alpha_{s,p}(x,y)+\alpha_{s,p+1}(x,y)=Z_{s,p}(x,y)-Z_{s,p+2}(x,y),\\
\beta_{s,p}(x,y)+\beta_{s,p+1}(x,y)=V_{s,p}(x,y)-V_{s,p+2}(x,y),\\
W_{s,p+1}(x,y)=\Omega_s^p(x,y)-\Omega_{s,p}(x,y)+T_s[F^p(\xi,\eta)-F_p(\xi,\eta)],\\
\alpha_{s,p+1}(x,y)=\Omega_s^p(x,y)-\Omega_s^{p+1}(x,y)+T_s[F^p(\xi,\eta)-F^{p+1}(\xi,\eta)],\\
\beta_{s,p+1}(x,y)=\Omega_{s,p}(x,y)-\Omega_{s,p+1}(x,y)+T_s[F_p(\xi,\eta)-F_{p+1}(\xi,\eta)],
\end{gathered}
$$

$s=1,2,\ p=0,1,2,...,\ (x,y)\in\overline{D}_s$, та приймаючи до уваги умови (10), можна довести теорему

Теорема 1. *Нехай $F[U(x,y)]\in C_3(\overline{B}_1)$, а вектор-функції нульового наближення $Z_{s,0}(x,y),\ V_{s,0}(x,y)\in C(\overline{D})$ задовольняють умови* (10).

Тоді послідовності вектор-функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, $\{V_{s,p}(x,y)\}$, визначені згідно формул (10), *при виконанні умов* (4) *і*

$$
V_{s,0}(x,y)\le Z_{s,1}(x,y), Z_{s,0}(x,y)\ge V_{s,1}(x,y), (x,y)\in\overline{D}, s=1,2, \tag{12}
$$

збігаються рівномірно до единого розв'язку задачі $(1)--(3)$ *при $(x,y)\in\overline{D}$, причому в області $\overline{B}$ справедливі нерівності*

$$
\begin{gathered}
V_{s,2p}(x,y)\le Z_{s,2p+1}(x,y)\le V_{s,2p+2}(x,y)\le Z_{s,2p+3}(x,y)\le...\le Z_s(x,y)\le\\
\le V_{s,2p+3}(x,y)\le Z_{s,2p+2}(x,y)\le V_{s,2p+1}(x,y)\le Z_{s,2p}(x,y),
\end{gathered} \tag{13}
$$

для $\forall p\in N$, де $Z_s(x,y)=U(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D_s}$, $s=1,2$, — розв'язок задачі (1)—(3). *Якщо виконується умова* (5), *то $U(x,y)\in C^*(\overline{D})$.*

Наслідок 1. *Нехай $\Phi_s(x)=\Psi(x)=0$, $s=1,2$ і $F[U(x,y)]\in C_3(\overline{B}_1)$, причому $F[U(x,y)]\equiv H[U(x,y);\underline{0}]$. Тоді, якщо $F[0]\le(\ge)0$ в області $\overline{B}$, то розв'язок задачі* (1)-(3) *при $(x,y)\in\overline{D}$ недодатній (невід'ємний) $U(x,y)\le(\ge)0$.*

Наслідок 2. *Якщо $F[U(x,y)]\in C_3(\overline{B}_1)$ і виконуються умови* (4), (11), *то нерівності* (10) *є необхідними і достатніми для справедли-вості в області $\overline{B}$ нерівностей*

$$
V_{s,0}(x,y)\le Z_s(x,y)\le Z_{s,0}(x,y), (x,y)\in\overline{D}_s, s=1,2. \tag{14}
$$

Зауваження. *Якщо $F[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$ і $F[U(x,y)]\equiv H[U(x,y);0]$, то для побудови двосторонніх наближень до розв'язку задачі* (1)-(4) *достатньо будувати одну послідовність вектор-функцій $\{Z_{s,p}(x,y)\}$, а це у два рази зменшує кількість операцій при реалізації двостороннього методу.*

Приклад. В просторі $C^*(\overline{D})$, $D=D_1\cup D_2$, $D_1=\{(x,y)|x\in[1,2],\ y\in(3-x,2)\}$, $D_2=\{(x,y)|x\in[2,4],y\in(x/2,2)\}$ знайти розв'язок ДРЧП

$$
U_{xy}(x,y)+\frac{1}{y}U_x(x,y)-\frac{1}{x}U_y(x,y)=\frac{x}{y}e^{-U(x,y)},
$$

який задовольняє умови $U|_{y=3-x} = \frac{\partial U}{\partial y}|_{y=3-x} = U|_{y=x/2} = 0$.

