УДК 518.12

Мирослава І. Глебена, викладач,
Григорій Г. Цегелик, д.ф.-м.н., професор.

Чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму негладких і розривних функцій двох дійсних змінних.

В роботі запропоновано чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму довільних функцій двох дійсних змінних. В основі цього методу лежить ідея проектування поверхні, яка досліджується на координатні площини.

Ключові слова: методи оптимізації, мажоранта та діаграма Ньютона.

M. I. Hlebena, assistant,
H.H. Tsehelyk ,D.Sci. (Phys.-Math.). Professor.

A numerical method of absolute extremum search for non-differential and discontinuous two real variables functions.

A numerical method of finding the absolute extremum for non-differential and discontinuous two real variables functions is suggested. The method is based on the projecting of the surface on the coordinate plain.

Key Words: optimization method, majorant and Newton diagram

E-mail: *kafmmsep@franko.lviv.ua, HlebenaM@gmail.com.*

Статтю представив доктор фіз.-мат. наук, професор Хусаїнов Д.Я.

Вступ

Відшукання екстремуму негладких і розривних функцій є важливою і складною математичною проблемою [1,2] . Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів, за допомогою яких можна було б знаходити абсолютний екстремум як неперервно-диференційовних, так і довільних негладких і розривних функцій.

Нами розглядається підхід до оптимізації негладких і розривних функцій, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій заданих таблично. Підхід дає можливість розробляти алгоритми відшукання абсолютного екстремуму будь-якої функції як гладкої, так і негладкої та розривної.

В [3,4] побудовано чисельні методи типу покоординатного підйому відшукання абсолютного екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї дійсної змінної [3] та двох [4], заданих таблично [5].

В роботі розглянемо побудову чисельного методу відшукання абсолютного екстремуму довільних функцій двох дійсних змінних, в основі якого лежить ідея проектування поверхні, яка досліджується, на координатні площини і використання методу відшукання абсолютного екстремуму функції однієї змінної.

1. Постановка задачі

Розглянемо функцію $z = f(x,y)$, визначену в деякій області $D=\{a \le x \le b, c \le y \le d\}$. При цьому вважаємо, що функція $f(x,y)>0$ для всіх $(x,y)\in D$. Необхідно побудувати чисельний метод відшукання абсолютного максимуму функції $z = f(x,y)$ яка, взагалі кажучи, може бути довільною негладкою чи розривною функцією в D.

Оскільки при побудові чисельного методу використовуються поняття, пов'язані з апаратом некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та алгоритм відшукання абсолютного екстремуму функції однієї змінної, то спочатку зупинимось на цих питаннях.

2. Мажоранта та діаграма Ньютона функції, заданої таблично, та їх характеристики.

Розглянемо функцію дійсної змінної $y = f(x)$, яка задана своїми значеннями у деяких точках x_i $(i=0,1,\dots,n)$: $f(x_i)=y_i$ $(i=0,1,\dots,n)$.

Нехай $|y_i| = a_i \le M$ $(i=0,1,\dots,n)$, $a_0 \cdot a_n \ne 0$, де M – деяка стала.

Точка $P_i(x_i,-\ln a_i)$ з координатами $x=x_i$, $y=-\ln a_i$ в площині xy називається точкою зображення значення функції $y=f(x)$ в точці $x=x_i$.

Припустимо, що точки зображення P_i значень функції $y=f(x)$ в точках x_i $(i=0,1,\dots,n)$ в площині xOy побудовані. З кожної точки P_i проведемо напівпряму в додатному напрямку осі

Oy, перпендикулярно до осі Ox. Множину точок цих напівпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку через $C(S)$. Для кожного $x \in [x_0, x_n]$ визначимо точку $B_x(x, \kappa_x)$, де $\kappa_x = \inf\limits_{(x,y) \in C(S)} y$.

Множина точок $B_x(x, \kappa_x)$, $x \in [x_0, x_n]$, утворюють лінію δ_f, яка обмежує $C(S)$ знизу. Ця лінія є неперервною, опуклою ламаною лінією і її рівняння має вигляд $y = \kappa(x)$, $x \in [x_0, x_n]$,

де $\kappa(x) = \kappa_x$.

Ламана лінія δ_f, визначена на проміжку $[x_0, x_n]$, називається некласичною діаграмою Ньютона функції $y = f(x)$ на цьому проміжку.

Діаграма Ньютона δ_f, функції $y = f(x)$ має такі властивості:

- кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_i значення функції $y = f(x)$ в точці x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$;
- кожна точка зображення P_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ знаходиться на δ_f або вище неї.

