НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ

ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМ. Г.В. КАРПЕНКА НАН УКРАЇНИ

ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНИХ ПРОБЛЕМ МЕХАНІКИ І МАТЕМАТИКИ ІМ. Я.С. ПІДСТРИГАЧА НАН УКРАЇНИ

СЕКЦІЯ ІНФОРМАТИКИ ЗАХІДНОГО НАУКОВОГО ЦЕНТРУ НАН УКРАЇНИ І МОНМС УКРАЇНИ

за підтримки:

Західноукраїнського об'єднаного осередку IEEE
(IEEE MTT/ED/AP/CPMT/SSC West Ukrainian Chapter),
ТзОВ "Техніка для бізнесу"

II науково-технічна конференція

"ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ МЕТОДИ І СИСТЕМИ ПЕРЕТВОРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ"

присвячена пам'яті
професора Б.О. Попова

Львів
4 - 5 жовтня 2012 р.

$$\int_0^\infty x\tilde{L}_2\{f(x);x\}L_2\{g(z);x\}dx =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{2\Gamma(a)}\int_0^\infty yf(y)\tilde{\mathrm{P}}_2\{g(z);y\}dy. \qquad (11)$$

Теорема 2. Для інтегрального перетворення (2) справедлива така формула обернення:

$$f(u) = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(c)}\int_0^\infty (u,x)^{-1} g(x)\Theta(ux)dx, \qquad (12)$$

$$\Theta(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} x^{-s}\zeta^{-1}(s)ds,\ \zeta(s) = {}_2\Psi_1\left[\begin{matrix}(a;\tau);(s;\gamma); \\ (c;\beta);\end{matrix}\middle| -b\right].$$

$$g(x) = \tilde{L}\{f(u);x\}.$$

1. Kilbas A.A., Saigo M. H-Transforms.- Chapman and Hall/ CRC, 2004.- 390 p.
2. Virchenko N. On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. "Fract. Calculus and Appl. Anal.".- 2006.- 9, N2. - 101-108 p.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. - М.: Наука, 1965. - 296 с.

ПРО ТОЧНІСТЬ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ТА ДВОХ ДІЙСНИХ ЗМІННИХ НЕКЛАСИЧНИМИ МАЖОРАНТАМИ НЬЮТОНА

Глебена М.І., Грипинська Н.В., Фундак Л.І., Цегелик Г.Г.

Ужгородський національний університет,
Хмельницький національний університет,
Львівський національний університет імені Івана Франка

Розглядається оцінка апроксимації функцій однієї та двох дійсних змінних некласичними мажорантами Ньютона.

The Non-classical Newtonian majorants of functions of one and two real variables given tabularly has been used for the uniform approximation of continuous functions.

В [1-3] побудовано апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї та двох дійсних змінних, заданих таблично. В [4-7] цей апарат використано для апроксимації функцій та побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь та їхніх систем, які є точними на певних класах функцій. В [8-10] на основі властивостей некласичних мажорант і діаграм Ньютона розроблено чисельні методи нульового порядку для відшукання абсолютного екстремуму негладких функцій однієї та багатьох дійсних змінних, збіжність яких не залежить від вибору початкового наближення.

Розглянемо питання оцінки похибки апроксимації функцій однієї та двох дійсних змінних некласичними мажорантами Ньютона.

Нехай $f(x)\in C[a,b]$ є логарифмічно вгнутою функцією на проміжку $[a,b]$ і на цьому проміжку задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L. Виберемо на $[a,b]$ систему рівновіддалених вузлів $x_i = x_0+ih$, $i=0,1,\dots,n$, де $x_0=a$, $h=\frac{b-a}{n}$. Побудуємо для функції $y=f(x)$ мажоранту Ньютона, визначену на проміжку $[a,b]$, за точками $x_0,x_1,\dots,x_n$ і значеннями функції в цих точках. Позначимо її через $M_f^{(n)}(x)$. Оскільки $f(x)$ – логарифмічно вгнута функція, то $M_f^{(n)}(x)$ на кожному з проміжків $[x_i,x_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,n-1$, збігається з мажорантою Ньютона, побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

