УДК 517.946

В. В. Маринець, О. Ю. Питьовка (Ужгородський національний ун-т, Мукачівський державний ун-т)

ПРО ОДНУ КРАЙОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ СИСТЕМ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

A boundary-value problem for a system of the quasilinear differential equations in a partial derivative of the hyperbolic type explores using the built modification of two-sides method.

За допомогою побудованої модифікації двостороннього методу досліджується одна крайова задача для систем квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу.

У даній роботі наукові результати, одержані в статті [1] для скалярного рівняння, поширюються і узагальнюються для систем квазілінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних гіперболічного типу.

Нехай в $\mathbb{R}^2$ задана обмежена область $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, де $D_1 = \{(x,y) \mid x \in (x_1, x_0],\ y \in [y_1, y_2)\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid x \in [x_1, x_0],\ y \in (g_1(x), y_1)\}$, $D_3 = \{(x,y) \mid x \in (x_0, x_2],\ y \in [y_1, g_2(x))\}$, $x_1 < x_0 < x_2$, $y_0 < y_1 < y_2$, а $y = g_s(x)$, $(x = k_s(y))$, $s = 1,2$ — задані "вільні" криві, $g'_s(x) < 0$, $x \in (x_0, x_s)$, причому $g_1(x_0) = y_0$, $g_2(x_0) = y_2$, $g_s(x_s) = y_1$, $s = 1,2$.

Дослідимо задачу [2]: в просторі вектор–функцій $C^*(\overline{D}) = C^{(1.1)}(D) \cap C(\overline{D})$ знайти розв'язок системи диференціальних рівнянь в частинних похідних

$$\begin{gathered} U_{xy}(x,y) + A_1(x,y)U_x(x,y) + A_2(x,y)U_y(x,y) = \\ = f(x,y,U(x,y)) \equiv f[U(x,y)], \end{gathered} \tag{1}$$

який задовольняє умови

$$U(x, y_2) = \Phi_0(x),\ x \in [x_1, x_0];\quad U(x_1, y) = \Psi(y),\ y \in [y_1, y_2], \tag{2}$$

$$U(x, g_1(x)) = \Phi_1(x),\ x \in [x_1, x_0], \tag{3}$$

$$U(x, g_2(x)) = \Phi_2(x),\ x \in [x_0, x_2], \tag{4}$$

де для заданих неперервнодиференційовних вектор–функцій $\Psi(y)$, $\Phi_k(x)$, $k = 0,1,2$, виконуються умови узгодженості

$$\Phi_1(x_1) = \Psi(y_1),\quad \Phi_2(x_0) = \Phi_0(x_0),\quad \Phi_0(x_1) = \Psi(y_2), \tag{5}$$

а $U(x,y) = (u_i(x,y))$, $f[U(x,y)] = (f_i[U(x,y)])$, $\Phi_k(x) = (\varphi_{k,i}(x))$, $\Psi(y) = (\psi_i(y))$, $i = \overline{1,n}$ — вектор–функції, $A_s(x,y) = \left(\delta_{i,j} a^{(s)}_{i,j}(x,y)\right)$, $s = 1,2$ —відомі матриці, $\delta_{i,j}$ —символ Кронекера, $i,j = \overline{1,n}$.

Позначимо через $U^{(1)}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_1$ — розв'язок задачі Гурса (1), (2), $U^{(2)}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_2$ — розв'язок задачі Дарбу (1), (3) і $U^{(2)}(x,y_1) = U^{(1)}(x,y_1)$, $x \in [x_1, x_0]$, а $U^{(3)}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_3$ — розв'язок задачі Дарбу (1), (4) і $U^{(3)}(x_0,y) = U^{(1)}(x_0,y)$, $y \in [y_1,y_2]$. Тоді, очевидно, розв'язок крайової задачі (1)—(5) $U(x,y) = U^{(r)}(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}_r$, $r = 1,2,3$, а тому задачу (1)—(5) називатимемо крайовою задачею Гурса–Дарбу (Г.–Д.).

Надалі вважатимемо, що $A_1(x,y) \in C^{(1.0)}(D)$, $A_2(x,y) \in C^{(0.1)}(D)$, $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$, $f : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{B} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, а

$$A_{1_x}(x,y) = A_{2_y}(x,y), \quad (x,y) \in D. \tag{6}$$

Неважко показати, що домноживши в області $\overline{D}_r$ рівняння (1) зліва відповідно на невироджену матрицю $R_r(x,y) = (\delta_{i,j}\rho_{i,r}(x,y))$, $i,j = \overline{1,n}$, $r = 1,2,3$,

$$\rho_{i,1}(x,y) = \exp\left(\int_{x_1}^{x} a_{i,i}^{(2)}(\xi,y_2)d\xi + \int_{y_2}^{y} a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right), \quad (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$\rho_{i,2}(x,y) = \exp\left(\int_{k_1(y)}^{x} a_{i,i}^{(2)}(\xi,y)d\xi + \int_{y_1}^{y}\left[k_1'(\eta)a_{i,i}^{(2)}(k_1(\eta),\eta) + a_{i,i}^{(1)}(k_1(\eta),\eta)\right]d\eta\right), \\ (x,y) \in \overline{D}_2,$$

$$\rho_{i,3}(x,y) = \exp\left(\int_{x_0}^{x}\left[a_{i,i}^{(1)}(\xi,g_2(\xi))g_2'(\xi) + a_{i,i}^{(2)}(\xi,g_2(\xi))\right]d\xi + \int_{g_2(x)}^{y} a_{i,i}^{(1)}(x,\eta)d\eta\right), \\ (x,y) \in \overline{D}_3,$$

