УДК 517.9

Н. Н. Щобак (Ужгородский нац. ун-т)

ОБ ИССЛЕДОВАНИИ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ТИПА ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

We obtain some results concerning the investigation of non-linear boundary value problems with multi-point boundary conditions of interpolation type on some of variables. We show that it is useful to reduce the given boundary value problem, using an appropriate substitution, to a parametrized two-point boundary value problem containing some unknown parameters in the boundary conditions. To study the transformed parametrized problem, we use a method which is based upon special types of successive approximations constructed in an analytic form. The parametrized problem should be investigated together with certain so-called determining equations, which have algebraic or transcendental form.

Получаем результаты касающиеся исследования нелинейных краевых задач с многоточечными краевыми условиями интерполяционного типа по части переменных. Обосновываем эффективность сведения, с помощью соответствующей замены, рассматриваемой краевой задачи к параметризованной двухточечной краевой задаче с неизвестными параметрами в краевых условиях. Для изучения полученной задачи используем метод, основанный на последовательных аппроксимациях специального вида, сконструированных в аналитической форме. Параметризованная задача исследуется вместе с соответствующими так называемыми определяющими алгебраическими или трансцендентными уравнениями.

1. Введение. В настоящей работе рассматривается один подход к изучению системы n нелинейных дифференциальных уравнений, подчиненных n краевым условиям интерполяционного типа по некоторым переменным, основанный на сведении исходной задачи к параметризованной двухточечной задаче. Строится модификация численно-аналитической схемы [1] исследования существования решения и приближенного его нахождения с помощью метода итерационного типа, часть вычислений по которому выполняется в аналитическом виде.

2. Постановка задачи.

Определение 1. *Под краевыми условиями интерполяционного типа по части переменных будем понимать условия следующего вида:*

$$x_i(t_j) = d_k, \quad i, j \in \{1, 2, ..., n\}, \quad k = \overline{1, n}, \quad t_1 < t_2 < ... < t_n.$$

Замечание 1. *Частным случаем краевых условий интерполяционного типа по части переменных являются краевые условия интерполяционного типа* $x_i(t_j) = d_j, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}, \quad j = \overline{1, n}, \quad t_1 < t_2 < ... < t_n$, *а также, краевые условия типа Коши-Николетти* $x_i(t_i) = d_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad t_1 \le t_2 \le ... \le t_n$.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \tag{1}$$

с краевыми условиями интерполяционного типа по части переменных

$$\begin{gathered} x_1(t_i) = d_i, \quad i = 1, 2, ..., p, \\ x_2(t_{p+j}) = d_{p+j}, \quad j = 1, 2, ..., q, \\ x_3(t_{p+q+k}) = d_{p+q+k}, \quad k = 1, 2, ..., n - (p + q), \end{gathered} \tag{2}$$

где функция $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$, D — замыкание ограниченной области в $\mathbb{R}^n$, $t_1, t_2, ..., t_n \in [0,T]$, причем $t_1 = 0, \quad t_n = T$. Предполагается, что функция $f : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^n$ непрерывна, и кроме того, найдется такая постоянная матрица K с неотрицательными компонентами $\{k_{ij}\}_{i,j=1}^n$, что при произвольных $\{u, v\} \subset D$ имеет место неравенство

$$|f(t,u) - f(t,v)| \leq K\,|u - v|\,. \tag{3}$$

Здесь и всюду далее знаки $\leq,\ \geq,\ |\cdot|,\ \max,\ \min$ понимаются покомпонентно.

Определение 2. *Для произвольного вектора $\rho = col(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$ с неотрицательными компонентами под открытой ρ-окрестностью вектора $x = col(x_1, x_2, ..., x_n)$ будем понимать множество $B(x,\rho)$, состоящее из тех $y = col(y_1, y_2, ..., y_n)$, для которых выполняются неравенства*

$$|y_k - x_k| < \rho_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Принадлежность вектора y замкнутой ρ-окрестности $\overline{B}(x,\rho)$ вектора x определяется неравенствами

$$|y_k - x_k| \leq \rho_k, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

По заданной функции f определим вектор

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]} f(t,x)\right]. \tag{4}$$

Справедлива оценка [1]

$$\delta_D(f) \leq \max_{(t,x)\in[0,T]\times D} |f(t,x)|\,. \tag{5}$$

Равенство в (5) имеет место тогда и только тогда, когда для каждого $k = 1, 2, ..., n$ $\max\limits_{(t,x)\in[0,T]\times D} f_k(t,x) = -\min\limits_{(t,x)\in[0,T]} f_k(t,x)$.

