НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ім. Г. В. КАРПЕНКА НАН УКРАЇНИ

Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи

Відкрита науково-технічна конференція
молодих науковців і спеціалістів
Фізико-механічного інституту ім. Г. В. Карпенка НАН України

Львів – 2009

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ПОКООРДИНАТНОГО ПІДЙОМУ ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНОЇ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТОЇ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Глебена М.І.

Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський національний університет»

Пропонується чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона, функцій, заданих таблично.

The numerical method of search of the global extremum of logarithmic concave multi-variables functions is propoesd. The method is based on the techniques of non-classical majorant and Newtonian diagrams, which are given in a form of table.

Вступ. При розв'язуванні різних класів прикладних задач і задач в самій математиці нерідко доводиться мати справу з відшуканням екстремуму негладких і розривних функцій. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, при розв'язуванні окремих задач дослідження операцій, в застосуванні теорії керування рухом динамічних систем тощо. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів, за допомогою яких можна було б знаходити абсолютний екстремум як неперервно-диференційовних, так і довільних негладких і розривних функцій.

Нами ведеться робота над розробленням таких методів. В їх основу покладено використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [1]. Зокрема, в [2] побудовано метод оптимізації негладких і розривних функцій однієї дійсної змінної, заданих на проміжку. В [3] розроблено чисельний метод типу покоординатного підйому відшукання абсолютного екстремуму недиференційованих функцій від двох дійсних змінних.

Постановка задачі. Нехай в області D, заданій системою нерівностей $a_i \le x_i \le b_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, визначена довільна логарифмічно вгнута функція $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. При цьому вважатимемо, що $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0$ для всіх $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ (виконання цієї умови завжди можна забезпечити). Необхідно побудувати чисельний метод для відшукання абсолютного максимуму цієї функції.

Алгоритм методу у випадку функції однієї змінної [2]. Нехай на проміжку $[a,b]$ необхідно знайти абсолютний

екстремум довільної логарифмічно вгнутої функції $f(x)$, де $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a,b]$. Виберемо на $[a,b]$ систему точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$, де $x_k = x_0 + kh$ $(k = 0,1,\ldots,n)$, $x_0 = a$, $h = {(b-a)}/{n}$, і знайдемо значення функції $y = f(x)$ в цих точках. Нехай $f(x_i) = a_i$, $i = 0,1,\ldots,n$. Оскільки $f(x)$ – логарифмічно вгнута функція, то числові нахили діаграми Ньютона, побудованої за значеннями функції в точках x_k $(k = 0,1,\ldots,n)$, визначатимуться за формулою $R_k = \left(\frac{a_{k-1}}{a_k}\right)^{\frac{1}{h}}$, $(k = 1,2,\ldots,n)$, $R_0 = 0$.

Тоді алгоритм методу є таким. Визначаємо спочатку R_1. Якщо $R_1 \ge 1$, то за точку максимуму функції приймаємо x_0. Якщо $R_1 < 1$, то визначаємо R_n. У разі $R_n \le 1$ за точку максимуму приймаємо x_n. Припустимо, що $R_1 < 1$ і $R_n > 1$. Тоді серед точок x_k $(k - 1,2,\ldots,n-1)$ вибираємо середню. Нехай такою точкою буде x_m. Визначаємо $R_m = \left(\frac{a_{m-1}}{a_m}\right)^{\frac{1}{h}}$, $R_{m+1} = \left(\frac{a_m}{a_{m+1}}\right)^{\frac{1}{h}}$.

Тоді можливі такі випадки:

$R_m \le 1$, $R_{m+1} \ge 1$ $(R_m \ne R_{m+1})$; $R_m > 1$; $R_{m+1} < 1$.

У першому випадку за точку максимуму функції приймаємо x_m; у другому шукаємо найменше значення індексу ν, для якого $R_{m-\nu} \le 1$. Якщо таким значенням є $\nu = p$, то за точку максимуму функції приймаємо x_{m-p}. У третьому випадку шукаємо найменше значення індексу ν, для якого $R_{m+\nu} \ge 1$. Якщо таким значенням є $\nu = q$, то за точку максимуму функції приймаємо x_{m+q}.