задачу Г.–Д. (1)—(5) в області $\overline{D}$ можна подати в еквівалентній інтегральній формі [1, 3]

$$U^{(r)}(x,y) = R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_r(x,y) + T_rF[U^{(r)}(\xi,\eta)]\right\}, \\ (x,y) \in \overline{D}_r, \quad r = 1,2,3, \tag{7}$$

де $F[U^{(r)}(x,y)] = \left(F_i[U^{(r)}(x,y)]\right)$, $\Omega_r(x,y) = (\omega_i^{(r)}(x,y))$—вектор–функції,

$$F_i[U^{(r)}(x,y)] \equiv f_i[U^{(r)}(x,y)] + [a_{i,i}^{(1)}(x,y)a_{i,i}^{(2)}(x,y) + a_{i,i\,y}^{(2)}(x,y)]u_i^{(r)}(x,y),$$

$$\omega_i^{(1)}(x,y) \equiv \varphi_{0,i}(x)\exp\left(\int_{x_1}^{x} a_{i,i}^{(2)}(\xi,y_2)d\xi\right) + \varphi_{0,i}(x_1) + \psi_i(y)\exp\left(\int_{y_2}^{y} a_{i,i}^{(1)}(x_1,\eta)d\eta\right),$$

$$T_1F[U^{(1)}(\xi,\eta)] \equiv \int_{y_2}^{y}\int_{x_1}^{x} R_1(\xi,\eta)F[U^{(1)}(\xi,\eta)]d\xi d\eta, \quad (x,y) \in \overline{D}_1,$$

$$\omega_i^{(2)}(x,y) = \rho_{i,2}(k_1(y),y)\varphi_{1,i}(k_1(y)) + \rho_i(x_1,y_1;x,y_2)\varphi_{0,i}(x) -$$

$$-\rho_i(x_1,y_1;k_1(y),y_2)\varphi_{0,i}(k_1(y)) + \int_{y_2}^{y_1}\int_{k_1(y)}^{x} F_i[U^{(1)}(\xi,\eta)]\rho_i(x_1,y_1;\xi,\eta)d\xi d\eta \equiv$$

$$\equiv \overline{\omega}_i^{(2)}(x,y) + T_{1,2}F_i[U^{(1)}(\xi,\eta)],$$

$$\rho_i(x,y;\xi,\eta) = \exp\left(\int_{y}^{\eta} a_{i,i}^{(1)}(\xi,\tau)d\tau + \int_{x}^{\xi} a_{i,i}^{(2)}(\tau,y)d\tau\right),$$

$$T_2F[U^{(2)}(\xi,\eta)] \equiv \int_{y_1}^{y}\int_{k_1(y)}^{x} R_2(\xi,\eta)F[U^{(2)}(\xi,\eta)]d\xi d\eta, \quad (x,y) \in \overline{D}_2,$$

$$\omega_i^{(3)}(x,y) = \rho_{i,3}(x,g_2(x))\varphi_{2,i}(x) + \rho_i^{-1}(x_1,y;x_0,y_2)\psi_i(y) -$$

$$-\rho_i^{-1}(x_1,g_2(x);x_0,y_2)\psi_i(g_2(x)) + \int_{g_2(x)}^{y}\int_{x_1}^{x_0} \rho_i^{-1}(\xi,\eta;x_0,y_2)F_i[U^{(1)}(\xi,\eta)]d\xi d\eta \equiv$$

$$\equiv \overline{\omega}_i^{(3)}(x,y) + T_{1,3}F_i[U^{(1)}(\xi,\eta)],$$

$$T_3F[U^{(3)}(\xi,\eta)] \equiv \int_{x_0}^{x}\int_{g_2(x)}^{y} R_3(\xi,\eta)F[U^{(3)}(\xi,\eta)]d\eta d\xi, \quad (x,y) \in \overline{D}_3.$$

Згідно постановки задачі $U_x^{(1)}(x,y_1) = U_x^{(2)}(x,y_1)$ і $U_y^{(1)}(x_0,y) = U_y^{(3)}(x_0,y)$, а

$$\begin{aligned} U_y^{(1)}(x,y_1) - U_y^{(2)}(x,y_1) = P(x) \equiv (p_i(x)), \\ U_x^{(1)}(x_0,y) - U_x^{(3)}(x_0,y) = Q(y) \equiv (q_i(y)),\ i=\overline{1,n}, \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$p_i(x) = \exp\left(\int_x^{x_1} a_{i,i}^{(2)}(\xi,y_1)d\xi\right)\Big\{\psi_i'(y_1) - k_1'(y_1)\Big[\varphi_{1,i}'(x_1) + a_{i,i}^{(2)}(x_1,y_1)\varphi_{1,i}(x_1) -$$