Ограничимся рассмотрением класса краевых задач вида (1), (2), для которых максимальное собственное значение $r(K)$ неотрицательной матрицы K в условии Липшица (3) удовлетворяет условию

$$r(K) < \frac{10}{3T}. \tag{6}$$

3. Преобразование к двухточечной задаче с параметрами в краевых условиях. Краевые условия (2) можем представить в матрично-векторном виде

$$\sum_{i=1}^{p} Ax(t_i) + \sum_{j=1}^{q} B_1 x(t_{p+j}) + \sum_{k=1}^{n-(p+q)} C_1 x(t_{p+q+k}) = d, \tag{7}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_1 + \ldots + d_p \\ d_{p+1} + \ldots + d_{p+q} \\ d_{p+q+1} + \ldots + d_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что матрицы, входящие в краевые условия (7), вырожденные. Этот факт делает невозможным или существенно осложняет применение известных численно-аналитических техник для исследования краевой задачи (1), (7) [2–5].

От многоточечных условий (7) можем перейти к двухточечным условиям

$$Ax(t_1) + C_1 x(t_n) = \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \\ d_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Чтобы избежать работы с вырожденной матрицей C_1 используем следующую параметризацию. Заменим значение всех компонент искомого решения задачи (1), (8), кроме третьей, в точке $t_n = T$ параметрами $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_4,\ \lambda_5, ..., \lambda_n$:

$$x_1(T) = \lambda_1, \quad x_2(T) = \lambda_2, \quad x_4(T) = \lambda_4, \quad x_5(T) = \lambda_5, \quad ... \quad , \quad x_n(T) = \lambda_n. \tag{9}$$

Любая функция x, для которой справедливы соотношения (8), (9), очевидно, удовлетворяет равенству

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda), \tag{10}$$

где $0 = t_1,\ T = t_n,\ C = E$- единичная n-мерная матрица, $\lambda := col(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5, ..., \lambda_n)$,

$$d(\lambda) := \begin{pmatrix} d_1 + \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ d_n \\ \lambda_4 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать задачу (1), (10), в которой двухточечное краевое условие (10) содержит неизвестный $(n-1)$- мерный вектор-параметр λ.

Замечание 2. *Множество решений исходной нелинейной многоточечной краевой задачи* (1), (2) *совпадает с множеством тех решений двухточечной краевой задачи* (1), (10)*, которые удовлетворяют дополнительному условию* (9).

4. Построение и сходимость последовательных приближений. Допустим, что множество $D_\beta := \{z \in D : B(z, \beta(z,\lambda)) \subset D\}$, где функция $\beta : D \times I \to \mathbb{R}^n_+$ задана равенством

$$\beta(z,\lambda) := \frac{T}{2}\delta_D(f) + |d(\lambda) - (A+E)\,z|\,, \tag{11}$$

множество

$$I := \left\{\lambda = col(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n-1} : col(\lambda_1, \lambda_2, d_n, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, ..., \lambda_n) \in D\right\},$$

вектор $\delta_D(f)$ определен формулой (4), непустое:

$$D_\beta \neq \emptyset. \tag{12}$$

Определим множество $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ следующим образом:

$$U := \left\{u = col(u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \quad col(d_1, u_1, u_2, ..., u_{n-1}) \in D_\beta\right\}.$$

Свяжем с параметризованной задачей (1), (10) последовательность функций

$$x_m(t, u, \lambda) := z + \int_0^t f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda))ds -$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1}(s, u, \lambda))ds + \frac{t}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)z\right], \tag{13}$$

где $m = 1, 2, 3, ...,\quad x_0(t, u, \lambda) = col(d_1, u_1, u_2, ..., u_{n-1}) =: z \in D_\beta, \quad u \in U, \;\; \lambda \in I.$ Нетрудно проверить, что при каждом $m \geq 1$ и всех значения параметров $u \in U, \;\; \lambda \in I$ справедливо равенство $x_m(0, u, \lambda) = z$, а также $x_m(T, u, \lambda) = d(\lambda) - Az$, т.е. функции (13) удовлетворяют двухточечному условию (10).

