ACADEMIA DE TRANSPORTURI, INFORMATICĂ
ŞI COMUNICAŢII

INSTITUTUL DE CIBERNETICĂ
ACADEMIA NAŢIONALĂ DE ŞTIINŢĂ A UCRAINEI

MODELARE MATEMATICĂ, OPTIMIZARE ŞI TEHNOLOGII INFORMAŢIONALE

Materialele Conferinţei Internaţionale

Chişinău,
19 – 23 martie 2012

EDIŢIA A III-A

Материалы 3-й международной конференции

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ОПТИМИЗАЦИЯ И ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Кишинэу,
19 – 23 марта 2012

Chişinău • Evrica • 2012

Автор признателен П.И. Стецюку за приглашение представить сообщение на конференцию.

Литература.

1. Shor N.Z. Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Boston: Kluwer Acad. Publ., 1998. – 394 p.
2. Gruber P. M., Lekkerkerker C. G. Geometry of Numbers. 2nd ed. – Amsterdam, Netherlands: North-Holland, 1987. - 720 p.
3. Касселс Дж. Введение в геометрию чисел. – М.: Мир, 1965. - 421с.
4. Марков А.А. О бинарных квадратичных формах положительного определителя, СПб., 1880; перепеч.: // Успехи матем. наук. – 1948.- № 3. С.7-51.
5. Minkowski H. Diophantische Approximationen.- Leipzig: Teubner, 1907, Vol. 8..- 235s.
6. Minkowski H. Geometrie der Zahlen. Berlin - Leipzig: Teubner, 1910. - 215s.
7. Малышев А.В. О применении ЭВМ к доказательству гипотезы Минковского из геометрии чисел. 1. 2. // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. - 1977. - № 71. - с. 163-180; - 1979. - № 82. - С. 29-30.
8. Глазунов Н.М., Малышев А.В. К гипотезе Минковского о критическом определителе // Кибернетика.- 1985. – № 5. - С.10-14.
9. Глазунов Н.М., Голованов А.С., Малышев А.В. Доказательство гипотезы Минковского о критическом определителе области // Исследования по теории чисел. 9. Записки научных семинаров ЛОМИ. – 1986. – 151.- С.40-53.
10. Glazunov N.M. Geometry of Numbers in the Problem of Global Parallel Minimization // Proc. International Conf. "New Computer Technologies in Control Systems." - Pereslavl'-Zaleskij (Russia). – 1996. – P.23-24.
11. Glazunov N.M. Interval computations and their categorification // Numerical Algorithms. Kluwer Acad. Publ. – 2004. – 37. – P. 159-164.
12. Глазунов Н.М., Скобелев В.В., Скобелев В.Г. Многообразия над кольцами. ИПММ Национальной Академии Наук Украины, Донецк, 2011. – 323 с.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПА ОТЫСКАНИЯ АБСОЛЮТНОГО ЭКСТРЕМУМА ПРОИЗВОЛЬНЫХ НЕГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

М.И. ГЛЕБЕНА[*], Г.Г. ЦЕГЕЛИК[**],

[*]ГВУЗ «Ужгородський национальный университет», Ужгород, Украина

HlebenaM@gmail.com

[**] Львовский национальный университет имени Ивана Франка, Львов, Украина

Приводится алгоритм для поиска абсолютного экстремума для произвольных негладких функций двух действительных переменных. Этот алгоритм использует свойства мажорант и диаграмм Ньютона функций двух действительных переменных, заданных таблично.

Ключевые слова: *абсолютный экстремум функции, численные методы, аппарат неклассических мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично.*

При решении различных классов прикладных задач и задач в самой математике нередко приходится иметь дело с вопросами поиска экстремума негладких функций [5]. Такие ситуации встречаются, например, в теории аппроксимации, при решении задач из области исследования операций, в приложениях теории управления движением динамических систем, в частности, при оптимизации динамических систем распределения ресурсов. В случае негладких выпуклых функций задача их оптимизации в [5] решается с использованием понятия субградиента.

Нами рассматривается подход к оптимизации негладких и разрывных функций, в основе которого лежит использование аппарата неклассических мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично. Этот подход дает возможность разрабатывать алгоритмы нулевого порядка для отыскания абсолютного экстремума произвольных функций как гладких, так и негладких. В [1], используя аппарат неклассических мажорант и диаграмм Ньютона, разработанный для функций двух действительных переменных [3,4], построен численный метод отыскания абсолютного экстремума негладких выпуклых (вогнутых) функций двух действительных переменных. В работе рассматривается обобщение этого метода в случае произвольных негладких функций двух действительных переменных.

