УДК 512.547.25

М. В. Стойка (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ДИКІ СКІНЧЕННІ 2-ГРУПИ НАД ЛОКАЛЬНИМИ ФАКТОРІАЛЬНИМИ КІЛЬЦЯМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ НУЛЬ

It is making up clear, when the problem of description of non-equivalent matrix representations of 2-group G of order $|G| > 1$ over a noetherian local factorial ring of characteristic zero residue class field of characteristic 2 is wild.

Виясняється, коли задача описання нееквівалентних матричних зображень 2-групи G порядку $|G| > 1$ над нетеровим локальним факторіальним кільцем характеристики нуль з полем лишків характеристики 2 є дикою.

Скінченна група G називається дикою над комутативним кільцем R з одиницею, якщо описання нееквівалентних матричних R-зображень групи G включає задачу про класифікацію з точністю до подібності пар $n \times n$-матриць над деяким полем (n — довільне натуральне число). Задача про дикість скінченної p-групи G над локальною областю цілісності R характеристики нуль з полем лишків характеристики p розв'язана в таких випадках:

1) R — кільце цілих p-адичних чисел $[1, 2]$;

2) R — повне дискретно нормоване кільце [1–5];

3) R — кільце формальних степеневих рядів від m змінних з коефіцієнтами з кільця цілих P-адичних чисел $[6, 7]$;

4) R — локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики p ($\varepsilon \in R, \varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1$) і виконуються одна із таких умов:
а) $p > 3$;
б) G — 3-група порядку $|G| > 3$;
в) R — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, G — нециклічна 2-група або циклічна 2-група порядку $|G| > 4$ [8];
г) R — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, G — 2-група порядку $|G| > 2$ [9];

5) R — нетерова локальна область цілісності характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, R не є дискретно нормованим кільцем, G — циклічна група порядку 4 і виконується одна із таких умов:
а) 2 — не простий елемент кільця R;
б) факторкільце $R/2R$ не є кільцем головних ідеалів [10].

В даній роботі досліджується дикість скінченної циклічної 2-групи над нетеровим локальним факторіальним кільцем характеристики нуль з полем лишків характеристики 2.

Теорема 1 ([9]). *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 2$ і K — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Група G є дикою над кільцем K, якщо K не є дискретно нормованим кільцем.*

Теорема 2 ([9]). *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 1, K$ — локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2. Якщо K не дискретно нормоване кільце і $2 = \theta t_1^e (\theta \in K^*, e > 1)$*

або $2 = \theta t_1^{r_1} ... t_s^{r_s}$, *де* K^* *— мультиплікативна група кільця* K, $t_1, ..., t_s$ *— різні прості елементи кільця* $K, s \geq 2$ *і* $r_1 + ... + r_s > 2$, *то група* G *є дикою над кільцем* K.

Лема 1. *Нехай* $H = \langle a | \, a^2 = e \rangle$, K *— нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики* 2, 2 *— простий елемент кільця* K. *Нехай* $K/2K$ *не є областю головних ідеалів. Тоді група* H *є дикою над кільцем* K.

Доведення. Оскільки $K/2K$ не є областю головних ідеалів, то існують такі $\bar{u}$, $\bar{v}$ із $\overline{K} = K/2K$, що $\overline{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ не є головним ідеалом кільця $\overline{K}$. Нехай $V = \langle u, v \rangle$, де $(u, v) = 1$, $\bar{u} = u + 2K$, $\bar{v} = v + 2K$.

Розглянемо наступне відображення:

$$\Gamma(A, B) : a \to \begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A, B),$$

де

$$D(A, B) = \begin{pmatrix} uvE & u^2A & 0 \\ v^2E & uvE & u^2B \\ 0 & v^2E & uvE \end{pmatrix},$$

A, B — довільні матриці порядку n над кільцем K, E — одинична матриця порядку n. Очевидно, $\Gamma(A, B)$ є K-зображенням групи H.

Нехай K-зображення $\Gamma(A, B)$ та $\Gamma(A', B')$ є K-еквівалентними, тобто існує така матриця $C \in GL(6n, K)$, що

$$\Gamma_a(A, B)C = C\Gamma_a(A', B'), \tag{1}$$

де $C = \|C_{ij}\|$, C_{ij} — $n \times n$-матриці над K $(1 \leqslant i, j \leqslant 6)$.

