Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

XVIII Всеукраїнська
наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

4–5 жовтня 2012 року

Матеріали конференції

Львів – 2012

Із проведеного порівняльного аналізу можна зробити такий висновок: методи мажорантного типу є точнішими за методи Ейлера та трапецій і в більшості випадків за метод Рунге-Кутта другого порядку. Крім того, нами встановлено, що точність методів мажорантного типу, розроблених в [1, 2], становить не нижче за $O(h^2)$ на класі логарифмічно опуклих функцій. Така ж точність у методів, побудованих в [3, 4], на класі логарифмічно вгнутих функцій.

Приклад.

Знайти чисельний розв'язок задачі Коші

$$y' = -\frac{(1+2xy\ln x)y}{x}, \quad y(1) = 0.5$$

на проміжку $[1,2]$. Точний розв'язок $y^* = \frac{1}{x(\ln^2 x + 2)}$. У таблиці наведено значення абсолютної похибки перелічених вище методів.

Метод	*Абсолютна похибка методів в точці* $x = 2$	
	$h = 0.1$	$h = 0.05$
Інтерполяційний [1]	*0.0000164*	*0.0000043*
Інтерполяційний [3]	*0.0001104*	*0.0000273*
Екстраполяційний [2]	*0.0000547*	*0.0000169*
Екстраполяційний [4]	*0.0005361*	*0.0001363*
Ейлера	*0.0097276*	*0.0047546*
Трапецій	*0.0001635*	*0.0000406*
Рунге-Кутта 2 порядку	*0.0003919*	*0.0000939*

1. *Цегелик Г. Г.* Інтерполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь / *Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин* // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2002. – №2. – С.37-43.
2. *Цегелик Г.* Екстраполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь / *Г. Цегелик, Л. Підківка, Н. Федчишин* // Вісник Львів. ун-ту. Серія приклад. матем. та інформ. – Л.: ЛНУ ім. І. Франка, 2002. – Вип. 4. – С. 76-82.
3. *Підківка Л. І.* Новий чисельний метод інтерполяційного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь / *Л. І. Підківка, Г. Г. Цегелик* // Прикладні проблеми механіки і матем.: наук. збірник / НАН України, ІППММ ім. Я. С. Підстригача. – Л., 2004. – Вип. 2. – С. 69-73.
4. *Цегелик Г. Г.* Екстраполяційний метод числового розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь / *Цегелик Г. Г., Лещишин Н. Р.* // Волинський матем. вісник. Серія приклад. матем.: зб. наук. праць / Рівненський держ. гуманіт. ун-т. – Рівне, 2008. – Вип.5(14). – С. 265-276.

УДК 519.6

Г.Г. Цегелик, М.І. Глебена

(Львівський національний університет імені Івана Франка, Ужгородський національний університет)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД ВІДШУКАННЯ ЕКСТРЕМУМУ НЕГЛАДКИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ

Для відшукання екстремуму негладких логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних можна використати методи, розроблені в [1-4]. В основі методу, побудованого в [1], лежать властивості некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. В [2-4] для розробки методів використані властивості мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично. В [2] розроблено метод типу покоординатного підйому, методи робіт [3,4], в основі яких лежить послідовний перехід від одного наближення максимальної точки до іншого, відрізняються умовами переходу від точки до точки.

В доповіді розглядається модифікація методів, побудованих в [3,4], суть якої полягає в прискоренні пошуку екстремальної точки.

Нехай в області $D = \{a \le x \le b, c \le y \le d\}$ потрібно знайти максимальне значення негладкої логарифмічно вгнутої функції $f(x, y)$. Побудуємо в області D сітку

$$x_i = a + ih, \; i = 0,1,\ldots,n, \; h = (b-a)/n;$$

$$y_j = c + jk, \; j = 0,1,\ldots,m, \; k = (d-c)/m.$$

Позначимо $\quad f(x_i, y_j) = a_{ij} \quad (i = 0,1,\ldots,n; \; j = 0,1,\ldots,m).$

Вибираємо довільне початкове наближення максимальної точки. Нехай таким наближенням є точка (x_k, y_l). Обчислимо величини

$$R_{kl}(x) = \left(\frac{a_{k-1,l}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{h}}, \quad R_{k+1,l}(x) = \left(\frac{a_{kl}}{a_{k+1,l}}\right)^{\frac{1}{h}}$$

$$R_{kl}(y) = \left(\frac{a_{k,l-1}}{a_{kl}}\right)^{\frac{1}{k}}, \quad R_{k,l+1}(y) = \left(\frac{a_{kl}}{a_{k,l+1}}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Якщо виконуються умо $R_{kl}(x)\le 1,\ R_{k+1,l}(x)\ge 1,\ R_{kl}(y)\le 1,\ R_{k,l+1}(y)\ge 1,$ то з точніст $\varepsilon \le \max\{h,k\}$ точку (x_k, y_l) приймаємо за точку максимуму функ $f(x,y)$. Якщо умови не виконуються то відбувається перехід до наступного наближення в залежності від виконання умов. Цей перехід відбувається так, щоб досягти найбільшого значення функції $f(x,y)$ в наступній точці порівняно з попередньою.

