Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

XVI Всеукраїнська
наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

присвячена 50-річчю створення
Обчислювального центру
Львівського університету

8–9 жовтня 2009 року

Матеріали конференції

TANTUM POSSIMUS,
QUANTUM SCIMUS

Львів – 2009

Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка

УДК 519.6

М.І. Глебена[1], *Г.Г. Цегелик*[2]

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ВІДШУКАННЯ АБСОЛЮТНОГО ЕКСТРЕМУМУ ДОВІЛЬНИХ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

[1]Ужгородський національний університет
[2]Львівський національний університет імені Івана Франка

Вступ. При розв'язуванні різних класів прикладних задач і задач в самій математиці нерідко доводиться мати справу з відшуканням екстремуму негладких функцій [5]. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, при розв'язуванні задач дослідження операцій, в застосуваннях теорії керування рухом динамічних систем тощо. У випадку негладких опуклих функцій задача їх оптимізації в [5] розв'язується з використанням поняття субградієнта.

Нами розглядається підхід до оптимізації негладких і розривних функцій, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично. Цей підхід дає можливість розробляти алгоритми відшукання абсолютного екстремуму будь-якої функції як гладкої, так і негладкої та розривної. В [1], використовуючи апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона, розроблений для функцій двох дійсних змінних [3,4], побудовано чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму негладких опуклих (вгнутих) функцій двох дійсних змінних. В роботі розглянемо узагальнення цього методу на випадок довільних негладких функцій від двох дійсних змінних.

Постановка задачі. Нехай в області $D=\{\, a\le x\le b,\ c\le y\le d \,\}$ задана функція $f(x,y)$, яка, взагалі кажучи, може бути довільною негладкою функцією. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f(x,y)>0$ для всіх $(x,y)\in D$. В області D побудуємо сітку:

$$x=x_i=a+ih,\quad i=0,1,\dots,n,\ h=(b-a)/n;\ y=y_j=c+js,\quad j=0,1,\dots,m,\ s=(d-c)/m.$$

Позначимо $f(x_i,y_j)=a_{ij}$ $(i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m)$ і для набору значень a_{ij} побудуємо некласичну мажоранту та діаграму Ньютона [1,3]. Використовуючи характеристики мажоранти Ньютона, побудуємо алгоритм, який дає змогу із заданою точністю знайти абсолютний екстремум будь-якої як гладкої, так і негладкої функції від двох дійсних змінних.

Мажоранта та діаграма Ньютона функції, заданої таблично, та їх характеристики. Розглянемо множину значень $f(x_i,y_j)=a_{ij}$ $(i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m)$. В просторі xyz побудуємо множину точок $P_{ij}(x_i,y_j,-\ln a_{ij})$ з координатами $x=x_i, y=y_j, z=-\ln a_{ij}$ $(i=0,1,\dots,n;\ \ j=0,1,\dots,m)$. З кожної точки проведемо півпряму в додатному напрямку осі Oz, перпендикулярно до площини xy. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожної точки $(x,y)\in D$ визначимо точку $B(x,y,\kappa(x,y))$, де

$$\kappa(x,y)=\inf_{(x,y,z)\in C(S)} z \quad .$$

Множина точок $B(x,y,\kappa(x,y))$, $(x,y)\in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд $z=\kappa(x,y)$, $(x,y)\in D$.

Позначимо $M_f(x,y)=\exp(-\kappa(x,y))$, $(x,y)\in D$.

Тоді для кожної точки (x_i,y_j) $(i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m)$ виконується нерівність $a_{ij}\le M_f(x_i,y_j)$. Крім того, $M_f(x_0,y_0)=a_{00}$, $M_f(x_0,y_m)=a_{0m}$, $M_f(x_n,y_0)=a_{n0}$, $M_f(x_n,y_m)=a_{nm}$. Отже, апроксимуюча функція $M_f(x,y)$ є некласичною мажорантою Ньютона для значень a_{ij} $(i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m)$, а δ_f – некласичною діаграмою Ньютона.

Якщо позначити $M_f(x_i,y_j)=T_{ij}$, $(i=0,1,\dots,n; j=0,1,\dots,m)$, то величини

$$R_{ij}(x)=\left(\frac{T_{i-1,j}}{T_{ij}}\right)^{\frac{1}{h}} \qquad (i=1,2,\dots,n; j=0,1,\dots,m;\ R_{0j}=0) \qquad \text{і} \qquad R_{ij}(y)=\left(\frac{T_{i,j-1}}{T_{ij}}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$(j=1,2,\dots,m; i=0,1,\dots,n;\ R_{i0}=0)$ називаються (i,j)-ми числовими нахилами мажоранти Ньютона

$M_f(x,y)$ відповідно в напрямі осей абсцис і ординат, а величини $D_{ij}(x)=\dfrac{R_{i+1,j}(x)}{R_{ij}(x)}$ $(i=1,2,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,m;\ \ D_{0j}=D_{nj}=\infty)$ і $D_{ij}(y)=\dfrac{R_{i,j+1}(y)}{R_{ij}(y)}$ $(j=1,2,\ldots,m-1;\ i=0,1,\ldots,n;\ \ D_{i0}=D_{im}=\infty)$ називаються (i,j) – ми відхиленнями мажоранти Ньютона $M_f(x,y)$ відповідно в напрямі осей Ox і Oy.