Запишемо (1) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ 0 & C_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & D(A', B') \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

де

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{34} & C_{35} & C_{36} \end{pmatrix}, C_4 = \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix}.$$

Звідси отримаємо, що

$$D(A, B)C_4 = C_1 D(A', B') + 2C_2,$$

звідки випливає:

$$\begin{pmatrix} uvE & u^2A & 0 \\ v^2E & uvE & u^2B \\ 0 & v^2E & uvE \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} uvE & u^2A' & 0 \\ v^2E & uvE & u^2B' \\ 0 & v^2E & uvE \end{pmatrix} + 2C_2.$$

Звідси одержимо, що

$$\begin{pmatrix} uvC_{44}+u^2AC_{54} & uvC_{45}+u^2AC_{55} & uvC_{46}+u^2AC_{56} \\ v^2C_{44}+uvC_{54}+u^2BC_{64} & v^2C_{45}+uvC_{55}+u^2BC_{65} & v^2C_{46}+uvC_{56}+u^2BC_{66} \\ v^2C_{54}+uvC_{64} & v^2C_{55}+uvC_{65} & v^2C_{56}+uvC_{66} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} uvC_{11}+v^2C_{12} & u^2C_{11}A'+uvC_{12}+v^2C_{13} & u^2C_{12}B'+uvC_{13} \\ uvC_{21}+v^2C_{22} & u^2C_{21}A'+uvC_{22}+v^2C_{23} & u^2C_{22}B'+uvC_{23} \\ uvC_{31}+v^2C_{32} & u^2C_{31}A'+uvC_{32}+v^2C_{33} & u^2C_{32}B'+uvC_{33} \end{pmatrix} + 2C_2.$$

Звідки дістаємо:

$$v^2C_{54}+uvC_{64} = uvC_{31}+v^2C_{32}+2C_{34}, \tag{2}$$

$$v^2C_{44}+uvC_{54}+u^2BC_{64} = uvC_{21}+v^2C_{22}+2C_{24}, \tag{3}$$

$$uvC_{44}+u^2AC_{54} = uvC_{11}+v^2C_{12}+2C_{14}, \tag{4}$$

$$v^2C_{55}+uvC_{65} = u^2C_{31}A'+uvC_{32}+v^2C_{33}+2C_{35}, \tag{5}$$

$$v^2C_{45}+uvC_{55}+u^2BC_{65} = u^2C_{21}A'+uvC_{22}+v^2C_{23}+2C_{25}, \tag{6}$$

$$uvC_{45}+u^2AC_{55} = u^2C_{11}A'+uvC_{12}+v^2C_{13}+2C_{15}, \tag{7}$$

$$v^2C_{56}+uvC_{66} = u^2C_{32}B'+uvC_{33}+2C_{36}, \tag{8}$$

$$v^2C_{46}+uvC_{56}+u^2BC_{66} = u^2C_{22}B'+uvC_{23}+2C_{26}, \tag{9}$$

$$uvC_{46}+u^2AC_{56} = u^2C_{12}B'+uvC_{13}+2C_{16}. \tag{10}$$

Із (3) маємо:

$$uv(C_{21}-C_{54})+v^2(C_{22}-C_{44}) = u^2BC_{64}+2C_{24}, \tag{11}$$

а з (4) матимемо:

$$u^2AC_{54} = uv(C_{11}-C_{44})+v^2C_{12}+2C_{14}. \tag{12}$$

З (4)–(12) одержимо:

$$\begin{gathered} C_{22}\equiv C_{44}(\mathrm{mod} RadK), \quad C_{22}\equiv C_{55}(\mathrm{mod} RadK), \\ C_{12}\equiv 0(\mathrm{mod} RadK), \quad C_{13}\equiv 0(\mathrm{mod} RadK), \\ C_{11}\equiv C_{44}(\mathrm{mod} RadK), \quad C_{11}A'\equiv AC_{55}(\mathrm{mod} RadK), \\ C_{33}\equiv C_{55}(\mathrm{mod} RadK), \quad C_{33}\equiv C_{66}(\mathrm{mod} RadK), \\ C_{22}B'\equiv BC_{66}(\mathrm{mod} RadK). \end{gathered} \tag{13}$$

Отже, з (13) маємо:

$$C_{22}\equiv C_{44}\equiv C_{11}\equiv C_{33}\equiv C_{55}\equiv C_{66}(\mathrm{mod} RadK),$$

$$C_{12}\equiv C_{13}\equiv 0(\mathrm{mod} RadK),$$

$$C_{11}A'\equiv AC_{11}(\mathrm{mod} RadK), \tag{14}$$

$$C_{11}B'\equiv BC_{11}(\mathrm{mod} RadK). \tag{15}$$

Очевидно, C_{11} — оборотна матриця над кільцем K. З (14), (15) випливає доведення леми.