$$-\left(\varphi_{0,i}'(x_1) + a_{i,i}^{(2)}(x_1,y_2)\varphi_{0,i}(x_1)\right)\exp\left(\int_{y_1}^{y_2} a_{i,i}^{(1)}(x_1,\eta)d\eta\right) +$$

$$+\int_{y_1}^{y_2}\exp\left(\int_{y_1}^{\eta} a_{i,i}^{(1)}(x_1,\tau)d\tau\right)F_i(x_1,\eta,\Psi(\eta))d\eta\Big]\Big\},$$

$$q_i(y) = \exp\left(\int_y^{y_2} a_{i,i}^{(1)}(x_0,\eta)d\eta\right)\Big\{\varphi_{0,i}'(x_0) - \varphi_{2,i}'(x_0) +$$

$$+g_2'(x_0)\Big[\int_{x_1}^{x_0}\exp\left(\int_{x_0}^{\xi} a_{i,i}^{(2)}(\tau,y_2)d\tau\right)F_i(\xi,y_2,\Phi_0(\xi))d\xi + (\psi_i'(y_2) +$$

$$+a_1(x_1,y_2)\psi_i(y_2))\exp\left(\int_{x_0}^{x_1} a_{i,i}^{(2)}(\tau,y_2)d\tau\right) - a_{i,i}^{(1)}(x_0,y_2)\varphi_{2,i}(x_0)\Big]\Big\}.$$

Таким чином має місце наступна

Лема 1. *Якщо задача Г.–Д. (1)—(5) в області $\overline{D}$ має розв'язок, то він належатиме простору $C^*(\overline{D})$ тоді і тільки тоді, якщо $P(x) = Q(y) = 0$. У супротивному випадку мають місце рівності (8).*

Очевидно, умови леми будуть виконуватись, якщо, наприклад

$$k_1'(y_1) = g_2'(x_0) = 0, \psi_i'(y) = 0, \varphi_{0,i}'(x_0) = \varphi_{2,i}'(x_0) \text{ для } \forall i = \overline{1,n}.$$

Встановимо достатні умови існування в просторі $C^*(\overline{D})$ єдиного розв'язку задачі (1)—(5).

Надалі будемо вважати [4], що вектор–функція $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, де $C_1(\overline{B})$— простір вектор–функцій, які задовольняють наступні умови:

1) $F[U(x,y)] \in C(\overline{B})$,
2) в просторі вектор–функцій $C(\overline{B}_1)$, $\overline{B}_1 \subset \mathbb{R}^{2(n+1)}$, $\Pi p_{xOy}\overline{B}_1 = \overline{D}$, існує така вектор–функція $H(x,y,U(x,y),V(x,y)) \equiv H[U(x,y);V(x,y)]$, що $H[U(x,y);U(x,y)] \equiv F[U(x,y)]$ і для довільних з простору $C(\overline{D})$ двох пар вектор–функцій $U_s(x,y)$, $V_s(x,y) \in \overline{B}_1$, $s = 1,2$, які задовольняють умови $U_s(x,y) \le V_s(x,y)$, $(x,y) \in \overline{D}$, в області $\overline{B}_1$ виконується нерівність
$$H[U_1(x,y);V_2(x,y)] \le H[V_1(x,y);U_2(x,y)],\ (x,y) \in \overline{D}, \tag{9}$$
3) вектор–функція $H[U(x,y);V(x,y)]$ в області $\overline{B}_1$ задовольняє умову Ліпшіца, тобто, для всяких $U_s(x,y)$, $V_s(x,y) \in \overline{B}_1$, $s = 1,2$ і $(x,y) \in \overline{D}$,
$$|H[U_1(x,y);V_1(x,y)] - H[U_2(x,y);V_2(x,y)]| \le$$
$$\le L\left(|U_1(x,y) - U_2(x,y)| + |V_1(x,y) - V_2(x,y)|\right),$$
де $L = (l_{i,j})$ — матриця Ліпшіца, $l_{i,j} \ge 0$, $i,j = \overline{1,n}$.

Очевидно, якщо вектор–функція $f[U(x,y)] \in C(\overline{B})$ і має обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього, то $f[U(x,y)]$ завжди належить просторові $C_1(\overline{B})$.

Нехай вектор–функції $Z_p^{(r)}(x,y)$, $V_p^{(r)}(x,y) \in \overline{B}_1$, $r = 1,2,3$, $p \in \mathbb{N}$.

Введемо позначення [5]:

$$H[Z_p^{(r)}(x,y); V_p^{(r)}(x,y)] = F_r^p(x,y) \equiv \left(F_i^{(r,p)}(x,y)\right),$$

$$H[V_p^{(r)}(x,y); Z_p^{(r)}(x,y)] = F_{r,p}(x,y) \equiv \left(F_{i,p}^{(r)}(x,y)\right),$$

$$\Omega_r^p(x,y) = \left(\omega_i^{(r,p)}(x,y)\right), \Omega_{r,p}(x,y) = \left(\omega_{i,p}^{(r)}(x,y)\right),$$

$$\Omega_1^p(x,y) = \Omega_{1,p}(x,y) = \Omega_1(x,y),\ \forall p \in \mathbb{N},\ (x,y) \in \overline{D}_r,$$