Із опуклості вниз поверхні δ_f випливають такі нерівності

$$R_{ij}(x)\le R_{i+1,j}(x)\quad (i=0,1,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,m),\quad R_{ij}(y)\le R_{i,j+1}(y)\quad (j=0,1,\ldots,m-1;\ i=0,1,\ldots,n),$$

$$D_{ij}(x)\ge 1\quad (i=1,2,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,m),\quad D_{ij}(y)\ge 1\quad (j=1,2,\ldots,m-1;\ i=0,1,\ldots,n).$$

Якщо точка P_{ij} знаходиться у вершині діаграми Ньютона δ_f, то пару індексів (i,j) називають вершинною парою індексів, якщо на δ_f, то – діаграмною парою індексів.

Нехай (k,l) – будь-яка пара індексів $(0<k<n, 0<l<m)$. Приймемо

$$r_{kl}^{+}(x)=\min_{1\le i\le n-k}\left(\frac{a_{kl}}{a_{k+i,l}}\right)^{\frac{1}{ih}},\quad r_{kl}^{-}(x)=\max_{1\le i\le k}\left(\frac{a_{k-i,l}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{ih}},$$

$$r_{kl}^{+}(y)=\min_{1\le i\le m-l}\left(\frac{a_{kl}}{a_{k,l+i}}\right)^{\frac{1}{is}},\quad r_{kl}^{-}(y)=\max_{1\le i\le l}\left(\frac{a_{k,l-i}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{is}},$$

$$d_{kl}(x)=\frac{r_{kl}^{+}(x)}{r_{kl}^{-}(x)},\quad d_{kl}(y)=\frac{r_{kl}^{+}(y)}{r_{kl}^{-}(y)}.$$

Тоді з побудови діаграми Ньютона δ_f випливає таке твердження.

Твердження. 1. Якщо $d_{kl}(x)>1$ і $d_{kl}(y)>1$, то пара індексів (k,l) є вершинною парою і $D_{kl}(x)=d_{kl}(x)$, $D_{kl}(y)=d_{kl}(y)$, $R_{kl}(x)=r_{kl}^{-}(x)$, $R_{k+1,l}(x)=r_{kl}^{+}(x)$, $R_{kl}(y)=r_{kl}^{-}(y)$, $R_{k,l+1}(y)=r_{kl}^{+}(y)$.

2. Якщо $d_{kl}(x)>1$, $d_{kl}(y)=1$, то пара індексів (k,l) є діаграмною парою і $D_{kl}(x)=d_{kl}(x)$, $R_{kl}(x)=r_{kl}^{-}(x)$, $R_{k+1,l}(x)=r_{kl}^{+}(x)$, $D_{kl}(y)=1$, $R_{kl}(y)=R_{k,l+1}(y)=r_{kl}^{-}(y)=r_{kl}^{+}(y)$.

3. Якщо $d_{kl}(x)=1$, $d_{kl}(y)>1$, то пара індексів (k,l) є діаграмною парою і $D_{kl}(x)=1$, $R_{kl}(x)=R_{k+1,l}(x)=r_{kl}^{-}(x)=r_{kl}^{+}(x)$, $D_{kl}(y)=d_{kl}(y)$, $R_{kl}(y)=r_{kl}^{-}(y)$, $R_{k,l+1}(y)=r_{kl}^{+}(y)$.

4. Якщо $d_{kl}(x)=1$, $d_{kl}(y)=1$, то пара індексів (k,l) є діаграмною парою і $D_{kl}(x)=1$, $D_{kl}(y)=1$, $R_{kl}(x)=R_{k+1,l}(x)=r_{kl}^{-}(x)=r_{kl}^{+}(x)$, $R_{kl}(y)=R_{k,l+1}(y)=r_{kl}^{-}(y)=r_{kl}^{+}(y)$.

5. Якщо $d_{kl}(x)<1$ або $d_{kl}(y)<1$, то пара індексів (k,l) не є діаграмною парою.

Алгоритм методу. Вибираємо будь-яку точку $(x_k,y_l)\in D$ $(0<k<n, 0<l<m)$ за початкове наближення точки абсолютного екстремуму і знаходимо величини $r_{kl}^{-}(x)$, $r_{kl}^{+}(x)$, $r_{kl}^{-}(y)$, $r_{kl}^{+}(y)$, $d_{kl}(x)$ і $d_{kl}(y)$.