Очевидно, що $U(x,y) \geq 0$, тоді можна побудувати тільки одну послідовність функцій

$$V_{1,p+1}(x,y) = \frac{x}{y}\int\limits_{3-x}^{y}\int\limits_{3-\eta}^{x}\left(\exp(-V_{1,p}(\xi,\eta)) - \frac{1}{\xi^2}V_{1,p}(\xi,\eta)\right)d\xi d\eta,$$

$$V_{1,p+1}(x,y) = \frac{x}{y}\int\limits_{x/2}^{y}\int\limits_{3-\eta}^{2}\left(\exp(-V_{1,p}(\xi,\eta)) - \frac{1}{\xi^2}V_{1,p}(\xi,\eta)\right)d\xi d\eta +$$
$$+\frac{x}{y}\int\limits_{2}^{x}\int\limits_{x/2}^{y}\left(\exp(-V_{2,p}(\xi,\eta)) - \frac{1}{\xi^2}V_{2,p}(\xi,\eta)\right)d\eta d\xi,$$

тим самим зменшивши кількість обчислень.

За нульове наближення виберемо функції $V_{1,0}(x,y) = 0, V_{2,0}(x,y) = 0$. Тоді отримаємо:

$$V_{1,1}(x,y) = \frac{x}{y}(x(y-3+x) - 3y + 9 - 3x + 0.5y^2 - 0.5(3-x)^2),$$
$$V_{2,1}(x,y) = \frac{x}{y}(0.5x - y + 0.5y^2 - 0.125x^2) + \frac{x}{y}(y(x-2) - 0.5x(x-2)),$$