$$\omega_i^{(2,p)}(x,y) = \overline{\omega}_i^{(2)}(x,y) + T_{1,2}F_i^{(1,p)}(\xi,\eta),\ \omega_i^{(3,p)}(x,y) = \overline{\omega}_i^{(3)}(x,y) + T_{1,3}F_i^{(1,p)}(\xi,\eta),$$

$$\omega_{i,p}^{(2)}(x,y) = \overline{\omega}_i^{(2)}(x,y) + T_{1,2}F_{i,p}^{(1)}(\xi,\eta),\ \omega_{i,p}^{(3)}(x,y) = \overline{\omega}_i^{(3)}(x,y) + T_{1,3}F_{i,p}^{(1)}(\xi,\eta),$$

$$i = \overline{1,n},$$

$$\begin{aligned} \alpha_p^{(r)}(x,y) &= Z_p^{(r)}(x,y) - R_r^{-1}(x,y)\left(\Omega_r^p(x,y) + T_r F_r^p(\xi,\eta)\right), \\ \beta_p^{(r)}(x,y) &= V_p^{(r)}(x,y) - R_r^{-1}(x,y)\left(\Omega_{r,p}(x,y) + T_r F_{r,p}(\xi,\eta)\right), \end{aligned} \tag{10}$$

$$\alpha_p^{(r)}(x,y) = \left(\alpha_{i,p}^{(r)}(x,y)\right),\ \beta_p^{(r)}(x,y) = \left(\beta_{i,p}^{(r)}(x,y)\right) \text{— вектор–функції.}$$

$$W_p^{(r)}(x,y) = Z_p^{(r)}(x,y) - V_p^{(r)}(x,y),\ \ (x,y) \in \overline{D}_r,\ r = 1,2,3.$$

Побудуємо послідовності вектор–функцій $\left\{Z_p^{(r)}(x,y)\right\}$, $\left\{V_p^{(r)}(x,y)\right\}$ згідно формул [6, 7]

$$\begin{gathered} R_r(x,y)Z_{p+1}^{(r)}(x,y) = \Omega_r^p(x,y) + T_r F_r^p(\xi,\eta), \\ R_r(x,y)V_{p+1}^{(r)}(x,y) = \Omega_{r,p}(x,y) + T_r F_{r,p}(\xi,\eta), \\ (x,y) \in \overline{D}_r,\ p = 0,1,2,...,\ r = 1,2,3, \end{gathered} \tag{11}$$

де за нульове наближення $Z_0^{(r)}(x,y)$, $V_0^{(r)}(x,y) \in \overline{B}_1$ вибираємо довільні вектор–функції з простору $C(\overline{D}_r)$, які задовольняють умови

$$\begin{gathered} \alpha_0^{(r)}(x,y) \geq 0,\ \beta_0^{(r)}(x,y) \leq 0, \\ W_0^{(r)}(x,y) \geq 0,\ (x,y) \in \overline{D}_r,\ r = 1,2,3. \end{gathered} \tag{12}$$

Справедлива наступна

Лема 2. *Нехай* $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ *і інтегральні рівняння (7) в просторі функцій* $C(\overline{D}_r)$, $r=1,2,3$, *мають розв'язки, які при* $(x,y)\in\overline{D}_r$ *задовольняють умови*

$$V_0^{(r)}(x,y) \le U^{(r)}(x,y) \le Z_0^{(r)}(x,y),\ Z_0^{(r)}(x,y),\ V_0^{(r)}(x,y) \in \overline{B}_1,\ r=1,2,3. \quad (13)$$

Тоді в області $\overline{B}_1$ *справедливі нерівності(12).*

Лема 3. *Якщо* $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$, *то множина вектор–функцій нульового наближення* $Z_0^{(r)}(x,y)$, $V_0^{(r)}(x,y) \in C(\overline{D}_r)$, *які задовольняють умови (12), непорожня.*

Доведення. Нехай

$$\overline{Z}^{(r)}(x,y) = R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_r(x,y)\mid_{U^{(r)}(x,y)=Q(x,y)} + T_rF[Q(\xi,\eta)]\right\},$$

$$r=1,2,3,\ (x,y)\in\overline{D}_r,$$

де $Q(x,y)\in C(\overline{D})$ — довільна в області $\overline{B}$ функція. Вважаючи, що визначена таким чином функція $\overline{Z}^{(r)}(x,y)\in\overline{B}_1$, позначимо

$$\overline{\alpha}^{(r)}(x,y) = \overline{Z}^{(r)}(x,y) - R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_r(x,y)\mid_{U^{(r)}(x,y)=\overline{Z}^{(r)}(x,y)} + T_rF[\overline{Z}^{(r)}(\xi,\eta)]\right\}.$$

Тоді вектор–функції

$$Z_0^{(r)}(x,y) = \overline{Z}^{(r)}(x,y) + \left|\overline{\alpha}^{(r)}(x,y)\right|,$$

$$V_0^{(r)}(x,y) = \overline{Z}^{(r)}(x,y) - \left|\overline{\alpha}^{(r)}(x,y)\right|,\ r=1,2,3,\ (x,y)\in\overline{D}_r,$$

