УДК 517.3

В. Я. Рибак, Ю. Ю. Рубіш (Ужгородський нац. ун-т)

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ДРОБОВИХ ПОХІДНИХ ВІД ПЕРІОДИЧНИХ ТА ПОКАЗНИКОВИХ ФУНКЦІЙ

The derivatives of fractional order are examined from periode functions. It is shown that at the large enough values of argument such derivatives behave as almost periodie functions.

Розглядаються похідні дробового порядку від періодичних функцій. Показано, що при достатньо великих значеннях аргументу такі похідні ведуть себе як майже періодичні функції.

Питання про те, як поведуть себе похідні дробового порядку від періодичних функцій при змінюванні аргумента x, є цілком закономірним. Відомо, що при натуральному диференціюванні періодичних функцій вони залишаються періодичними. Але коли мова йде про дробові похідні від цих функцій на скінченному проміжку, то можна лише сказати, що вони залишаються знакозмінними, – до такого висновку можна прийти, виконавши нескладну перевірку.

Подібної ж уваги заслуговують і показникові функції, натуральне диференціювання яких також не змінює їх вигляду.

В наступному викладі використовуються такі позначення [1, 2]:

$$D^{-r}f(x)\mid_0^x=\frac{1}{\Gamma(r)}\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{r-1}dt;$$

$$D^{r}f(x)\mid_0^x=\frac{1}{\Gamma(\rho)}\left(\frac{d}{dx}\right)^m\int\limits_0^x f(t)(x-t)^{\rho-1}dt,$$

де $D^r f(x)\mid_0^x$ та $D^{-r}f(x)\mid_0^x$ – похідна та інтеграл дробового порядку r Рімана-Ліувіля відповідно; $f(x)$ – інтегровна за Лебегом функція; $m=r+\rho$, $m\in N$, $0\le\rho<1$.

Теорема 1. *Для достатньо великих x, $r>-1$, $\lambda=p+i\omega$, $p>0$ справедливе асимптотичне подання*

$$D^r e^{\lambda x}\mid_0^x\sim e^{\lambda x}(p^2+\omega^2)^{\frac{r}{2}}e^{ir\theta}-\frac{1}{\lambda x^{l+r}\Gamma(-r)}\left(1+O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right),\ x\to\infty, \qquad (1)$$

де $\operatorname{tg}\theta=\frac{\omega}{p}$, $i=\sqrt{-1}$.

Доведення. Скористаємось відомими інтегралами[1]

$$\int\limits_0^\infty t^{r-1}e^{-pt}\cos\omega t dt=\frac{\Gamma(r)\cos r\theta}{(p^2+\omega^2)^{\frac{r}{2}}},\ p,r>0,$$

$$\int\limits_0^\infty t^{r-1}e^{-pt}\sin\omega t dt=\frac{\Gamma(r)\sin r\theta}{(p^2+\omega^2)^{\frac{r}{2}}},\ p,r,\omega>0. \qquad (2)$$

[1] Г. Б. Двайт. Таблицы интегралов и другие математические формулы / Перев. с англ. – М.: Наука, 1964. – 228 с.

Очевидно, що їм можна надати і такого вигляду:

$$\int_0^\infty t^{r-1}e^{-\lambda t}dt = \frac{\Gamma(r)}{(p^2+\omega^2)^{\frac{r}{2}}}e^{-ir\theta},\ \lambda = p + i\omega. \tag{3}$$

Далі переписуємо (3) як суму двох інтегралів:

$$\int_0^\infty t^{r-1}e^{-\lambda t}dt = \int_0^x t^{r-1}e^{-\lambda t}dt + \int_x^\infty t^{r-1}e^{-\lambda t}dt.$$

Розгортаємо у ряд $e^{-\lambda t}$ та обчислюємо перший інтеграл у правій частині.

$$\int_0^\infty t^{r-1}e^{-\lambda t}dt = \sum_{k=0}^\infty (-\lambda)^k \frac{x^{r+k}}{(r+k)\cdot k!} = \Gamma(r)\sum_{k=0}^\infty \binom{-r}{k}\lambda^k \frac{x^{r+k}}{\Gamma(r+k+1)}.$$