Якщо виконуються умови:

$$d_{kl}(x)>1,\ d_{kl}(y)>1,\ r_{kl}^{-}(x)\le 1,\ r_{kl}^{+}(x)\ge 1,\ r_{kl}^{-}(y)\le 1,\ r_{kl}^{+}(y)\ge 1, \qquad (*)$$

то з точністю $\varepsilon\le\max(h,s)$ точку (x_k,y_l) приймаємо за точку абсолютного екстремуму функції $f(x,y)$, де ε – віддаль між екстремальною точкою і точкою (x_k,y_l).

Якщо умови (*) не виконуються, то поступаємо так. Використовуючи алгоритм відшукання абсолютного екстремуму функції однієї змінної [2], на основі значень $f(x_i,y_l)=a_{il}$, $i=0,1,\ldots,n$, з точністю $O(h)$ знаходимо точку абсолютного максимуму функції $f(x,y_l)$. Нехай цією точкою є точка (x_p,y_l). Тоді, використовуючи цей же алгоритм, на основі значень $f(x_p,y_j)=a_{pj}$, $j=0,1,\ldots,m$, знаходимо з точністю $O(s)$ точку абсолютного максимуму функції $f(x_p, y)$. Якщо цією точкою є точка (x_p, y_q), то ця точка приймається за перше наближення точки абсолютного екстремуму функції $f(x, y)$.

З точкою (x_p, y_q) поступаємо таким же чином, як із точкою (x_k, y_l).

В результаті виконання алгоритму за скінченну кількість кроків ми знайдемо з точністю $\varepsilon \le \max(h,s)$ точку абсолютного екстремуму функції $f(x,y)$.

Алгоритм методу дає можливість знайти точку абсолютного екстремуму з точністю $\varepsilon \le \max(h,s)$. Для уточнення знайденої точки треба за початкову область вибрати окіл знайденої точки і зменшити кроки сітки.

Алгоритм методу не залежить від вибору початкового наближення.

1. *Глебена М.І., Цегелик Г.Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних // Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". – 2007. – Вип. 5. – С. 17-21.
2. *Глебена М.І., Цегелик Г.Г* Модифікований чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій // Наук.вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С.57-61.
3. *Цегелик Г.Г. Федчишин Н.В.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип.50. – С.209-211.
4. *Цегелик Г.Г. Федчишин Н.В.* До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип.52. – С.111-116.
5. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения. - К.: Наук. думка, 1979. – 199с.

УДК 004.65

Б.М. Голуб

МОДИФІКОВАНА СТРУКТУРА ВКЛАДЕНИХ МНОЖИН ДЛЯ РОБОТИ З ІЄРАРХІЧНИМИ ДАНИМИ

Львівський національний університет ім. Івана Франка

Для загального випадку ієрархій у реляційних базах даних використовуються структури на основі списку суміжних вершин графа із запам'ятовуванням ієрархії [1] та вкладених множин [2]. Обидві моделі вимагають перерахунку допоміжних параметрів для окремих гілок дерева у випадках додавання-вилучення-перенесення вершин дерева. Обсяг обчислень для перерахунку допоміжних параметрів ієрархічної структури з великою кількістю даних істотно знижує продуктивність бази даних. Алгоритми зменшення кількості обчислень, необхідних для адміністрування ієрархічної структури, розглядаються у [3,4].

Пропонується комбінована структура $A(n,p,a,b)$, де n – ідентифікатор вершини, p – ідентифікатор батьківської вершини, $[a,b] \supset \bigcup_{i\in J}[a_i,b_i]$, $\bigcap_{i\in J}[a_i,b_i] = \varnothing$, J - множина дочірніх вершин для вершини n. Інтервал $[a,b]$ містить також резервні інтервали для операцій додавання нових вузлів.

Побудовано алгоритми розрахунку інтервалу $[a,b]$ таким чином, щоб максимізувати кількість операцій додавання-перенесення вершин без необхідності перерахунку відповідних інтервалів для інших вершин.

Теоретичний аналіз та обчислювальний експеримент підтверджують ефективність комбінованої структури для типових запитів та внутрішніх задач адміністрування ієрархічної структури.

1. *Вирт Н.* Алгоритмы и струтуры данных. – СПб.: Невский Диалект, 2005.
2. *Celko J.* Joe Celko's SQL for Smarties: Trees and Hierarchies. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA, 2004.
3. *Hazel D.* Using rational numbers to key nested sets. CoRR, cs.DB/0808.3115, 2008.
4. *Tropashko V.* Nested intervals tree encoding in SQL. SIGMOD Record, 34(2):47–52, 2005.