Теорема 1. Якщо для функції $f(x) \in C[a, b]$ виконуються умови:

1) $f(x)$ є логарифмічно вгнутою функцією на $[a, b]$,

2) $f(x)$ на $[a, b]$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L,

то

$$\lim_{n \to \infty} M_f^{(n)}(x) = f(x)$$

рівномірно для всіх $x \in [a, b]$ і існує натуральне N_0 таке, що для всіх $n \geq N_0$ справедлива оцінка

$$\left| f(x) - M_f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{L(b-a)}{n}.$$

Нехай тепер $f(x) \in C[a, b]$ є довільною функцією, яка задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L на $[a, b]$. Припустимо, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a, b]$. Виберемо на $[a, b]$ систему рівновіддалених вузлів $\overline{x}_i = \overline{x}_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, де $\overline{x}_0 = a$, $h = \dfrac{b-a}{n}$. Доповнимо цю систему критичними точками функції $f(x)$, які належать проміжку $[a, b]$ і не входять у вибрану систему вузлів (якщо такі існують). В результаті такого доповнення одержимо нову систему вузлів $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m}$, де

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+m} = b,$$

m $(m \geq 0)$ – кількість критичних точок функції $y = f(x)$, які належать проміжку $[a, b]$ і не входять в систему вузлів $\overline{x}_0, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$. Для нової системи вузлів виконується умова

$$x_{i+1} - x_i \leq h, \quad i = 0, 1, \ldots, n+m-1.$$

Побудуємо функцію $g_n(f; x)$, визначену на $[a, b]$, яка на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$ збігається з мажорантою Ньютона, побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Очевидно, $g_n(f; x) \in C[a, b]$.

Теорема 2. Якщо функція $f(x) \in C[a, b]$ на проміжку $[a, b]$

задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L, то

$$\lim_{n \to \infty} g_n(f; x) = f(x)$$

рівномірно для всіх $x \in [a, b]$ і справедлива оцінка

$$\left| f(x) - g_n(f; x) \right| \leq \frac{L(b-a)}{n}.$$

Зауважимо, що якщо $\min\limits_{x \in [a,b]} f(x) = -m < 0$, то функцію $g_n(f; x)$ будуємо для функції $f(x) + m + 1$, яка на всьому проміжку $[a, b]$ буде не менша 1. Тоді апроксимуючою функцією для $f(x)$ буде функція $g_n(f; x) - m - 1$.

Якщо вимагати від функції більшої гладкості, то якість наближення функції $f(x)$ за допомогою функції $g_n(f; x)$, яка на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$ збігається з мажорантою Ньютона, побудованою за двома точками $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$, покращується.

Нехай $f(x) \in C^2[a, b]$, $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a, b]$. Виберемо на проміжку $[a, b]$ систему точок $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, де $x_0 = a$, $h = (b-a)/n$, і на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, побудуємо некласичну мажоранту Ньютона за двома точками $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ та $(x_i, f(x_i))$. Одержимо

$$M_f(x) = f(x_{i-1})^{\frac{x_i - x}{h}} \cdot f(x_i)^{\frac{x - x_{i-1}}{h}}, \quad x \in [x_{i-1}, x_i].$$

Теорема 3. Якщо $f(x) \in C^2[a, b]$, $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a, b]$, то на кожному проміжку $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, справджується оцінка

$$\left| f(x) - f(x_{i-1})^{\frac{x_i - x}{h}} f(x_i)^{\frac{x - x_{i-1}}{h}} \right| \leq \frac{h^2}{8} \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} \left| \frac{d^2}{dx^2} \ln f(x) \right|.$$

Якщо побудувати функцію $g_n(f; x)$, яка на кожному з проміжків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, збігається з мажорантою Ньютона, побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ і $(x_i, f(x_i))$, то для всіх $x \in [a, b]$ справджується оцінка

$$\left|f(x)-g_n(f;x)\right|\le\frac{h^2}{8}\max_{x\in[a,b]}f(x)\max_{x\in[a,b]}\left|\frac{d^2}{dx^2}\ln f(x)\right|.$$