Вираз дійсний для $0 \le x < \infty$. Безпосередньою перевіркою можна переконатись, що

$$\sum_{k=0}^\infty \binom{-r}{k}\lambda^k \frac{x^{r+k}}{\Gamma(r+k+1)} = e^{-\lambda t}D^{-r}\ |_0^x\ . \tag{4}$$

Другий інтеграл допускає асимптотичний розклад при $x > 0$. Повторним інтегруванням частинами знаходимо

$$\int_x^\infty t^{r-1}e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda x}\sum_{j=1}^n \frac{x^{r-k}}{\lambda^k}\frac{\Gamma(r)}{\Gamma(r+1-k)} + \frac{\Gamma(r)}{\lambda^n\Gamma(r-n)}\int_x^\infty t^{r-1-n}e^{-\lambda t}dt.$$

Для залишкового члена передбачаючи $n+1>r$, одержуємо оцінку

$$\int_x^\infty t^{r-1-n}e^{-\lambda t}dt = \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda x^{n+1-r}} - \frac{n+1-r}{\lambda}\int_x^\infty t^{r-2-n}e^{-\lambda t}dt < \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda x^{n+1-r}},$$

яка прямує до нуля при $x \to \infty$. Тобто

$$\int_x^\infty t^{r-1}e^{-\lambda t}dt \sim \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda x^{1-r}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right). \tag{5}$$

Переписуємо (3), враховуючи (4) та останній результат.

$$\frac{\Gamma(r)}{(p^2+\omega^2)^{\frac{r}{2}}}e^{-ir\theta} \sim \Gamma(r)e^{-i\lambda\theta}D^{-r}e^{\lambda x}\ |_0^x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda x^{1-r}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right). \tag{6}$$

Якщо інтеграли (2) існують лише при $r > 0$, то зображення (6) справедливе для $-\infty < r < 1$, що можна показати нескладним аналізом. Після зміни знаку r знаходимо

$$e^{ir\theta}(p^2+\omega^2)^{\frac{r}{2}}e^{\lambda x} \sim D^r e^{\lambda x}\ |_0^x + \frac{1}{\lambda x^{1+r}\Gamma(-r)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda x}\right)\right),\ r > -1, \tag{7}$$

що і треба було довести.

Наслідок 1. *Після відокремлення дійсної та уявної частини* (1) *маємо при* $x \to \infty$ *та* $r > -1$:

$$D^r(e^{px}\cos\omega x)\mid_0^x \sim (p^2+\omega^2)^{\frac{r}{2}} e^{px}\cos\left(\omega x + r\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{p}\right) -$$

$$-\frac{p}{(p^2+\omega^2)x^{1+r}\Gamma(-r)}\left(1+O\left(\frac{1}{(p^2+\omega^2)x}\right)\right); \tag{8}$$

$$D^r(e^{px}\cos\omega x)\mid_0^x \sim (p^2+\omega^2)^{\frac{r}{2}} e^{px}\sin\left(\omega x + r\,\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{p}\right) +$$

$$+\frac{\omega}{(p^2+\omega^2)x^{1+r}\Gamma(-r)}\left(1+O\left(\frac{1}{(p^2+\omega^2)x}\right)\right); \tag{9}$$

$$D^r e^{px}\mid_0^x \sim \begin{cases} p^r e^{px} - \frac{1}{px^{1+r}\Gamma(-r)}\left(1+O\left(\frac{1}{px}\right)\right),\ p>0; \\ 0,\ p<0. \end{cases} \tag{10}$$