Покажем условия, достаточные для равномерной сходимости рекуррентной последовательности функций (13), и установим связь ее предела с множествами решений задач (1), (2) и (1), (10).

Теорема 1. *Предположим, что для непрерывной функции* $f : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^n$ *выполнено условие* (3) *с матрицей* K*, для которой имеет место неравенство* (6)*, а также выполняется условие* (12)*. Тогда:*

1) последовательность (13) *при* $m \to +\infty$ *сходится равномерно по* $t \in [0, T]$ *для всех* $u \in U, \;\; \lambda \in I$*;*

2) предельная функция

$$x^*(t, u, \lambda) := \lim_{m\to+\infty} x_m(t, u, \lambda) \tag{14}$$

последовательности (13) *при всех* $u \in U, \quad \lambda \in I$ *представляет собой единственное решение интегрального уравнения*

$$x(t) = z + \int_0^t f(s, x(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds + \frac{t}{T}\left[d\left(\lambda\right) - \left(A + E\right)z\right], \quad t \in [0, T], \tag{15}$$

или, что то же, единственное решение интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + \Delta(u, \lambda), \tag{16}$$

где

$$\Delta(u,\lambda) := -\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x^*(s,u,\lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A+E)z\right], \tag{17}$$

удовлетворяющее краевым условиям (10) *и начальному условию* $x^*(0,u,\lambda) = z = col(d_1,u_1,u_2,...,u_{n-1})$ *для* $u\in U,\ \ \lambda\in I$;

3) для всех $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times I$ *справедлива оценка*

$$|x^*(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda)| \le$$

$$\le \frac{20}{9}t\left(1-\frac{1}{T}\right)Q^{m-1}(E-Q^{-1})\left[\delta_D(f)Q + K\left|d(\lambda) - (A+E)z\right|\right], \tag{18}$$

где матрица $Q := \frac{3T}{10}K$.

Доказательство. Покажем, что последовательность (13) является фундаментальной последовательностью в банаховом пространстве $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ с обычной нормой. Докажем сначала, что при $(u,\lambda)\in U\times I$ значения всех функций (13) содержатся в D. Для каждой непрерывной функции $f:[0,T]\to\mathbb{R}^n$ имеет место оценка (см., напр. лемма 3.13 [3])

$$\left|\int_0^t\left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds\right]d\tau\right| \le \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t\in[0.T]} f(t) - \min_{t\in[0,T]} f(t)\right],$$

где

$$\alpha_1(t) := 2t\left(1-\frac{t}{T}\right), \quad |\alpha_1(t)| \le \frac{T}{2}, \quad t\in[0,T].$$

Поэтому, при $m=0$ из (13), в силу (4), (11), вытекает, что для произвольных $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times I$

$$|x_1(t,u,\lambda) - z| \le \alpha_1(t)\delta_D(f) + \beta_1(z,\lambda) \le \beta(z,\lambda), \tag{19}$$

где $\beta_1(z,\lambda) := |d(\lambda) - (A+E)z|$. Следовательно, выходя из (19), имеем, что $x_1(t,u,\lambda)\in D$, для произвольных $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times I$. Используя метод математической индукции несложно показать, что все функции (13) принадлежат множеству D, при $m=1,2,...$, $t\in[0,T]$, $u\in U$, $\lambda\in I$.

Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы 1 из [4], можно показать, что при всех $m\ge1$, $j\ge0$ и $(t,u,\lambda)\in[0,T]\times U\times I$

$$|x_{m+j}(t,u,\lambda) - x_m(t,u,\lambda)| \le \frac{10t}{9}\alpha_1(t)Q^{m-1}\left[Q\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_D(f) + K\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\beta_1(z,\lambda)\right]. \tag{20}$$

Поскольку, в силу (6), $\lim\limits_{m\to+\infty} Q^m = 0$ и $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} Q^i \le (E-Q)^{-1}$, из (20) очевидно, что последовательность (13) фундаментальна в равномерной метрике. Устремляя в (20) j к $+\infty$, получаем, что равномерный предел (14) последовательности (13) удовлетворяет неравенству (18). Переходя к пределу при $m\to+\infty$ в (13), убеждаемся, что функция (14) удовлетворяет уравнениям (15), (16).