Збіжність алгоритму не залежить від вибору початкового наближення. Якщо (α,β) - максимальна точка функції $f(x,y)$, а $(\bar{x},\bar{y})$ - максимальна точка, знайдена згідно алгоритму, то

$$|\bar{x}-\alpha|\le h,\ |\bar{y}-\beta|\le k.$$

При цьому максимальна кількість кроків для визначення точки $(\bar{x},\bar{y})$ дорівнює $m+n$.

Якщо функція $f(x,y)$ в області D задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L по x і y, то

$$f(\alpha,\beta)-f(\bar{x},\bar{y})\le L(h+k).$$

Для уточнення знайденої максимальної точки треба за початкову область вибрати окіл цієї точки і зменшити кроки h і k.

Алгоритм можна використати для визначення максимальної точки будь-якої гладкої та негладкої функції $f(x,y)$, для якої $\ln(f(x,y))$ або $\ln(f(x,y)+C)$ (у випадку $f(x,y)\le 0$ для $(x,y)\in D$) вгнута функція.

Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Алгоритм відшукання максимального значення довільної логарифмічно вгнутої функції двох дійсних змінних // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. -2009. – Вип. 18. – С. 46-50.

3. Цегелик Г., Глебена М. Чисельний метод мажорантного типу відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких функцій двох дійсних змінних // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформ. – 2010. – Вип. 16. – С. 63-70.
4. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму довільних логарифмічно вгнутих функцій двох дійсних змінних // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. -2011. – Вип. 22. - №2. – С. 50-53.
5. Глебена М.І., Цегелик Г.Г. Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних // Прикл. проблеми механ. і матем., – 2007. – Вип. 5. – С. 17-21

УДК 517.958:532.72

О. Ю. Чернуха; Ю. І. Білущак

(Центр математичного моделювання ІППММ ім.Я.С.Підстригача НАН України)

ФУНКЦІЯ КОРЕЛЯЦІЇ СТОХАСТИЧНОГО ПОЛЯ КОНЦЕНТРАЦІЇ ДОМІШКИ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНОМУ ШАРУВАТОМУ ПІВПРОСТОРІ

Зі створенням наноструктур та композитних матеріалів із заданими властивостями, сутєвої ваги набуває дослідження процесів дифузії в багатофазних тілах. При цьому у випадку дослідження шаруватих структур, часто невідомі їх геометричні параметри [1], проте достатньо повно встановлені дифузійні властивості окремих елементів та умови контакту між ними. Тут розглянуто дифузію домішкової речовина у шаруватому півпросторі, який складається з підшарів двох типів (фаз). При цьому координати включень є невідомими, тобто структура тіла є випадково неоднорідною. Прийнято, що включення розташовані в області тіла за експоненціальним розподілом [2].

Процес міграції домішки в такому тілі описують рівняння дифузії, сформульовані для кожної фази зокрема. А саме [3]

$$\rho_j\frac{\partial c_j(z,t)}{\partial t}=d_j\frac{\partial^2 c_j(z,t)}{\partial z^2},\quad z\in\Omega_j=\bigcup_{i=1}^{n_j}\Omega_{ij},\quad j=0,1,$$

де $c_j(z,t)$ - концентрація домішкових частинок у фазі j; ρ_j – густина, d_j – кінетичний коефіцієнт переносу в області Ω_j; n_j – кількість підшарів фази j, Ω_{ij} – i-та однозв'язна область фази j, $i=\overline{1,n_j}$.

Приймаємо, що на границі тіла $z=0$ підтримується постійне значення концентрації домішки c_*, а при $z\to\infty$ концентрація прямує до нуля, також накладена нульова початкова умова. На границі областей $z=z_l$ і $z=z_l+h_{l1}$ (де h_{l1} – товщина включення Ω_{l1}, l – номер підшару, $l=\overline{1,n_1}$, n_1 – кількість включень) виконуються умови неідеального контакту для функції концентрації [3].

Для знаходження розв'язку контактно-крайової задачі [3] введена у розгляд випадкова функція $c(z,t)$, яка описує поле концентрації в усьому тілі. Для цієї функції одержано рівняння дифузії для тіла в цілому. Одержана крайова задача зведена до еквівалентного інтегро-диференціального рівняння, розв'язок якого побудований у вигляді ряду Неймана.

Усереднення випадкового поля концентрації проведено за ансамблем