Пусть в области $D=\{a \le x \le b,\ c \le y \le d\}$ определена функция $f(x,y)$, которая может быть произвольной негладкой функцией, и удовлетворяет условию Липшица с константой L. Будем считать, что $f(x,y)>0$ для всех $(x,y)\in D$. В области D введем сетку:

$$x_i = a + ih, \quad i=0,1,\dots,n, \quad h=(b-a)/n;$$
$$y_j = c + js, \quad j=0,1,\dots,m, \quad s=(d-c)/m.$$

Обозначим $f(x_i,y_j)=a_{ij}$ $(i=0,1,\dots,n;\ j=0,1,\dots,m)$ и для набора значений a_{ij} построим неклассическую мажоранту и диаграмму Ньютона [1,3]. Используя характеристики мажоранты Ньютона, предложим алгоритм, который дает возможность с заданной точностью находить абсолютный экстремум произвольных функций двух действительных переменных как гладких, так и негладких.

Мажоранта и диаграмма Ньютона функции, заданной таблично, и ее характеристики. Рассмотрим множество значений $f(x_i,y_j)=a_{ij}$ $(i=0,1,\dots,n;\ j=0,1,\dots,m)$. В пространстве xyz зададим множество точек $P_{ij}(x_i,y_j,-\ln a_{ij})$ с координатами $x=x_i$, $y=y_j$, $z=-\ln a_{ij}$ $(i=0,1,\dots,n;\ j=0,1,\dots,m)$. Точка $P_{ij}(x_i,y_j,-\ln a_{ij})$ называется точкой представления значения функции $f(x,y)$ в точке (x_i,y_j). Из каждой точки проведем полупрямую в положительном направлении оси Oz, перпендикулярно к плоскости xy. Множество точек этих полупрямых обозначим через S, а его выпуклую оболочку – через $C(S)$. Для каждой точки $(x,y)\in D$ определим точку $B(x,y,\kappa(x,y))$, где

$$\kappa(x,y)=\inf_{(x,y,z)\in C(S)} z\ .$$

Множество точек $B(x,y,\kappa(x,y))$, $(x,y)\in D$, образуют многогранную поверхность δ_f, которая ограничивает $C(S)$ снизу. Эта поверхность является непрерывной, выпуклой и ее уравнение имеет вид $z=\kappa(x,y)$, $(x,y)\in D$.

Обозначим $M_f(x,y)=\exp(-\kappa(x,y))$, $(x,y)\in D$.

Тогда для каждой точки (x_i,y_j) $(i=0,1,\dots,n;\ j=0,1,\dots,m)$ выполняется неравенство $a_{ij}\le M_f(x_i,y_j)$. Кроме того, $M_f(x_0,y_0)=a_{00}$, $M_f(x_0,y_m)=a_{0m}$, $M_f(x_n,y_0)=a_{n0}$, $M_f(x_n,y_m)=a_{nm}$. Тогда, аппроксимирующая функция $M_f(x,y)$ является неклассической мажорантой Ньютона для значений a_{ij} $(i=0,1,\dots,n;\ j=0,1,\dots,m)$, а δ_f – неклассической диаграммой Ньютона.

Диаграмма Ньютона δ_f функции $f(x,y)$ обладает такими свойствами:

– каждая вершина δ_f расположена в одной из точек представления P_{ij} значения функции $f(x,y)$ в точке (x_i,y_j), $(i=0,1,\dots,n;\ j=0,1,\dots,m)$;

– каждая точка представления P_{ij}, $(i=0,1,\dots,n;\ j=0,1,\dots,m)$, находится на δ_f или расположена выше ее.

Теорема. *Если выполняются условия*

$$1\le f(x,y)\le M, \quad \forall (x,y)\in D,$$

$$|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\le L(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|), \quad \forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D,$$ *то точность приближения функции $f(x,y)$ мажорантой Ньютона $M_f(x,y)$ определяется неравенством*

$$|f(x,y)-M_f(x,y)|\le 2HL(1+M),$$

где $H=\max(h,s)$.