Учитывая то, что функции $x_m(t,u,\lambda)$ последовательности (13) удовлетворяют двухточечным краевым условиям (10) при любых значениях параметров, предельная функция $x^*(t,u,\lambda)$ тоже будет удовлетворять этим условиям, а также $x^*(0,u,\lambda) = z = col(d_1, u_1, u_2, ..., u_n)$.

5. Существование решений. Вид "возмущенного"уравнения (16) наводит на мысль, что параметризованную краевую задачу (1), (10) можно интерпретировать как семейство задач Коши

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + \mu, \quad t \in [0, T], \tag{21}$$

$$x(0) = z, \tag{22}$$

где вектор параметров μ принимает значения в соответствующем множестве. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что выполнены все условия теоремы 1. Пусть* $(t,u,\lambda) \in [0,T] \times U \times I$ *и* $\mu \in \mathbb{R}^n$. *Тогда для того, чтобы некоторое решение задачи Коши* (21), (22) *удовлетворяло также и двухточечным условиям* (10), *необходимо и достаточно, чтобы параметр* μ *в* (21) *был задан равенством*

$$\mu = \Delta(u, \lambda), \tag{23}$$

где $\Delta : U \times I \to \mathbb{R}^n$ *— функция, определенная формулой* (17).

Замечание 3. *Из теоремы 1 вытекает, что при указанных выше условиях для всех значений параметров* $(u,\lambda) \in U \times I$ *существует предельная функция* (14) *рекуррентной последовательности* (13), *и, следовательно, отображение* (17) *определено однозначным образом.*

Доказательство. Используя теорему Пикара-Линделёфа, несложно убедится, что поскольку имеет место условие Липшица (3), то начальная задача (21), (22) имеет единственное решение для всех $(\mu, u) \in \mathbb{R}^n \times U$. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что при всех значениях параметров $(u,\lambda) \in U \times I$ предельная функция $x^*(t,u,\lambda)$ последовательности (13) удовлетворяет интегральному уравнению (15), а также краевым условиям (10). Таким образом, $x = x^*(t,u,\lambda)$ вида (14) является единственным решением начальной задачи

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) + \Delta(u,\lambda), \quad t \in [0, T], \tag{24}$$

$$x(0) = z, \tag{25}$$

где $\Delta(u,\lambda)$ определяется формулой (17). Значит, (21), (22) совпадает с (24), (25) при условии, что

$$\mu = \Delta(u,\lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds + \frac{1}{T}\,[d(\lambda) - (A + E)z]. \tag{26}$$

То, что функция (14) не будет решением задачи Коши (21), (22) ни при каких других значениях параметра μ не равных (26), вытекает из равенства $\mu = \Delta(u,\lambda)$, а это и доказывает рассматриваемую теорему.

Выясним связь определенной в условиях теорем 1 и 2 функции (14) с множеством решений двухточечной задачи (1), (10), содержащей параметр $\lambda \in I$, а таким образом и с решениями многоточечной задачи (1), (2).

Теорема 3. *Предположим, что выполнены условия теоремы 1. Тогда функция* $x^*(\cdot, u^*, \lambda)$ *заданная формулой* (14), *является решением двухточечной задачи* (1), (10), *с вектором параметров* λ, *тогда и только тогда, когда* $u^* = col(u_1^*, u_2^*, ..., u_{n-1}^*)$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\Delta(u, \lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, u, \lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)\, z\right] = 0. \tag{27}$$

Функция (14) *является решением исходной многоточечной краевой задачи* (1), (2) *тогда и только тогда, когда пара векторных параметров* (u^*, λ^*), *где* $\lambda^* = col(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \lambda_4^*, \lambda_5^*, \lambda_6^*, ..., \lambda_n^*)$, *удовлетворяет условию* (27), *и, кроме того,*

$$\begin{aligned} x_1^*(t_i, u, \lambda) &= d_i, \quad i = 2, 3, ..., p,\\ x_2^*(t_{p+j}, u, \lambda) &= d_{p+j}, \quad j = 1, 2, ..., q,\\ x_3^*(t_{p+q+k}, u, \lambda) &= d_{p+q+k}, \quad k = 1, 2, ..., n - (p + q) - 1. \end{aligned} \tag{28}$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует, что при всех $(u, \lambda) \in U \times I$ функция $x^*(\cdot, u^*, \lambda)$ является решением двухточечной задачи (16), (10). Уравнение (16) совпадает с уравнением (1) тогда и только тогда, когда u^* и λ удовлетворяют условию $\Delta(u^*, \lambda) = 0$, т.е. выполнено равенство (27). Второе утверждение теоремы вытекает из замечания 2.