Теорема 3. *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 1$, K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, 2 — простий елемент кільця K. Нехай $K/2K$ не є областю головних ідеалів. Тоді група G є дикою над кільцем K.*

Доведення теореми випливає із леми 1.

Лема 2. *Нехай K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, $2 = t_1 \cdot t_2$, де t_1, t_2 — різні прості елементи кільця K, $t_1 \neq \theta \cdot t_2$ $(\theta \in K^*)$. Нехай K/t_1K не є областю головних ідеалів. Тоді існують такі елементи $\bar{u}, \bar{v}$ із кільця $\overline{K}_1 = K/t_1K$, що $\overline{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ не буде головним ідеалом кільця $\overline{K}_1$. Нехай $\bar{u} = u + t_1K, \bar{v} = v + t_1K$, $(u, v \in K)$. Тоді $(u, t_1) = 1$, $(v, t_1) = 1$.*

Доведення. Розглянемо $u = u_1d$, $v = v_1d$, де $(u_1, v_1) = 1$ $(u_1, v_1, d \in K)$.

Очевидно, ідеал $V_1 = \langle u_1, v_1 \rangle$ не є головним в K, бо якщо $V_1 = Kt$ $(t \in K^*)$, то $u_1 = \alpha_1 t, v_1 = \beta_1 t$ $(\alpha_1, \beta_1 \in K)$, тобто u_1 і v_1 не взаємно прості.

Нехай $V_1 = K$, $1 = \alpha_1 u_1 + \beta_1 v_1 (\alpha_1, \beta_1 \in K)$.

Тоді $d = \alpha_1 d u_1 + \beta_1 d v_1 = \alpha_1 u + \beta_1 v \in V = Ku + Kv$, звідки $V = Kd$.

Позначимо $u = \lambda_1 d, v = \lambda_2 d$ $(\lambda_1, \lambda_2 \in K)$. Тоді матимемо $\bar{u} = \lambda_1 d + t_1 K, \bar{v} = \lambda_2 d + t_1 K$, тобто

$$\bar{u} = (\lambda_1 + t_1K)(d + t_1K),$$

$$\bar{u} = (\lambda_2 + t_1K)(d + t_1K),$$

де $\bar{d} = d + t_1K \in \overline{V}$.

Значить, $\overline{V}$ — головний ідеал. Протиріччя.

Отже, $V_1 \neq K$ і $V_1 \neq Kt$, тобто V_1 не є головним ідеалом.

Тоді $(u, t_1) = 1, (v, t_1) = 1$. Лема доведена.

Лема 3. *Нехай K — локальне кільце, t_1— простий елемент кільця K. Тоді K/t_1K— локальне кільце.*

Доведення. Розглянемо $\bar{v} = v + t_1K (v \in K)$. Нехай $\bar{v}$ не є оборотним елементом і $\bar{1} - \bar{v}$ $(\bar{1} = 1 + t_1K)$ не є оборотним елементом $\overline{K}_1$.

Тоді $1 - v + t_1K = \overline{w} \notin (K/t_1K)^*$, $v + t_1x \in K((K/t_1K)^*$ — мультиплікативна група факторкільця K/t_1K, $x \in K)$. *Якщо* $v \in K^*$, то $v + t_1x \in K^*$. Отже $\bar{v} \in (K/t_1K)^*$.

Нехай $v \in RadK$, $1 - v \in K^*$. Тоді $1 - v + t_1K \in (K/t_1K)^*$. Протиріччя.

Отже, K/t_1K — локальне кільце. Лема доведена.

Лема 4. *Нехай $H = \langle a | \, a^2 = e \rangle$, K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, $2 = t_1 \cdot t_2$, де t_1, t_2 — різні прості елементи кільця K, $t_1 \neq \theta \cdot t_2 (\theta \in K^*)$ і K/t_1K не є областю головних ідеалів. Тоді група H є дикою над кільцем K.*

Доведення. Нехай K/t_1K не є областю головних ідеалів. Тоді існують такі елементи $\bar{u}, \bar{v}$ із $\overline{K}_1 = K/t_1K$, що $\overline{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ не буде головним ідеалом кільця $\overline{K}_1$. Поставимо $u = t_2$. Можна підібрати такий ідеал $V = \langle t_2, v \rangle$ кільця K, що $(t_2, v) = 1$.