Неважко переконатися, що формули (8) та (9) справедливі і при $p = 0$. Для цього випадку

$$\lim_{p\to 0}\mathrm{arctg}\,\frac{\omega}{p} = \frac{\pi}{2}.$$

$$D^r\cos\omega x\mid_0^x \sim \omega^r\cos\left(\omega x+\frac{\pi r}{2}\right) - \frac{r+1}{\omega^2 x^{2+r}\Gamma(-r)}\left(1+O\left(\frac{1}{\omega^2x^2}\right)\right); \tag{11}$$

$$D^r\sin\omega x\mid_0^x \sim \omega^r\sin\left(\omega x+\frac{\pi r}{2}\right) - \frac{1}{\omega^2 x^{1+r}\Gamma(-r)}\left(1+O\left(\frac{1}{\omega^2x^2}\right)\right). \tag{12}$$

Наслідок 2. *При* $x \to \infty$ *дробове диференціювання функцій* e^{px} $(p > 0)$, $\sin\omega x$, $\cos\omega x$ *та розглянутих вище їх комбінацій за тими ж правилами, що і натуральне диференціювання.*

На рис. 1 показано графіки перебігу залежності похідної $D^{0,5}(e^{0,2x}\sin 1,5x)\mid_0^x$ на проміжку $[0,4]$, побудовані на основі точного виразу (суцільна крива) та асимптотичної формули (9) (пунктирна лінія). Помітно добра пристайність кривих вже у межах першого періоду синусоїди.

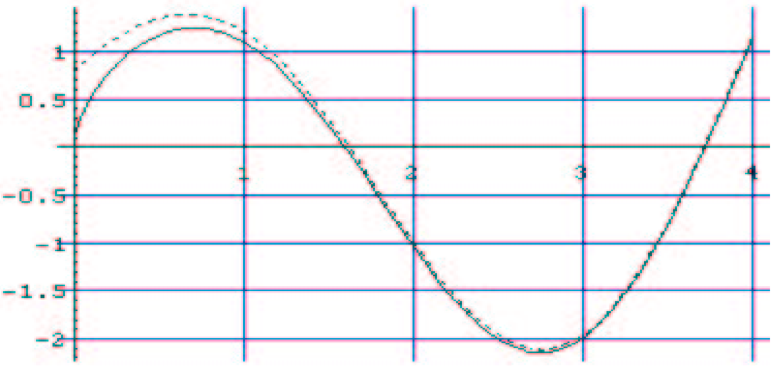

Рис. 1

Теорема 2. *Якщо періодична функція $f(x)$ має неперервні похідні до $(m-1)$-го поярдку включно, а похідна m-го порядку ($m \in N$) відповідає на $[0, 2\pi]$ умовам Діріхле, то її похідна дробового порядку $D^r f(x) \mid_0^x$ при $0 < r \le m-1$ і достатньо великих x веде себе як майже періодична функція.*

Доведення. Розгортаємо $f(x)$ у ряд Фур'є (див. [3]):

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx. \tag{13}$$

Приймаючи до уваги (11) та (12), одержуємо

$$D^r f(x) \mid_0^x \sim \frac{1}{2}a_0 \frac{x^{-r}}{\Gamma(1-r)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k^r \left[\cos\left(kx + \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{r+1}{k^2 x^{2+r}\Gamma(-r)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\omega^2 x^2}\right)\right)\right] +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k^r \left[\sin\left(kx + \frac{\pi r}{2}\right) + \frac{r+1}{k x^{1+r}\Gamma(-r)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\omega^2 x^2}\right)\right)\right].$$

Тобто

$$D^r f(x) \mid_0^x \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k^r \cos\left(kx + \frac{\pi r}{2}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot k^r \sin\left(kx + \frac{\pi r}{2}\right), \ x \to \infty. \tag{14}$$

Обмеження верхньої межі порядку похідної значенням $r \le m-1$ диктується умовами збіжності ряду (14). Теорема доведена.

1. *Вірченко Н. О., Рибак В. Я.* Основи дробового інтегро-диференціювання: Навч. посібник. – К., 1986. – 364 с.
2. *Рибак В. Я.* Про означення і деякі властивості похідних та інтегралів дробового порядку // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2004. – Вип. 9. – С. 45–57.
3. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. – М.: Наука, 1965. – Т. 2. – 655 с.

Одержано 27.11.2009