При практической реализации рассматриваемой численно-аналитической схемы естественно фиксировать некоторый номер итерации m в (13) и использовать $x_m(\cdot, u, \lambda)$ в качестве приближения к неизвестной функции $x^*(\cdot, u, \lambda)$, существование которой утверждается в теореме 1. При этом, вместо (27), (28) возникает система из $2n - 2$ "приближенных определяющих уравнений"

$$\Delta_m(u, \lambda) = -\frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, u, \lambda))ds + \frac{1}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)\, z\right] = 0,$$

$$x_{m1}(t_i, u, \lambda) = z + \int_0^{t_i} f(s, x_{m-1,2}(s, u, \lambda))ds - \frac{t_i}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1,2}(s, u, \lambda))ds +$$
$$+\frac{t_i}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)z\right] = d_i, \quad i = 2, 3, ..., p,$$

$$x_{m2}(t_{p+j}, u, \lambda) = z + \int_0^{t_{p+j}} f(s, x_{m-1,2}(s, u, \lambda))ds - \frac{t_{p+j}}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1,2}(s, u, \lambda))ds +$$
$$+\frac{t_{p+j}}{T}\left[d(\lambda) - (A + E)z\right] = d_{p+j}, \quad j = 1, 2, ..., q,$$

$$x_{m3}(t_{p+q+k}, u, \lambda) = z + \int_0^{t_{p+q+k}} f(s, x_{m-1,2}(s, u, \lambda))ds - \frac{t_{p+q+k}}{T}\int_0^T f(s, x_{m-1,2}(s, u, \lambda))ds +$$

$$+\frac{t_{p+q+k}}{T}\left[d(\lambda)-(A+E)z\right]=d_{p+q+k},\quad k=1,2,...,n-(p+q)-1,$$

из которых ищем значения $2n-2$ параметров $u^*\approx col(u_{m1},u_{m2},\ldots,u_{m,n-1})$, $\lambda^*\approx col(\lambda_{m1},\lambda_{m2},\lambda_{m4},\lambda_{m5},\lambda_{m6},...,\lambda_{mn})$. При этом, функцию $x_m(t,u_m,\lambda_m)$ можно рассматривать, как приближение к одному из решений задачи (1), (2).

6. Пример задачи с краевыми условиями интерполяционного типа по части переменных. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} x_1'(t)=x_2^2(t)+x_3^2(t)-\frac{1}{8}x_4(t)+\frac{t}{4}-\frac{1}{16},\\ x_2'(t)=\frac{t}{2}x_1(t)+x_3(t)-\frac{t}{8}x_4(t)-\frac{t}{32},\\ x_3'(t)=x_1(t)-2x_2^2(t)+x_4(t)-2tx_2(t)-\frac{1}{16},\\ x_3'(t)=x_1(t)-2x_2^2(t)-x_3^2(t)+t,\end{cases}\tag{29}$$

где $t\in[0,1]$, с краевыми условиями интерполяционного типа по части переменных

$$\begin{aligned} x_1(0)&=\tfrac{1}{16},\\ x_1(\tfrac{1}{2})&=\tfrac{3}{32},\\ x_2(\tfrac{3}{4})&=\tfrac{3}{16},\\ x_3(1)&=\tfrac{1}{4}.\end{aligned}\tag{30}$$

Несложно убедится, что точное решение рассматриваемой задачи следующее:

$$\begin{cases} x_1^*(t)=\frac{t^2}{8}+\frac{1}{16},\\ x_2^*(t)=\frac{t}{4},\\ x_3^*(t)=\frac{1}{4},\\ x_4^*(t)=\frac{t^2}{2}.\end{cases}\tag{31}$$

Допустим, что краевая задача рассматривается в области

$$D=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4):|x_1|\le\frac{1}{2},|x_2|\le\frac{1}{3},|x_3|\le\frac{1}{3},|x_4|\le\frac{1}{2}\right\}.$$

Краевые условия (30) можем представить в матрично-векторном виде

$$Ax\left(0\right)+Ax\left(\frac{1}{2}\right)+Bx\left(\frac{3}{4}\right)+C_1x\left(T\right)=d\ ,\tag{32}$$