при умові, що $Z_0^{(r)}(x,y)$, $V_0^{(r)}(x,y)\in\overline{B}_1$, є функціями нульового наближення, які задовольняють умови (12). Дійсно, оскільки $R_r(x,y)>0$, $r=1,2,3$, то приймаючи до уваги умову (9), маємо

$$W_0^{(r)}(x,y) = 2\left|\overline{\alpha}^{(r)}(x,y)\right| \ge 0,$$

$$\alpha_0^{(r)}(x,y) = \overline{Z}_0^{(r)}(x,y) - R_r^{-1}(x,y)\left(\Omega_r^0(x,y) + T_rF_r^0(\xi,\eta)\right) =$$

$$= \left|\overline{\alpha}^{(r)}(x,y)\right| + \overline{\alpha}^{(r)}(x,y) + R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_r(x,y)\mid_{U^{(r)}(x,y)=\overline{Z}^{(r)}(x,y)} - \Omega_r^0(x,y) + \right.$$

$$\left. + T_r\left(H[\overline{Z}^{(r)}(\xi,\eta);\overline{Z}^{(r)}(\xi,\eta)] - H[Z_0^{(r)}(\xi,\eta);V_0^{(r)}(\xi,\eta)]\right)\right\} \ge 0.$$

Аналогічно доводиться, що $\beta_0^{(r)}(x,y)\le 0$, $(x,y)\in\overline{D}_r$, $r=1,2,3$.

Із (10), (11) одержуємо

$$Z_p^{(r)}(x,y) - Z_{p+1}^{(r)}(x,y) = \alpha_p^{(r)}(x,y),\ V_p^{(r)}(x,y) - V_{p+1}^{(r)}(x,y) = \beta_p^{(r)}(x,y), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \alpha_p^{(r)}(x,y) + \alpha_{p+1}^{(r)}(x,y) &= Z_p^{(r)}(x,y) - Z_{p+2}^{(r)}(x,y),\\ \beta_p^{(r)}(x,y) + \beta_{p+1}^{(r)}(x,y) &= V_p^{(r)}(x,y) - V_{p+2}^{(r)}(x,y), \end{aligned} \quad (15)$$

$$W_{p+1}^{(r)}(x,y) = R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_r^p(x,y) - \Omega_{r,p}(x,y) + T_r\left(F_r^p(\xi,\eta) - F_{r,p}(\xi,\eta)\right)\right\}, \quad (16)$$

$$\alpha_{p+1}^{(r)}(x,y) = R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_r^p(x,y) - \Omega_r^{p+1}(x,y) + T_r\left(F_r^p(\xi,\eta) - F_r^{p+1}(\xi,\eta)\right)\right\},$$

$$\beta_{p+1}^{(r)}(x,y) = R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_{r,p}(x,y) - \Omega_{r,p+1}(x,y) + \right. \quad (17)$$

$$\left. + T_r\left(F_{r,p}(\xi,\eta) - F_{r,p+1}(\xi,\eta)\right)\right\},\ (x,y) \in \overline{D}_r,\ r = 1,2,3,\ p = 0,1,2,\ldots .$$

Враховуючи (9), (12), із (14) та (16) при $p = 0$ маємо

$$Z_0^{(r)}(x,y) - Z_1^{(r)}(x,y) \geq 0,\ V_0^{(r)}(x,y) - V_1^{(r)}(x,y) \leq 0,$$

$$W_0^{(r)}(x,y) \leq 0,\ r = 1,2,3,\ (x,y) \in \overline{D}_r.$$

Нехай при $(x,y) \in \overline{D}_r$ виконуються умови

$$Z_0^{(r)}(x,y) \geq V_1^{(r)}(x,y),\ V_0^{(r)}(x,y) \leq Z_1^{(r)}(x,y),\ (x,y) \in \overline{D}_r. \quad (18)$$

Тоді, враховуючи попередні нерівності, при $(x,y) \in \overline{D}_r$ одержимо

$$V_0^{(r)}(x,y) \leq Z_1^{(r)}(x,y) \leq V_1^{(r)}(x,y) \leq Z_0^{(r)}(x,y),\ r = 1,2,3,\ (x,y) \in \overline{D}_r,$$

тобто, якщо $Z_0^{(r)}(x,y)$, $V_0^{(r)}(x,y) \in \overline{B}_1$, то і $Z_1^{(r)}(x,y)$, $V_1^{(r)}(x,y) \in \overline{B}_1$, $r = 1,2,3$.

Із (17) при $p = 0$ маємо $\alpha_1^{(r)}(x,y) \leq 0$, $\beta_1^{(r)}(x,y) \geq 0$ для $\forall (x,y) \in \overline{D}_r$, $r = 1,2,3$, а отже із (14) та (16) при $p = 1$ і $(x,y) \in \overline{D}_r$, $r = 1,2,3$, випливає

$$Z_1^{(r)}(x,y) \leq Z_2^{(r)}(x,y),\ V_1^{(r)}(x,y) \geq V_2^{(r)}(x,y), W_2^{(r)}(x,y) \geq 0.$$