Розглянемо наступне відображення:

$$\Gamma(A, B) : a \to \begin{pmatrix} -E & D(A, B) \\ 0 & E \end{pmatrix} = \Gamma_a(A, B),$$

де $D(A,B)=\begin{pmatrix} vt_2E & t_2^2A & 0\\ v^2E & vt_2E & t_2^2B\\ 0 & v^2E & vt_2E\end{pmatrix}$, A,B — довільні матриці порядку n над K, E — одинична матриця порядку n.

Очевидно, $\Gamma(A,B)$ є K-зображенням групи H.

Нехай зображення $\Gamma(A,B)$ і $\Gamma(A',B')$ є K-еквівалентні, тобто існує така матриця $C\in GL(6n,K)$, що

$$\Gamma_a(A,B)C=C\Gamma_a(A',B'), \tag{16}$$

де $C=\|C_{ij}\|$, C_{ij} — $n\times n$-матриці над K $(1\leqslant i,j\leqslant 6)$.

Запишемо (16) у вигляді:

$$\begin{pmatrix} -E & D(A,B)\\ 0 & E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2\\ 0 & C_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 & C_2\\ 0 & C_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -E & D(A',B')\\ 0 & E\end{pmatrix},$$

де

$$C_1=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}, C_2=\begin{pmatrix} C_{14} & C_{15} & C_{16}\\ C_{24} & C_{25} & C_{26}\\ C_{34} & C_{35} & C_{36}\end{pmatrix}, C_4=\begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ C_{54} & C_{55} & C_{56}\\ C_{64} & C_{65} & C_{66}\end{pmatrix}.$$

Звідси дістаємо, що

$$D(A,B)C_4=C_1D(A',B')+2C_2,$$

$$\begin{pmatrix} vt_2E & t_2^2A & 0\\ v^2E & vt_2E & t_2^2B\\ 0 & v^2E & vt_2E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_{44} & C_{45} & C_{46}\\ C_{54} & C_{55} & C_{56}\\ C_{64} & C_{65} & C_{66}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} vt_2E & t_2^2A' & 0\\ v^2E & vt_2E & t_2^2B'\\ 0 & v^2E & vt_2E\end{pmatrix}+2C_2.$$

Звідки одержуємо, що

$$\begin{pmatrix} vt_2C_{44}+t_2^2AC_{54} & vt_2C_{45}+t_2^2AC_{55} & vt_2C_{46}+t_2^2AC_{56}\\ v^2C_{44}+vt_2C_{54}+t_2^2BC_{64} & v^2C_{45}+vt_2C_{55}+t_2^2BC_{65} & v^2C_{46}+vt_2C_{56}+t_2^2BC_{66}\\ v^2C_{54}+vt_2C_{64} & v^2C_{55}+vt_2C_{65} & v^2C_{56}+vt_2C_{66}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} vt_2C_{11}+v^2C_{12} & t_2^2C_{11}A'+vt_2C_{12}+v^2C_{13} & t_2^2C_{12}B'+vt_2C_{13}\\ vt_2C_{21}+v^2C_{22} & t_2^2C_{21}A'+vt_2C_{22}+v^2C_{23} & t_2^2C_{22}B'+vt_2C_{23}\\ vt_2C_{31}+v^2C_{32} & t_2^2C_{31}A'+vt_2C_{32}+v^2C_{33} & t_2^2C_{32}B'+vt_2C_{33}\end{pmatrix}+2C_2.$$

Отже,

$$v^2C_{54}+vt_2C_{64}=vt_2C_{31}+v^2C_{32}+2D_1, \tag{17}$$

$$vt_2C_{21}+v^2C_{22}=v^2C_{44}+vt_2C_{54}+t_2^2BC_{64}+2D_2, \tag{18}$$

$$vt_2C_{11}+v^2C_{12}=vt_2C_{44}+t_2^2AC_{54}+2D_3, \tag{19}$$

$$t_2^2C_{31}A'+vt_2C_{32}+v^2C_{33}=v^2C_{55}+vt_2C_{65}+2D_4, \tag{20}$$

$$t_2^2C_{21}A'+vt_2C_{22}+v^2C_{23}=v^2C_{45}+vt_2C_{55}+t_2^2BC_{65}+2D_5, \tag{21}$$

$$t_2^2C_{11}A' + vt_2C_{12} + v^2C_{13} = vt_2C_{45} + t_2^2AC_{55} + 2D_6, \tag{22}$$