где $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $C_1=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $d=\begin{pmatrix}\frac{5}{32}\\\frac{3}{16}\\\frac{1}{4}\\0\end{pmatrix}$. Заметим, здесь C_1 *вырожденная матрица.*

Используем следующую параметризацию: заменим значения первой, второй и четвертой компонент решения краевой задачи (29), (32) в точке T соответственно параметрами $\lambda_1,\ \ \lambda_2,\ \ \lambda_4$, где $|\lambda_1|\le\frac{1}{2},|\lambda_2|\le\frac{1}{3},|\lambda_4|\le\frac{1}{2}$. Т. е.

$$x_1(T)=\lambda_1,\quad x_2(T)=\lambda_2,\quad x_4(T)=\lambda_4.\tag{33}$$

Используя (33), краевые условия (32) могут быть представлены как

$$Ax(0) + Cx(T) = d(\lambda) \ , \tag{34}$$

где $A = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}$, $d(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{16}+\lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \frac{1}{4} \\ \lambda_4 \end{pmatrix}$, $\lambda = col(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4)$.

Здесь $C = E$ *невырожденная матрица.*

Легко проверить, что для краевой задачи (29), (34), в области D выполняются условия (3), (6), (12) с матрицами

$$A := \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad C := \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{pmatrix}, \qquad K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{8} \\ 1 & \frac{10}{3} & 0 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

и наибольшее собственное значение матрицы K: $\lambda_{\max}(K) \leq 2.52 \leq \frac{10}{3T}$.

Кроме того, векторы $\delta_D(f)$ и $\beta(z, \lambda)$ следующего вида:

$$\delta_D(f) \leq \begin{pmatrix} \frac{43}{144} \\ \frac{31}{48} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}, \quad \beta(z,\lambda) \leq \begin{bmatrix} \frac{43}{288} \\ \frac{31}{96} \\ \frac{5}{6} \\ \frac{7}{12} \end{bmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{1}{16} + \lambda_1 \\ -\lambda_2 + z_2 \\ z_3 - \frac{1}{4} \\ \lambda_4 + z_4 \end{vmatrix}, \quad z = \left(\tfrac{1}{16}, z_2, z_3, z_4\right). \tag{35}$$

Таким образом к заданной краевой задаче можно применить численно-аналитическую схему, рассмотренную выше и построить последовательность приближенных решений.

В результате проведенных расчетов, можем убедится, что, например, вторая итерация имеет вид:

$$x_{21}(t) = 0.125t^2 - 0.3774366173 \cdot 10^{-12} t^4 + 0.8713003603 \cdot 10^{-11} t +$$
$$+0.4065591091 \cdot 10^{-22} t^5 - 0.9999999999 \cdot 10^{-11} t^3 + 0.0625,$$
$$x_{22}(t) = -0.1 \cdot 10^{-10} t^3 + 0.1393421031 \cdot 10^{-10} + 0.2499999999t,$$
$$x_{23}(t) = -0.2415594345 \cdot 10^{-10} t^2 + 0.2264619698 \cdot 10^{-11} t^4 -$$
$$-0.3646935025 \cdot 10^{-23} t^5 + 0.7 \cdot 10^{-10} t^3 + 0.2499999999,$$
$$x_{24}(t) = 0.5t^2 + 0.7548732335 \cdot 10^{-12} t^4 + 0.5542329009 \cdot 10^{-10} t -$$
$$-0.4247937842 \cdot 10^{-22} t^5 + 0.3464473677 \cdot 10^{-10} t^3 + 0.483118869 \cdot 10^{-10}.$$

Как видно с рисунков 1-2, графики приближенного решения уже на второй итерации для всех четырех компонент почти полностью совпадают с графиками точного решения, а погрешности (общепринятое отклонение второй итерации от точного решения) удовлетворяют следующим неравенствам:

$$|x_1^*(t) - x_{21}(t)| \leq 0.4 \cdot 10^{-10};$$

$$|x_2^*(t) - x_{22}(t)| \le 0.18 \cdot 10^{-9};$$
$$|x_3^*(t) - x_{23}(t)| \le 0.4 \cdot 10^{-9};$$
$$|x_4^*(t) - x_{24}(t)| \le 0.65 \cdot 10^{-9}.$$