Оскільки в силу умов (9), (18) при $(x,y) \in \overline{D}_r$, $r = 1,2,3$,

$$\alpha_0^{(r)}(x,y) + \alpha_1^{(r)}(x,y) = Z_0^{(r)}(x,y) - V_1^{(r)}(x,y) +$$

$$+ R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_{r,0}(x,y) - \Omega_r^1(x,y) + T_r\left(F_{r,0}(\xi,\eta) - F_r^1(\xi,\eta)\right)\right\} \geq 0,$$

$$\beta_0^{(r)}(x,y) + \beta_1^{(r)}(x,y) = V_0^{(r)}(x,y) - Z_1^{(r)}(x,y) +$$

$$+ R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_r^0(x,y) - \Omega_{r,1}(x,y) + T_r\left(F_r^0(\xi,\eta) - F_{r,1}(\xi,\eta)\right)\right\} \leq 0,\ (x,y) \in \overline{D}_r,$$

то із (15) при $p = 0$ і $(x,y) \in \overline{D}_r$ маємо

$$Z_0^{(r)}(x,y) \geq Z_2^{(r)}(x,y),\ V_0^{(r)}(x,y) \leq V_2^{(r)}(x,y),\ r = 1,2,3.$$

Але

$$Z_{p+1}^{(r)}(x,y) - V_{p+2}^{(r)}(x,y) =$$

$$= R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_r^p(x,y) - \Omega_{r,p+1}(x,y) + T_r\left(F_r^p(\xi,\eta) - F_{r,p+1}(\xi,\eta)\right)\right\},$$

$$V_{p+1}^{(r)}(x,y) - Z_{p+2}^{(r)}(x,y) = \quad (19)$$

$$= R_r^{-1}(x,y)\left\{\Omega_{r,p}(x,y) - \Omega_r^{p+1}(x,y) + T_r\left(F_{r,p}(\xi,\eta) - F_r^{p+1}(\xi,\eta)\right)\right\},$$

$(x, y) \in \overline{D}_r$, $r = 1, 2, 3$, для $p \in \mathbb{N}$, а отже, враховуючи попередні нерівності, із (19) при $p = 0$ одержимо

$$Z_1^{(r)}(x, y) - V_2^{(r)}(x, y) \le 0,\ V_1^{(r)}(x, y) - Z_2^{(r)}(x, y) \ge 0,\ (x, y) \in \overline{D}_r,\ r = 1, 2, 3,$$

тобто в області $\overline{B}_1$ виконуються умови

$$V_0^{(r)}(x, y) \le Z_1^{(r)}(x, y) \le V_2^{(r)}(x, y) \le Z_2^{(r)}(x, y) \le V_1^{(r)}(x, y) \le Z_0^{(r)}(x, y),$$

$$\text{а } \alpha_2^{(r)}(x, y) \ge 0,\ \beta_2^{(r)}(x, y) \le 0,\ (x, y) \in \overline{D}_r,\ r = 1, 2, 3.$$

Методом математичної індукції переконуємось, що при виконанні умов (18) справедливими будуть нерівності

$$\begin{gathered}
\alpha_{2p}^{(r)}(x, y) + \alpha_{2p+1}^{(r)}(x, y) \ge 0,\ \alpha_{2p+1}^{(r)}(x, y) + \alpha_{2p+2}^{(r)}(x, y) \le 0,\\
\beta_{2p}^{(r)}(x, y) + \beta_{2p+1}^{(r)}(x, y) \le 0,\ \beta_{2p+1}^{(r)}(x, y) + \beta_{2p+2}^{(r)}(x, y) \ge 0,\\
V_{2p}^{(r)}(x, y) \le Z_{2p+1}^{(r)}(x, y) \le V_{2p+2}^{(r)}(x, y) \le Z_{2p+3}^{(r)}(x, y) \le V_{2p+3}^{(r)}(x, y) \le\\
\le Z_{2p+2}^{(r)}(x, y) \le V_{2p+1}^{(r)}(x, y) \le Z_{2p}^{(r)}(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}_r,\ r = 1, 2, 3,
\end{gathered} \tag{20}$$

для $\forall p \in \mathbb{N}$, а отже для $\forall p$ $Z_p^{(r)}(x, y), V_p^{(r)}(x, y) \in \overline{B}_1$.

Таким чином справедлива

Теорема 1. *Нехай $F[U(x, y)] \in C_1(\overline{B})$, а вектор–функції нульового наближення $Z_0^{(r)}(x, y)$, $V_0^{(r)}(x, y) \in C(\overline{D}_r)$ задовольняють умови (12).*

Тоді послідовності вектор–функцій $\left\{Z_p^{(r)}(x, y)\right\}$, $\left\{V_p^{(r)}(x, y)\right\}$, побудовані згідно закону (11), при виконанні умов (18), в області $\overline{B}_1$ задовольняють нерівності (20) для $\forall p = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Покажемо, що побудовані послідовності вектор–функцій $\left\{Z_p^{(r)}(x, y)\right\}$, $\left\{V_p^{(r)}(x, y)\right\}$ в області $\overline{D}_r$, $r = 1, 2, 3$, при $p \to \infty$ збігаються рівномірно до єдиного розв'язку відповідного інтегрального рівняння (7).

В силу виконання в області $\overline{B}_1$ нерівностей (20), для цього достатньо показати, що $\lim\limits_{p\to\infty} W_p^{(r)}(x, y) = 0$.