$$t_2^2C_{32}B' + vt_2C_{33} = v^2C_{56} + vt_2C_{66} + 2D_7, \tag{23}$$

$$t_2^2C_{22}B' + vt_2C_{23} = v^2C_{46} + vt_2C_{56} + t_2^2BC_{66} + 2D_8, \tag{24}$$

$$t_2^2C_{12}B' + vt_2C_{13} = vt_2C_{46} + t_2^2AC_{56} + 2D_9, \tag{25}$$

де

$$D_1 = C_{34}, D_2 = -C_{24}, D_3 = -C_{14}, D_4 = -C_{35},$$

$$D_5 = -C_{25}, D_6 = -C_{15}, D_7 = -C_{36}, D_8 = -C_{26}, D_9 = -C_{16}.$$

Із (18) матимемо:

$$vt_2C_{21} + v^2C_{22} = v^2C_{44} + vt_2C_{54} + t_2^2BC_{64} + t_1t_2D_2, \tag{26}$$

$$vt_2(C_{21} - C_{54}) + v^2(C_{22} - C_{44}) = t_2^2BC_{64} + t_1t_2D_2.$$

Звідки дістанемо, що

$$C_{22} \equiv C_{44}(\mathrm{mod} RadK). \tag{27}$$

Із (19) отримаємо, що

$$vt_2C_{11} + v^2C_{12} = vt_2C_{44} + t_2^2AC_{54} + t_1t_2D_3,$$

$$C_{12} \equiv 0(\mathrm{mod} RadK), \tag{28}$$

$$v(C_{11} + vC_{12} - C_{44}) = t_2AC_{54} + t_1D_3. \tag{29}$$

Нехай $C_{11} + vC_{12} - C_{44} \equiv 0(\mathrm{mod} RadK)$. Тоді із (29) матимемо $\bar{v} \cdot \bar{\theta} = \bar{t}_2 \cdot \bar{x}_1$ $(\bar{x}_1 \in \overline{K}_1)$. Оскільки $\theta \in K^*$, то $\bar{\theta} \in (K/t_1K)^*$.

Значить, $\bar{v} = \bar{\theta}^{-1}\bar{t}_2\bar{x}_1 = \bar{t}_2\bar{x}_2 = \bar{u}\bar{x}_2$. Протиріччя, бо $\overline{V} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ не є головним ідеалом.

Отже,

$$C_{11} + vC_{12} - C_{44} \equiv 0(\mathrm{mod} RadK). \tag{30}$$

Із (20) матимемо:

$$t_2^2C_{31}A' + vt_2C_{32} + v^2C_{33} = v^2C_{55} + vt_2C_{65} + t_1t_2D_4,$$

звідси одержимо, що

$$C_{33} \equiv C_{55}(\mathrm{mod} RadK). \tag{31}$$

Із (21) маємо:

$$t_2^2C_{21}A' + vt_2C_{22} + v^2C_{23} = v^2C_{45} + vt_2C_{55} + t_2^2BC_{65} + t_1t_2D_5,$$

звідки дістанемо, що

$$t_2^2C_{21}A' + vt_2(C_{22} - C_{55}) = v^2(C_{45} - C_{23}) + t_2^2BC_{65} + t_1t_2D_5,$$

$$t_2C_{21}A' + v(C_{22} - C_{55} - vx) = t_2BC_{65} + t_1D_5,$$

$$v(C_{22} - C_{55} - vx) = t_2x + t_1D_5.$$

Аналогічними міркуваннями, як у випадку (29), одержуємо, що

$$C_{22} \equiv C_{55} (\mathrm{mod} RadK). \tag{32}$$

Із (22) дістанемо, що

$$t_2^2 C_{11} A' + v t_2 (C_{12} - C_{45}) + v^2 C_{13} = t_2^2 A C_{55} + t_1 t_2 D_6,$$

звідси випливає, що

$$C_{13} \equiv 0 (\mathrm{mod} RadK), \tag{33}$$

$$t_2 (C_{11} A' - A C_{55}) - v (C_{12} - C_{45} + v C_{13}) = t_1 D_6,$$

$$t_2 (C_{11} A' - A C_{55}) = v x + t_1 D_6.$$

Нехай $C_{11} A' - A C_{55} \equiv 0 (\mathrm{mod} RadK)$. Тоді матимемо, що

$$\bar{t}_2 \bar{\theta} = \bar{v} \bar{x},$$

звідки отримаємо, що

$$\bar{t}_2 = \bar{v} \bar{y} (\bar{y} = \bar{x} \bar{\theta}^{-1}),$$

що привело до протиріччя з визначенням t_2.