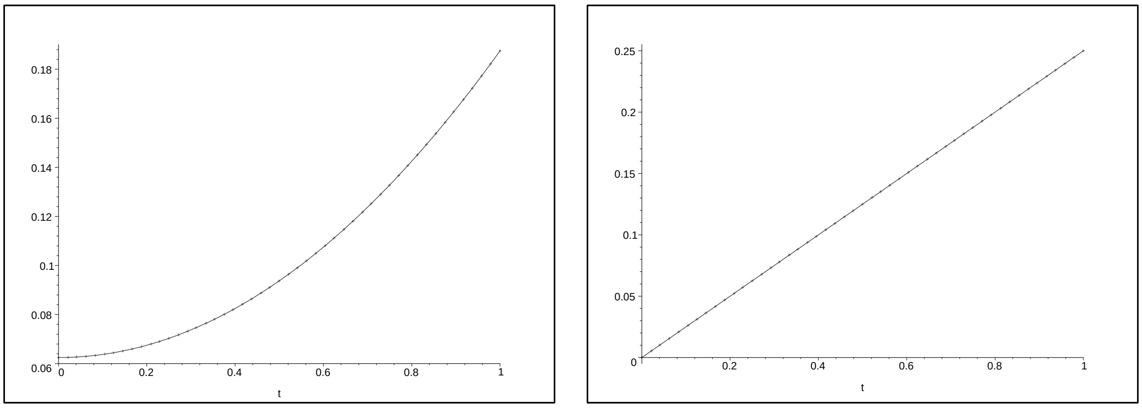

Рис. 1. Первая и вторая компоненты точного решения (линия) и их второе приближение (пунктир).

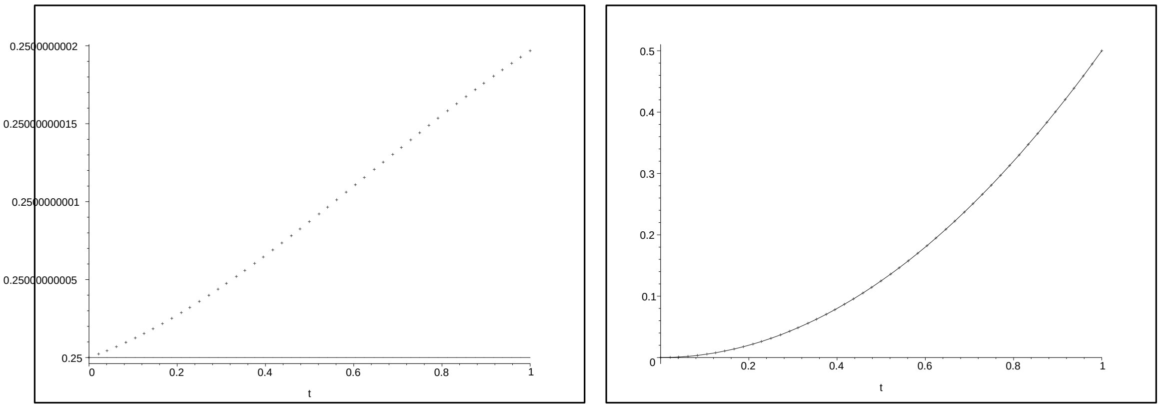

Рис. 2. Третья и четвертая компоненты точного решения (линия) и их второе приближение (пунктир).

1. *Ronto M., Samoilenko A.M.* Numerical-analytic methods in the theory of boundary-value problems. – River Edge. NS: World Scientific Publishing Co. Inc. – 2000. – 455 p.
2. *Ronto A.* On some boundary value problems for Lipschitz differential equations // Nonlinear Oscillations. – 1998. – **1**, №1. – P. 74–94.
3. *Ronto A., Ronto M.* Successive Approximation Techniques in Non-Linear Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations // Handbook of Differential Equations. Elsevier B. V. – 2008. – Vol. IV. – P. 441–592.
4. *Ronto M., Shchobak N.* On the numerical-analytic investigation of parametrized problems with nonlinear boundary conditions // Nonlinear Oscillations. – 2003. – **6**, №4. – P. 482–510.
5. *Ронто А.Н., Ronto M., Щобак Н.М.* О параметризации трехточечных нелинейных краевых задач // Нелінійні коливання. – 2004. – **7**, №3. – P. 395–413.

Одержано 07.11.2009