$$V_{1,2}(x,y) = -\frac{7467x}{560} - \frac{5x^8}{84} - \frac{21x^6}{10} + \frac{5x^7}{8} + \frac{27x^5}{16} - \frac{9x\ln(3)\ln(-1+1/3x)}{2y} + \frac{9x\ln(x)\ln(3-x)}{2y} -$$
$$-\frac{27x\ln(x)}{4y} - \frac{x^3y}{8} + \frac{9x\ln(3)\ln(-1/3y)}{2y} - 3x\ln(3-y) - \frac{yx\ln(x)}{4} - \frac{9x\ln(x)\ln(y)}{2y} - \frac{15x^9}{64y^2} +$$
$$+\frac{yx\ln(3-y)}{4} + 3x\ln(x) + \frac{45x^9}{256y^3} - \frac{131x^7\ln(y)}{48y} - \frac{197x^5\ln(y)}{64y} - \frac{5x^9\ln(y)}{128y} + \frac{3x^2\ln(y)}{y} - \frac{6561x}{8960y^3} -$$
$$-\frac{y^6x}{9408} + \frac{351x^6}{40y^2} + \frac{27x\ln(3-y)}{4y} + \frac{44901x\ln(y)}{4480y} + \frac{x^{10}}{72y^2} + \frac{x^{11}}{960y^3} - \frac{243x^6}{80y^3} + \frac{135x^7}{64y^3} - \frac{45x^8}{56y^3} +$$
$$+\frac{89x^8}{56y^2} - \frac{27x^5(3-x)}{16y} - \frac{x^{10}}{48y^3} - \frac{43x^7}{8y^2} - \frac{135x^5}{32y^2} - \frac{27x^4}{8y^2} + \frac{15x^9}{64y(3-x)} + \frac{5x^8(3-x)}{84y} - \frac{45x^9}{256y(3-x)^2} +$$
$$+\frac{243x^5}{128y^3} + \frac{151y^5x}{80640} - \frac{59y^4x}{2800} + \frac{131x^7\ln(3-x)}{48y} + \frac{197x^5\ln(3-x)}{64y} - \frac{9x dilog(1-(1/3)y)}{2y} + \frac{603yx}{128} +$$
$$+\frac{661y^3x}{3840} + \frac{y^2x^5}{32} + \frac{y^7x}{322560} + \frac{16767x}{2240y^2} - \frac{7x^4\ln(y)}{2y} + \frac{117x^6\ln(y)}{20y} + \frac{15x^8\ln(y)}{28y} - \frac{5x^3\ln(y)}{2y} +$$
$$+\frac{9x dilog((1/3)x)}{2y} + \frac{23x^4}{12} + \frac{503x(3-x)^3}{480y} - \frac{603x(3-x)^2}{128y} - \frac{661x(3-x)^4}{3840y} - \frac{151x(3-x)^6}{80640y} - \frac{x(3-x)^8}{322560y} +$$
$$+\frac{59x(3-x)^5}{2800y} + \frac{3x^3}{2} - \frac{16767x}{2240(3-x)y} + \frac{7x^4\ln(3-x)}{2y} - \frac{117x^6\ln(3-x)}{20y} + \frac{7467(3-x)x}{560y} - \frac{15x^8\ln(3-x)}{28y} +$$
$$+\frac{5x^3\ln(3-x)}{2y} + \frac{5x^9\ln(3-x)}{128y} - \frac{3x^2\ln(3-x)}{y} + \frac{x^5(3-x)^4}{768y} - \frac{44901x\ln(3-x)}{4480y} - \frac{x^{10}}{72y(3-x)} + \frac{43x^7}{8y(3-x)} +$$
$$+\frac{x(3-x)^7}{9408y} + \frac{x^3(3-x)^2}{8y} + \frac{x^6(3-x)^3}{120y} + \frac{6561x}{8960y(3-x)^2} + \frac{5x^7(3-x)^2}{192y} - \frac{x^{11}}{960y(3-x)^2} - \frac{x^5(3-x)^3}{32y} -$$
$$-\frac{x^4(3-x)^3}{72y} - \frac{503y^2x}{480} + \frac{243x^6}{80y(3-x)^2} - \frac{351x^6}{40y(3-x)} - \frac{135x^7}{64y(3-x)^2} + \frac{45x^8}{56y(3-x)^2} + \frac{x^4(3-x)^2}{4y} - \frac{89x^8}{56y(3-x)} +$$
$$+\frac{37x^5(3-x)^2}{128y} + \frac{x^{10}}{48y(3-x)^2} - \frac{5x^7(3-x)}{8y} + \frac{21x^6(3-x)}{10y} - \frac{3x^6(3-x)^2}{16y} + \frac{135x^5}{32y(3-x)} + \frac{27x^4}{8y(3-x)} -$$
$$-\frac{243x^5}{128y(3-x)^2} - \frac{3x^3(3-x)}{2y} - \frac{23x^4(3-x)}{12y} - \frac{y^3x^5}{768} - \frac{y^2x^6}{120} - \frac{5yx^7}{192} + \frac{y^2x^4}{72} - \frac{37yx^5}{128} - \frac{yx^4}{4} + \frac{3yx^6}{16},$$

$$V_{2,2}(x,y) = -\frac{7467x}{560} + \frac{75787x^8}{401408y} - \frac{1035x^3}{512y} + \frac{3x^3}{2} + \frac{23x^4}{12} - \frac{4750141x^7}{1720320y} + \frac{76679x^4}{3840y} +$$
$$+\frac{16767x}{2240y^2} - \frac{5x^3\ln(y)}{2y} + \frac{15x^8\ln(y)}{28y} + \frac{89x^8}{56y^2} + \frac{x^{10}}{72y^2} - \frac{5x^7y}{192} + \frac{603xy}{128} - \frac{xy^6}{9408} + \frac{xy^7}{322560} -$$
$$-\frac{9x dilog(1-y/3)}{2y} + \frac{x^4y^2}{72} + \frac{27x ln(3-y)}{4y} - \frac{15x^9}{64y^2} - \frac{x^{10}}{48y^3} + \frac{44901x ln(y)}{4480y} + \frac{x^{11}}{960y^3} - \frac{x^6y^2}{120} -$$
$$-\frac{135x^5}{32y^2} - \frac{27x^4}{8y^2} - \frac{131x^7\ln(y)}{48y} + \frac{3x^6y}{16} + \frac{243x^5}{128y^3} - \frac{x^5y^3}{768} + \frac{45x^9}{256y^3} + \frac{351x^6}{40y^2} - \frac{551431x^5}{20480y} +$$
$$-\frac{37x^5y}{128} + \frac{x^5y^2}{32} - \frac{x^4y}{4} - \frac{45x^8}{56y^3} - \frac{43x^7}{8y^2} - \frac{44901x ln(x/2)}{4480y} - \frac{197x^5\ln(y)}{64y} + \frac{117x^6\ln(y)}{20y} -$$
$$-\frac{59xy^4}{2800} - \frac{6561x}{8960y^3} + \frac{151xy^5}{80640} - \frac{503xy^2}{480} - \frac{7x^4\ln(y)}{2y} + \frac{3x^2\ln(y)}{y} - \frac{5x^9 ln(y)}{128y} + \frac{135x^7}{64y^3} - \frac{243x^6}{80y^3} +$$