Отже,

$$C_{11} A' - A C_{55} \equiv 0 (\mathrm{mod} RadK). \tag{34}$$

Із (23) одержимо:

$$t_2^2 C_{32} B' + v t_2 (C_{33} - C_{66} - v C_{56}) = t_1 t_2 D_7,$$

$$t_2^2 C_{32} B' + v t_2 (C_{33} - C_{66}) = t_2 v^2 C_{56} + t_1 t_2 D_7,$$

$$C_{56} \equiv 0 (\mathrm{mod} RadK).$$

Аналогічними міркуваннями, як у випадку (29), одержуємо, що

$$C_{33} \equiv C_{66} (\mathrm{mod} RadK). \tag{35}$$

З (24) отримаємо:

$$t_2^2 C_{22} B' + v t_2 C_{23} = v^2 C_{46} + v t_2 C_{56} + t_2^2 B C_{66} + t_1 t_2 D_8,$$

$$t_2^2 (C_{22} B' - B C_{66}) + t_2 v (C_{23} - C_{56}) = v^2 C_{46} + t_1 t_2 D_8,$$

звідси дістанемо, що

$$C_{22} B' \equiv B C_{66} (\mathrm{mod} RadK). \tag{36}$$

Із (27), (28), (31)–(36) одержуємо:

$$C_{22} \equiv C_{44} \equiv C_{11} \equiv C_{33} \equiv C_{55} \equiv C_{66} (\mathrm{mod} RadK),$$

$$C_{12} \equiv C_{13} \equiv 0 (\mathrm{mod} RadK),$$

$$C_{11} A' \equiv A C_{11} (\mathrm{mod} RadK),$$

$$C_{11} B' \equiv B C_{11} (\mathrm{mod} RadK).$$

Отже, задача описання матричних K-зображень групи H є дикою. Лема доведена.

Теорема 4. *Нехай G — скінченна 2-група порядку $|G| > 1$, K — нетерове локальне факторіальне кільце характеристики нуль з полем лишків характеристики 2, $2 = t_1 \cdot t_2$, де t_1, t_2 — різні прості елементи кільця K, $t_1 \neq \theta \cdot t_2 (\theta \in K^*)$ і K/t_1K не є областю головних ідеалів. Тоді група G є дикою над кільцем K.*

Доведення теореми випливає із леми 4.

1. *Гудивок П. М.* О модулярных и целочисленных представлениях конечных групп // ДАН СССР. – 1974. – **214**, №5. – С. 993–996.
2. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96–105.
3. *Гудивок П. М.* О представлениях прямого произвидения групп над полными дискретно нормированными кольцами // ДАН СССР. – 1977. – **237**, №1. – С. 25–27.
4. *Гудивок П.М.* Целочисленные представления конечных групп и задача о паре матриц // Сб. “Материалы XXIX науч. конф. проф.-препод. состава УжГУ”. Секция мат. наук. – Ужгород: Ужгород. ун-т, 1975. – С. 231–240. – Деп. в ВИНИТИ, №705–76.
5. *Dieterich E.* Group rings of wild representation type // Math. Annn. – 1983. – **266**, №1. – P. 1–22.
6. *Гудивок П. М., Орос В. М., Ройтер А. В.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми p-адическими коэффициентами // Укр. мат. ж. – 1992. – **44**, №6. – С. 753–765.
7. *Бондаренко В.М., Гудивок П. М.* О представлениях конечных p-групп над кольцом формальных степенных рядов с целыми P-адическими коэффициентами // Сб. "Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры". – Киев: Ин-т матем. НАН Украины, 1983. – С. 5–14.
8. *Гудивок П. М., Кіндюх С. П.* Про матричні зображення скінченних p-груп над областями цілісності характеристики нуль // Наук. вісник Ужгород. ун-ту, Сер. матем. і інформ. – 2005. – Вип. 10–11. – С. 49–56.
9. *Гудивок П. М., Кіндюх С. П.* Про матричні зображення скінченних 2-груп над локальними областями цілісності характеристики нуль // Науковий вісник Ужгород. ун-ту, Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. 12–13. – С. 59–64.
10. *Гудивок П. М., Кіндюх С. П.* Про дикі скінченні 2-групи над локальними областями цілісності характеристики нуль // Науковий вісник Ужгород. ун-ту, Сер. матем. і інформ. – 2009. – Вип. 18. – С. 54–61.

Одержано 15.10.2009