Будемо вважати, що

$$\sup_{i,j} l_{i,j} = l,\ d = \sup_{i,r} \max_{\overline{D}_r} W_{i,0}^{(r)}(x, y),\ q = \sup\left\{1, \max_{\overline{D}}(x - x_1 + y_2 - y)\right\},$$

$$\sup\left\{\sup_{i,r} \max_{\overline{D}_r}[\rho_{i,r}^{-1}(x, y)\rho_{i,r}(\xi, \eta)],\ \sup_i \max_{\overline{D}_2}[\rho_{i,2}^{-1}(x, y)\rho_i(x_1, y_1; \xi, \eta)],\right.$$

$$\left.\sup_i \max_{\overline{D}_3}[\rho_{i,3}^{-1}(x, y)\rho_i^{-1}(\xi, \eta; x_0, y_2)]\right\} = 0,5C.$$

Тоді із (16) методом математичної індукції одержуємо оцінки [3]

$$\left|W_{i,p}^{(r)}(x,y)\right| \leq \frac{[Clnq(x-x_1+y_2-y)]^p}{p!},$$
$$(x,y)\in\overline{D},\ p=0,1,2,...,\ i=\overline{1,n}, \tag{21}$$

а отже, $\lim\limits_{p\to\infty} Z_p^{(r)}(x,y)=\lim\limits_{p\to\infty} V_p^{(r)}(x,y)=U^{(r)}(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}$, $r=1,2,3$.

Щоб переконатися в тому, що граничні вектор–функції $U^{(r)}(x,y)$ у відповідних областях $\overline{D}_r$ є розв'язками інтегральних рівнянь (7), достатньо в (11) перейти до границі, коли $p\to\infty$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді послідовності вектор–функцій* $\left\{Z_p^{(r)}(x,y)\right\}$, $\left\{V_p^{(r)}(x,y)\right\}$, *побудовані згідно закону (11), (12), (18), збігаються рівномірно при* $p\to\infty$ *до єдиного розв'язку* $U^{(r)}(x,y)$ *відповідного інтегрального рівняння (7) при* $(x,y)\in\overline{D}_r$, $r=1,2,3$, *мають місце оцінки (21), а в області* $\overline{B}_1$ *справедливі нерівності*

$$V_{2p}^{(r)}(x,y)\leq Z_{2p+1}^{(r)}(x,y)\leq V_{2p+2}^{(r)}(x,y)\leq Z_{2p+3}^{(r)}(x,y)\leq U^{(r)}(x,y)\leq$$
$$\leq V_{2p+3}^{(r)}(x,y)\leq Z_{2p+2}^{(r)}(x,y)\leq V_{2p+1}^{(r)}(x,y)\leq Z_{2p}^{(r)}(x,y), \tag{22}$$
$$(x,y)\in\overline{D}_r,\ r=1,2,3,$$

для $\forall p\in\mathbb{N}$.

Доведення. Єдиність розв'язку інтегральних рівнянь (7) в областях $\overline{D}_r$ доводиться методом від супротивного. Для доведення справедливості нерівностей (22) припустимо, що для деякого номера $p\in\mathbb{N}$ в деякій точці $(x,y)\in\overline{D}_r$ $Z_{2p+1}^{(r)}(x,y)>U^{(r)}(x,y)$. Тоді на підставі нерівностей (20) в точці $(x,y)\in\overline{D}_r$ $Z_{2(p+\nu)+1}^{(r)}(x,y)\ \geq\ Z_{2p+1}^{(r)}(x,y)\ >\ U^{(r)}(x,y)$ для $\forall\nu\in\mathbb{N}$, а отже послідовність вектор-функцій $\left\{Z_{2(p+\nu)+1}^{(r)}(x,y)\right\}$ при $\nu\to\infty$ в точці $(x,y)\in\overline{D}_r$ не збігається до розв'язку інтегрального рівняння (7) $U^{(r)}(x,y)$, що протирічить доведеному. Аналогічно доводяться всі інші нерівності у (22).

Зауважимо, поскільки розв'язок задачі Г.–Д. (1)— (5) $U(x,y)\equiv U^{(r)}(x,y)$, $(x,y)\in\overline{D}_r$, то при виконанні умов теореми 1 він існує і є єдиним, причому $U(x,y)\in C^*(\overline{D})$, якщо виконуються умови леми 1.

Наслідок 1. *Нехай* $\Psi(y)=\Phi_k(x)=0$, $k=0,1,2$, $F[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$, *причому* $F[U(x,y)]\equiv H[U(x,y);0]$. *Тоді, якщо* $F[0]\leq(\geq)0$ *в області* $\overline{B}$, *то розв'язок задачі Г.–Д. (1)— (5) при* $(x,y)\in\overline{D}$ *задовольняє нерівність* $U(x,y)\geq(\leq)0$.

Відмітимо, що якщо рівняння (1) є скалярним і лінійним, тобто $f[U(x,y)]\equiv$ $\equiv f_1(x,y)+a_3(x,y)U(x,y)$, $a_3(x,y)$, $f(x,y)\in C(\overline{D})$, то для виконання умов наслідку 1 достатньо вважати, що $f_1(x,y)\leq(\geq)0$, а $a_1(x,y)a_2(x,y)+a_{1_x}(x,y)+$ $+a_3(x,y)\geq 0$ при $(x,y)\in\overline{D}$.