$$+\frac{5x^3\ln(x/2)}{2y}+\frac{5x^7}{8}-\frac{21x^6}{10}+\frac{27x^5}{16}-\frac{15x^8\ln(x/2)}{28y}+\frac{9xdilog(1-x/6)}{2y}-\frac{27x\ln(3-x/2)}{4y}-$$
$$-\frac{3x^2\ln(x/2)}{y}+\frac{5x^9\ln(x/2)}{128y}+\frac{131x^7\ln(x/2)}{48y}+\frac{x^3\ln(x)}{16y}-\frac{3x^2\ln(x)}{2}y-\frac{x^3\ln(3-x/2)}{16y}+$$
$$+\frac{3x^2\ln(3-x/2)}{2y}+\frac{197x^5\ln(x/2)}{64y}-\frac{117x^6\ln(x/2)}{20y}+\frac{661xy^3}{3840}+\frac{7x^4\ln(x/2)}{2y}+\frac{150037x^9}{27525120y}-\frac{x^3y}{8}+$$
$$+\frac{9x\ln(3)\ln(-y/3)}{2y}+\frac{xy\ln(3-y)}{4}-3x\ln(3-y)-\frac{xy\ln(x)}{4}-\frac{9x\ln(x)\ln(y)}{2y}+\frac{1181259x^6}{89600y}+$$
$$+3x\ln(x)+\frac{7467x^2}{1120y}-\frac{9x\ln(3)\ln(-x/6)}{2y}+\frac{9x\ln(x)\ln(x/2)}{2y}+\frac{6561}{2240xy}-\frac{5x^8}{84}-\frac{16767}{1120y}+$$
$$+\frac{5x^2}{3y}-\frac{10x}{3}+\frac{xy}{2}-\frac{x^3}{8y}+\frac{13xln(y)}{4y}-\frac{3x^4}{4y}+\frac{19x^5}{96y}-3x\ln(2)+\frac{5x^5ln(y)}{32y}-\frac{x^4ln(2)}{2y}-$$
$$-\frac{xln(x)y}{4}+\frac{x^4\ln(x)}{2y}+\frac{13\ln(2)}{4y}-\frac{x^4}{3}+\frac{3x^3}{2}+\frac{5x^3\ln(y)}{16y}-\frac{x^3\ln(x)}{4}-\frac{x^3y}{8}-\frac{3x\ln(y)}{2y}+$$
$$+3xln(x)-\frac{5x^5\ln(x)}{32y}+\frac{\ln(2)x^3}{4y}-\frac{x^4\ln(y)}{2y}+\frac{5x^5\ln(2)}{32y}-\frac{13xln(x)}{4y}+\frac{\ln(2)xy^2}{4}.$$

Для зручності подамо результати у вигляді таблиці, позначивши через $W_{i,p+1}(x,y)=V_{i,p}(x,y)-V_{i,p+1}(x,y)$:

p	$W_{1,p}(x,y)$	$W_{2,p}(x,y)$
1	0.5	1.313
2	0.055	0.635

З отриманих результатів бачимо, що побудовані наближені розв'язки досить швидко збігаються до розв'язку поставленої задачі.

1. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. Москва: Мир, 1969. - 448 с.
2. *Маринець В.В., Добридень А.В.* Про деякі некласичні задачі для квазілінійних рівнянь гіперболічного типу// Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. 2009. Вип. 17. - С. 132-144.
3. *Маринець. В.В. Трошина А.В.* Узагальнена задача Дарбу // Наук. вісник УжНУ. Серія матиматика. - Ужгород, 1999. Вип. 4.-С. 79-84.
4. *Маринець В.В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // Укр. мат. журнал. - 1995. - т. 47, № 12. - С. 1667-1675.
5. *Курпель Н. С., Шувар Б. А.* Двусторонние операторные неравенства и их применения. - Киев:Наукова думка, 1980. – 268 с.

Одержано 12.11.2009