Пусть $M_f(x_i,y_j)=T_{ij}$, $(i=0,1,\dots,n;\ j=0,1,\dots,m)$. Величины

$$R_{ij}(x)=\left(\frac{T_{i-1,j}}{T_{ij}}\right)^{\frac{1}{h}} \quad (i=1,2,\dots,n;\ j=0,1,\dots,m;\ R_{0j}=0)$$ и

$$R_{ij}(y)=\left(\frac{T_{i,j-1}}{T_{ij}}\right)^{\frac{1}{s}} \quad (j=1,2,\ldots,m; i=0,1,\ldots,n;\ R_{i0}=0)$$

назовем (i,j)–ми числовыми наклонами мажоранты Ньютона $M_f(x,y)$ соответственно в направлении осей абсцисс и ординат, а величины

$$D_{ij}(x)=\frac{R_{i+1,j}(x)}{R_{ij}(x)} \quad (i=1,2,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,m;\quad D_{0j}=D_{nj}=\infty) \quad \text{и}$$

$$D_{ij}(y)=\frac{R_{i,j+1}(y)}{R_{ij}(y)} \quad (j=1,2,\ldots,m-1;\ i=0,1,\ldots,n;\quad D_{i0}=D_{im}=\infty) \ –$$

(i,j)– ми отклонениями мажоранты Ньютона $M_f(x,y)$ соответственно в направлении осей Ox и Oy.

Из выпуклости вниз поверхности δ_f следуют неравенства:

$$R_{ij}(x)\le R_{i+1,j}(x) \quad (i=0,1,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,m),$$
$$R_{ij}(y)\le R_{i,j+1}(y) \quad (j=0,1,\ldots,m-1;\ i=0,1,\ldots,n),$$
$$D_{ij}(x)\ge 1 \quad (i=1,2,\ldots,n-1;\ j=0,1,\ldots,m),$$
$$D_{ij}(y)\ge 1 \quad (j=1,2,\ldots,m-1;\ i=0,1,\ldots,n).$$

Если точка P_{ij} находится в вершине диаграммы Ньютона δ_f, то пару индексов (i,j) называют вершинной парой индексов. Если точка P_{ij} находится на δ_f, то пару индексов (i,j) называют диаграммной парой индексов.

Пусть (k,l) – произвольная пара индексов $(0<k<n, 0<l<m)$. Определим

$$r^+_{kl}(x)=\min_{1\le i\le n-k}\left(\frac{a_{kl}}{a_{k+i,l}}\right)^{\frac{1}{ih}}, \quad r^-_{kl}(x)=\max_{1\le i\le k}\left(\frac{a_{k-i,l}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{ih}},$$

$$r^+_{kl}(y)=\min_{1\le i\le m-l}\left(\frac{a_{kl}}{a_{k,l+i}}\right)^{\frac{1}{is}}, \quad r^-_{kl}(y)=\max_{1\le i\le l}\left(\frac{a_{k,l-i}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{is}},$$

$$d_{kl}(x)=\frac{r^+_{kl}(x)}{r^-_{kl}(x)}, \quad d_{kl}(y)=\frac{r^+_{kl}(y)}{r^-_{kl}(y)}.$$

Из построения диаграммы Ньютона δ_f следует утверждение.

Утверждение. *1. Если* $d_{kl}(x)>1$ *и* $d_{kl}(y)>1$, *то пара индексов* (k,l) *является вершинной парой и* $D_{kl}(x)=d_{kl}(x)$, $D_{kl}(y)=d_{kl}(y)$, $R_{kl}(x)=r^-_{kl}(x)$, $R_{k+1,l}(x)=r^+_{kl}(x)$, $R_{kl}(y)=r^-_{kl}(y)$, $R_{k,l+1}(y)=r^+_{kl}(y)$.

2. Если $d_{kl}(x)>1$, $d_{kl}(y)=1$, *то пара индексов* (k,l) *является диаграммной парой и* $D_{kl}(x)=d_{kl}(x)$, $R_{kl}(x)=r^-_{kl}(x)$, $R_{k+1,l}(x)=r^+_{kl}(x)$, $D_{kl}(y)=1$, $R_{kl}(y)=R_{k,l+1}(y)=r^-_{kl}(y)=r^+_{kl}(y)$.

3. Если $d_{kl}(x)=1$, $d_{kl}(y)>1$, *то пара индексов* (k,l) *является диаграммной парой и* $D_{kl}(x)=1$, $R_{kl}(x)=R_{k+1,l}(x)=r^-_{kl}(x)=r^+_{kl}(x)$, $D_{kl}(y)=d_{kl}(y)$, $R_{kl}(y)=r^-_{kl}(y)$, $R_{k,l+1}(y)=r^+_{kl}(y)$.

4. Если $d_{kl}(x)=1$, $d_{kl}(y)=1$, *то пара индексов* (k,l) *является диаграммной парой и* $D_{kl}(x)=1$, $D_{kl}(y)=1$, $R_{kl}(x)=R_{k+1,l}(x)=r^-_{kl}(x)=r^+_{kl}(x)$, $R_{kl}(y)=R_{k,l+1}(y)=r^-_{kl}(y)=r^+_{kl}(y)$.