Наслідок 2. *Якщо* $F[U(x,y)]\in C_1(\overline{B})$ *і виконуються умови (18), то нерівності (12) є необхідними і достатніми умовами для виконання в області* $\overline{B}$ *нерівностей (13).*

Зауваження 1. *Якщо* $F[U(x,y)] \in C_1(\overline{B})$ *і* $F[U(x,y)] \equiv H[U(x,y);0]$, *то для побудови двосторонніх наближень до розв'язку задачі (1)—(5) достатньо побудувати одну послідовність вектор–функцій* $\left\{Z_p^{(r)}(x,y)\right\}$, *а отже в даному випадку кількість операцій при реалізації двостороннього методу (11), (12), (18) зменшується у двічі.*

Поряд із системою (1) розглянемо квазілінійну систему

$$Z_{xy}(x,y) + A_1(x,y)Z_x(x,y) + A_2(x,y)Z_y(x,y) = \\ = f^{(1)}(x,y,Z(x,y)) \equiv f^{(1)}[Z(x,y)], \tag{23}$$

$Z(x,y) = (z_i(x,y))$—вектор–функція, $f^{(1)} : \overline{B} \to \mathbb{R}^n$, $\overline{B} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Надалі будемо вважати, що матриці $A_1(x,y)$, $A_2(x,y)$ задовольняють умову (6), а:

а)$f[U(x,y)]$, $f^{(1)}[Z(x,y)] \in C_1(\overline{B})$,

б) вектор-функція $f[U(x,y)]$ має в області $\overline{B}$ обмежені частинні похідні першого порядку по всім своїм аргументам, розпочинаючи з третього $\dfrac{\partial f_i[U(x,y)]}{\partial u_j(x,y)} \equiv$ $\equiv b_{i,j}(x,y,U(x,y)) < \infty$, причому для $\forall (x,y,U(x,y)) \in \overline{B}$ виконуються нерівності

$$b_{i,j}(x,y,U(x,y)) + \delta_{i,j}[a_{i,i}^{(1)}(x,y)a_{i,i}^{(2)}(x,y) + a_{i,i_x}^{(1)}(x,y)] \geq 0,\ i,j = \overline{1,n}. \tag{24}$$

в) для всякої вектор–функції $V(x,y) \in C(\overline{B})$

$$f[V(x,y)] \geq f^{(1)}[V(x,y)]. \tag{25}$$

Теорема 3. *Нехай вектор–функції* $f[U(x,y)]$ *і* $f^{(1)}[Z(x,y)]$ *задовольняють умови а)–в). Тоді для розв'язків задач (1)— (5) та (23), (2)—(5) виконуються нерівності* $U(x,y) \leq Z(x,y)$, $(x,y) \in C(\overline{D})$.

Доведення. Згідно теореми 2 розв'язки задач (1)—(5) та (23), (2)—(5) існують і вони єдині, отже, позначивши $U(x,y) - Z(x,y) \equiv W(x,y)$, маємо

$$W_{xy}(x,y) + A_1(x,y)W_x(x,y) + A_2(x,y)W_y(x,y) = \\ = A_3(x,y)W(x,y) + A_4(x,y), \tag{26}$$

де $A_3(x,y) = \left(\widetilde{b}_{i,j}(x,y)\right)$ — матриця, $\widetilde{b}_{i,j}(x,y)$ — похідні $b_{i,j}(x,y,U(x,y))$ при деяких фіксованих значеннях $u_i(x,y) \in \overline{B}$, $A_4(x,y) \equiv f[Z(x,y)] - f^{(1)}[Z(x,y)] > 0$ (в силу (25)).

Очевидно

$$W(x,y_2) = W(x,g_1(x)) = 0,\ x \in [x_1,x_0], \\ W(x,g_2(x)) = 0,\ x \in [x_0,x_2],\ W(x_1,y) = 0,\ y \in [y_1,y_2]. \tag{27}$$

Приймаючи до уваги умови (24), (25), на підставі наслідку 1 розв'язок задачі (26), (27) $W(x,y) \leq 0$ при $(x,y) \in \overline{D}$, тобто $U(x,y) \leq Z(x,y)$, $(x,y) \in C(\overline{D})$.

1. *Маринець В.В.* Про одну крайову задачу для квазілінійного рівняння гіперболічного типу // Наук.вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. — 2009. — Вип.18. — С.85–91.
2. *Коллатц Л.* Функциональный анализ и вычислительная математика. – М.:Мир, 1969. – 448 с.
3. *Маринець В.В.* Деякі підходи до побудови наближеного розв'язку задачі Гурса для систем визначених квазілінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними з аргументом, що відхиляється // Укр.мат.журнал — 1995. —Т.47, №12. — С.1667—1675.
4. *М.О.Перестюк, В.В.Маринець* Теорія рівнянь математичної фізики. — К.:Либідь, 2006. — 424с.
5. *Маринець В.В., Маринець Т.Й., Добридень А.В.* Про одну некласичну задачу теорії рівнянь гіперболічного типу // Праці міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень". — Київ: Інститут кібернетики ім.В.М.Глушкова НАНУ, 2009. — Т.2. — С.79—84.
6. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 456 с.
7. *Курпель Н.С., Шувар Б.А.* Двусторонние операторные неравенства и их применение. — Киев: Наукова думка, 1980. — 268 с.

Одержано 03.11.2009