Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет
імені Івана Франка

XIX Всеукраїнська
наукова конференція

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА ІНФОРМАТИКИ

3–4 жовтня 2013 року

Матеріали конференції

Львів – 2013

УДК 519.622

Г. Г. Цегелик, М. І. Глебена

(Львівський національний університет імені Івана Франка,
Ужгородський національний університет)

ОЦІНКА ПОХИБКИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ НЕКЛАСИЧНОЮ МІНОРАНТОЮ НЬЮТОНА

В [1] побудовано аппарат некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, який використаємо для оцінки похибки наближення функцій некласичною мінорантою Ньютона.

Нехай $f(x)\in[a,b]$ є логарифмічно опуклою функцією на проміжку $[a,b]$ і на цьому проміжку задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L. Виберемо на $[a,b]$ систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, де $x_0 = a$, $h = (b-a)/n$. Побудуємо для функції $y = f(x)$ некласичну мінoранту Ньютона $m_f(x)$, визначену на проміжку $[a,b]$, за точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ і значеннями функції в цих точках. Позначимо її через $m_f^{(n)}(x)$. Оскільки $f(x)$ – логарифмічно опукла функція, то $m_f^{(n)}(x)$ на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, збігається з мінорантою Ньютона, побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

Теорема 1. Якщо для функції $f(x)\in C[a,b]$ виконуються умови:

1) $f(x)$ є логарифмічно опуклою функцією на $[a,b]$,
2) $f(x)$ на $[a,b]$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L, то

$$\lim_{n\to\infty} m_f^{(n)}(x) = f(x)$$

рівномірно для всіх $x\in[a,b]$ і існує таке натуральне N_0, що для всякого $n \ge N_0$ справедлива оцінка

$$0 \le m_f^{(n)}(x) - f(x) \le \frac{L(b-a)}{n}.$$

Нехай тепер $f(x)\in C[a,b]$ – довільна функція, яка задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L на $[a,b]$. Припустимо, що $f(x) > 0$ для всіх $x\in[a,b]$. Виберемо на $[a,b]$ систему рівновіддалених точок $\bar{x}_i = \bar{x}_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, де $\bar{x}_0 = a$, $h = (b-a)/n$. Доповнимо цю систему критичними точками функції $f(x)$, які належать проміжку $[a,b]$ і не входять у вибрану систему точок (якщо такі існують). В результаті такого доповнення одержимо нову систему вузлів $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m}$, де

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+m} = b,$$

m $(m \ge 0)$ – кількість критичних точок функції $y = f(x)$, які належать проміжку $[a,b]$ і не входять в систему точок $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Для нової системи точок виконується умова

$$x_{i+1} - x_i \le h,\ i = 0,1,\ldots,n+m-1.$$

Побудуємо функцію $q_n(f;x)$, визначену на $[a,b]$, яка на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$ збігається з мінорантою Ньютона , побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Очевидно, $q_n(f;x)\in C[a,b]$.

Теорема 2. Якщо функція $f(x)\in C[a,b]$ на проміжку $[a,b]$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L, то

$$\lim_{n\to\infty} q_n(f;x) = f(x)$$

рівномірно за всіма $x\in[a,b]$ і справедлива оцінка

$$|f(x) - q_n(f;x)| \le \frac{L(b-a)}{n}.$$

Якщо $f(x)\in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція, то можна одержати іншу оцінку похибки апроксимації $f(x)$ некласичною мінорантою Ньютона.

Теорема 3. Якщо $f(x)\in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція, то

$$m_f(x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}(b-a)^2,$$

де $M_2 = \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$.

1. *Глебена М.І., Цегелик Г.Г.* Апарат некласичних мінорант Ньютона функцій та його використання / М.І. Глебена, Г.Г. Цегелик // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. -2013. – Вип. 22. - №2. – С. 16-21.