Крім цього, якщо $f(x)\in C^2[a,b]$ - логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,b]$, то дістаємо більш просту оцінку похибки наближення функції $f(x)$ функцією $g_n(f;x)$

Теорема 4. Якщо $f(x)\in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,b]$, то

$$\lim_{n\to\infty}g_n(f;x)=f(x)$$

рівномірно для всіх $x\in[a,b]$ і справедлива оцінка

$$g_n(f;x)-f(x)\le\frac{M_2}{8}h^2,$$

де $M_2=\max\limits_{x\in[a,b]}f''(x)$.

Розглянемо тепер випадок, коли $f(x,y)\in C(D)$, де $D=\{(x,y)|a\le x\le b,c\le y\le d\}$. Розіб'ємо область D на прямокутники прямими $x=x_i$ $(i=0,1,...,p)$ і $y=y_j$ $(j=0,1,...,q)$, де $x_{i+1}=x_i+h_1$, $y_{j+1}=y_j+h_2$, $h_1=(b-a)/p$, $h_2=(d-c)/q$. Кожний прямокутник діагоналлю розіб'ємо на два трикутники: верхній і нижній. В результаті такого розбиття ми одержимо $2pq$ трикутників. Нехай $g_f(x,y)$ – функція, яка на кожному трикутнику збігається з некласичною мажорантою Ньютона, побудованою за значеннями функції $f(x,y)$ в трьох точках – вершинах трикутника.

Теорема 5. Якщо виконуються умови

$$1\le f(x,y)\le M,\ \forall(x,y)\in D,$$

$$\left|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)\right|\le L(|x_1-x_2|+|y_1-y_2|),\ \forall(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in D,$$

то точність наближення $f(x,y)$ функцією $g_f(x,y)$ визначається нерівністю

$$\left|f(x,y)-g_f(x,y)\right|\le 2hL(1+M),$$

де $h=\max(h_1,h_2)$.

Зауважимо, якщо $f(x,y)$ – логарифмічно вгнута функція, то $g_f(x,y)=M_f(x,y)$, де $M_f(x,y)$ – некласична мажоранта Ньютона, побудована для функції $f(x,y)$ за її значеннями у вершинах трикутників.

1. Цегелик Г. Г. Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение / Г. Цегелик // Укр. матем. журн. – 1989. –Т.41. – №9. – С. 1273-1276.
2. Цегелик Г. Г. Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Л., 1998. – Вип. 50. – С. 209-211.
3. Цегелик Г. Г. До побудови апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – Л., 1999. – Вип. 52. – С. 116-121.
4. Цегелик Г. Г. Використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, для апроксимації функцій / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2001. – №6. – С.32-37.
5. Цегелик Г. Г. Інтерполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь / Г. Г. Цегелик, Н. В. Федчишин // Доп. НАН України. Математика. Природознавство. Технічні науки. – 2002. – №2. – С.37-43.
6. Підківка Л. Інтерполяційний метод мажорантного типу розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь / Л. Підківка, Г. Цегелик // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. приклад. матем. та інформ. – Л., 2002. – Вип. 5. – С. 26-31.
7. Цегелик Г. Г. Нелінійний, неявний, однокроковий чисельний метод розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь / Г. Г. Цегелик // Прикл. проблеми мех. і матем. – 2005. – Вип.3. – С.21-27.
8. Глебена М. І. Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій / М. І. Глебена, Г. Г. Цегелик // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. 12-13. – С. 55-58.
9. Глебена М. І. Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних / М. І. Глебена, Г. Г. Цегелик // Прикл. проблеми мех. і матем. – 2007. – Вип.5. – С. 17-21.
10. Глебена М. І. Чисельний метод покоординатного підйому відшукання абсолютного максимуму негладких і розривних функцій багатьох змінних / М. І. Глебена, Г. Г. Цегелик // Прикл. проблеми мех. і матем. – 2009. – Вип 7. – С. 78-82.