Алгоритм методу у випадку функцій багатьох змінних. У цьому випадку алгоритм складається з низки кроків, на кожному з яких використовується розглянутий вище алгоритм відшукання абсолютного екстремуму довільної логарифмічно вгнутої функції однієї змінної.

В області D вибираємо довільне початкове наближення $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ і розглядаємо $f\left(x_1, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ як функцію однієї змінної x_1. На проміжку $[a_1, b_1]$ вибираємо систему точок $x_{1k} = a_1 + kh_1$, $(k = 0,1,\dots,n_1)$, де $h_1 = {(b_1 - a_1)}/{n_1}$, і знаходимо значення функції $f\left(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ в цих точках. Нехай

$$f\left(x_{1k}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) = a_{1k}, \quad k = 0,1,\dots,n_1.$$

Тоді, використовуючи алгоритм відшукання абсолютного екстремуму функції однієї змінної, серед точок x_{1k} $(k = 0,1,\dots,n_1)$, знаходимо точку, в якій функція $f\left(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ набуває найбільшого значення. Нехай цією точкою буде точка x_{1s} $(0 \le s \le n_1)$. Позначимо цю точку через $x_1^{(1)}$ і розглянемо $f\left(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ як функцію однієї змінної x_2. На проміжку $[a_2, b_2]$ вибираємо систему точок $x_{2k} = a_2 + kh_2$ $(k = 0,1,\dots,n_2)$, де $h_2 = {(b_2 - a_2)}/{n_2}$, і знаходимо значення функції $f\left(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ в цих точках. Нехай

$$f\left(x_1^{(1)}, x_{2k}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) = a_{2k}, \quad k = 0,1,\dots,n_2.$$

Тоді, використовуючи алгоритм у випадку функції однієї змінної, серед точок x_{2k} $(k = 0,1,\dots,n_2)$ знаходимо точку, в якій функція $f\left(x_1^{(1)}, x_2, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$ набуває найбільшого значення. Нехай цією точкою буде точка x_{2l} $(0 \le l \le n_2)$. Позначимо цю точку через $x_2^{(1)}$. Аналогічно знаходимо $x_3^{(1)}, x_4^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$. В результаті одержимо точку $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right)$, яку приймаємо за перше наближення до максимальної точки функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Маючи точку $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right)$, аналогічно знаходимо точку $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\right)$, т.д. Отже, в процесі виконання алгоритму одержуємо послідовність точок $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)$, $\left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}\right)$, $\left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}\right) \dots$

Робота алгоритму продовжується доти, доки не буде знайдена точка $\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}\right)$, для якої $\left|x_i^{(r)} - x_i^{(r-1)}\right| \le h_i$, $i = 1,2,\dots,n$.

Тоді точку $\left(x_1^{(r)}, x_2^{(r)}, \dots, x_n^{(r)}\right)$ приймаємо за точку максимуму функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Якщо $\max\limits_{D} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, то $\left|x_i^{(r)} - \alpha_i\right| < h = \max\limits_{1 \le i \le n} h_i$.

Щоб з більшою точністю знайти точку, в якій досягається максимум функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, треба той же алгоритм застосувати до функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, але за область D взяти

$$D^{(r)} = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \;\middle|\; x_i^{(r)} - h_i \le x_i \le x_i^{(r)} + h_i, i = 1,2,\dots,n \right\}.$$

Висновок. Побудовано алгоритм відшукання екстремуму довільної логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних. Збіжність алгоритму не залежить від вибору початкового наближення.

1. *Цегелик Г.Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение //Укр. мат. журн.- 1989.- Т.41.- №9. С.1273-1276.*
2. *Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. 12–13. С. 55-58.*
3. *Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Чисельний метод відшукання екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14–15. С. 18-21.*