5. Если $d_{kl}(x)<1$ *или* $d_{kl}(y)<1$, *то пара индексов* (k,l) *не является диаграммной парой.*

Алгоритм метода. Выберем произвольную точку $(x_k,y_l)\in D$ $(0<k<n, 0<l<m)$ за начальное приближение точки абсолютного экстремума и находим величины $r^-_{kl}(x)$, $r^+_{kl}(x)$, $r^-_{kl}(y)$, $r^+_{kl}(y)$, $d_{kl}(x)$ и $d_{kl}(y)$.

Если выполняются условия:

$$d_{kl}(x)>1,\ d_{kl}(y)>1,\ r^-_{kl}(x)\le 1,\ r^+_{kl}(x)\ge 1,\ r^-_{kl}(y)\le 1,\ r^+_{kl}(y)\ge 1, \qquad (1)$$

то с точностью $\varepsilon\le\max(h,s)$ точку (x_k,y_l) принимаем за точку абсолютного экстремума функции $f(x,y)$, где ε – расстояние между экстремальной точкой и точкой (x_k,y_l).

Если условия (1) не выполняются, то действуем следующим образом. Используя алгоритм отыскания абсолютного экстремума функции одной переменной [2], по значениям $f(x_i,y_l)=a_{il}$, $i=0,1,\ldots,n$, с точностью $O(h)$, найдем точку абсолютного максимума функции $f(x,y_l)$. Пусть этой точкой будет точка (x_p,y_l). Тогда, используя тот же алгоритм, по значениям $f(x_p,y_j)=a_{pj}$, $j=0,1,\ldots,m$, найдем с точностью $O(s)$ точку абсолютного максимума функции $f(x_p, y)$ Если этой точкой будет точка (x_p, y_q), то ее обозначим за первое приближение точки абсолютного экстремума функции $f(x, y)$.

С точкой (x_p, y_q) поступаем так же, как и с точкой (x_k, y_l).

В результате выполнения алгоритма за конечное количество шагов мы найдем с точностью $\varepsilon \le \max(h, s)$ точку абсолютного экстремума функции $f(x, y)$.

Для уточнения найденной точки, необходимо за начальную область выбрать окрестность найденной точки и уменьшить шаг сетки.

Алгоритм метода не зависит от выбора начального приближения.

Литература.

1. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних // Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". -2007. – Вип. 5. С. 17-21.
2. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Модифікований чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій // Наук.вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. С.57-61.
3. Цегелик Г.Г. Федчишин Н.В. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип.50. с.209-211.
4. Цегелик Г.Г. Федчишин Н.В. До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1999. Вип.52. с.111-116.
5. Шор Н.З. Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.- К.: Наук. думка, 1979.- 199с.

СУБГРАДИЕНТНЫЙ МЕТОД ДЛЯ ЗАДАЧ С ОБЩИМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Godonoagă Anatol, conf. univ., dr., ASEM
Baractari Anatolie, dr., ASEM

Abstract. In this paper we describe in a general aspect the method of subgradient, for solving of a large spectrum of convex programming problems.

Для решения задач выпуклого программирования

$$R(u) \to \min \qquad (1)$$

$$u \in U \subseteq E^n \qquad (2)$$

рассматривается метод проекции субградиента:

$$u^{k+1} = \pi_U(u^k - h_k \cdot \eta^k) \qquad (3)$$

Предполагается что функция $R(u)$ непрерывна для всех $u \in U$.

Для обеспечения сходимости последовательности $\{u^k\}$, необходимо, во-первых, чтобы шаговый множитель h_k стремился к нулю по мере увеличения значений $k : h_k \to 0$. Во-вторых, стремление $\{h_k\}$ к нулю не должно быть слишком быстрым, в частности, если бы ряд $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ сходился, то в таком случае предельные точки последовательности $\{u^k\}$ могли бы не принадлежать множеству оптимальных решений U^*. Более того, эти предельные точки могли бы быть расположены на недопустимых расстояниях по отношению к множеству U^*. Очевидно, таким образом, приходим к выводу, что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} h_k$ должен расходиться: $\sum_{k=0}^{\infty} h_k = \infty$. В то же время, если вектор η^k определяет направление некоторого субградиента $g^k \in G(u^k)$ - субдифференциал функции $R(u)$ соответствующий точке $u = u^k$, то логично потребовать чтобы $h_k \ge 0$, поскольку отрицательные значения h_k приведут к постоянному увеличению значений функции