Позначимо

$$M_f(x) = exp(-\kappa(x)), \quad x \in [x_0, x_n].$$

Тоді для кожного x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ виконується нерівність $|f(x_i)| = a_i \le M_f(x_i)$. Із побудови δ_f випливає, що $-ln|f(x_i)| \ge \kappa(x_i)$, або $|f(x_i)| \le exp(-\kappa(x_i)) = M_f(x_i)$. Крім того,

$$M_f(x_0) = |f(x_0)|, \quad M_f(x_n) = |f(x_n)|.$$

Функція $y = M_f(x)$, визначена на проміжку $[x_0, x_n]$, називається некласичною мажорантою Ньютона функції $y = f(x)$ на цьому проміжку.

Нехай $M_f(x_i) = T_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Величини

$$R_i = \left(\frac{T_{i-1}}{T_i} \right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}} \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \ R_0 = 0) \text{ і}$$

$$D_i = \frac{R_{i+1}}{R_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1; \quad D_0 = D_n = \infty)$$

називаються відповідно i-им числовим нахилом і i-им відхиленням діаграми Ньютона δ_f.

Якщо точка зображення P_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ знаходиться в вершині δ_f, то індекс i називається вершинним індексом, якщо ж на δ_f, то – діаграмним індексом δ_f. Індекси $i = 0$ та $i = n$ відносяться до вершинних індексів. Множину всіх вершинних індексів позначимо через I, а множину діаграмних індексів – через G. Очевидно, $I \subset G$ і $T_i = a_i$ для всіх $i \in G$.

Нехай φ_i – кут між відрізком $B_{x_{i-1}} B_{x_i}$ діаграми Ньютона δ_f і додатним напрямком осі абсцис. Тоді кутовий коефіцієнт k_i відрізка $B_{x_{i-1}} B_{x_i}$ визначається за формулою

$$k_i = \frac{\kappa_{x_i} - \kappa_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{-ln\, T_i + ln\, T_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = ln \left(\frac{T_{i-1}}{T_i} \right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}.$$

Тому $k_i = ln\, R_i$. Звідси випливає, що

$$R_i = exp(tg\varphi_i), \ D_i = exp(tg\varphi_{i+1} - tg\varphi_i).$$

Якщо $\{i_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, s; s \le n)$ – послідовність вершинних індексів δ_f, то

$$0 = R_0 = R_{i_1} < R_{i_2} < \ldots < R_{i_s} = R_n;$$

$$R_{i_k+1} = R_{i_k+2} = \ldots = R_{i_{k+1}};$$

$$D_i \ge 1 \ (i = 0, 1, \ldots, n); \ D_{i_k} > 1 \ (k = 1, 2, \ldots, s).$$

Якщо p і q – два послідовні вершинні індекси δ_f, то мажоранта Ньютона $M_f(x)$ на проміжку $[x_p, x_q]$ виражається формулою

$$M_f(x) = \left(a_p^{x_q - x} a_q^{x - x_p} \right)^{\frac{1}{x_q - x_p}}.$$

Алгоритм відшукання абсолютного максимуму функції однієї змінної, який розглянемо нижче, використовує алгоритми відшукання зростаючої і спадної послідовності вершинних індексів і числових нахилів діаграми Ньютона.

3. Алгоритм відшукання зростаючої (спадної) послідовності вершинних індексів і числових нахилів діаграми Ньютона.

Припустимо, що за допомогою r кроків вже знайдені послідовні вершинні індекси $\{i_0, i_1, \ldots, i_{r-1}\}$ де $0 = i_0 < i_1 < \ldots < i_{r-1}$, і числові нахили $R_{i_0}, R_{i_1}, \ldots, R_{i_{r-1}}$, де $0 = R_{i_0} < R_{i_1} < \ldots < R_{i_{r-1}}$. Тоді на $(r+1)$-му кроці

знаходимо $$R = \min_{i_{r-1} < i \le n} \left(\frac{a_{i_{r-1}}}{a_i} \right)^{\frac{1}{x_i - x_{i_{r-1}}}}. \qquad (1)$$

Визначаємо індекс i, для якого в (1) досягається мінімум, і позначаємо його через i_r. Якщо мінімум в (1) досягається для декількох індексів $i_{r1}, i_{r2}, \ldots, i_{rv_r}$, то i_r є більшим з них: $i_r = \max\limits_{1 \le j \le v_r} i_{rj}$.

Покладаємо $R_{i_r} = R$.

Аналогічно розглядається випадок спадної послідовності вершинних індексів.

4. Алгоритм відшукання абсолютного максимуму довільної функції $f(x)$ на проміжку [a,b].

Вважаємо, що $f(x)>0$ для всіх $x\in[a,b]$. Якщо ця умова не виконується, то розглядаємо функцію $f(x)+C$, де C – довільна стала, така, що $f(x)+C>0$ для всіх $x\in[a,b]$.

Виберемо на проміжку $[a,b]$ систему точок $x_0, x_1, \ldots, x_n$, де $x_k = x_0 + kh$ $(k=0,1,\ldots,n)$, $x_0=a$, $h=(b-a)/n$, і знайдемо значення функції $y=f(x)$ в цих точках. Нехай $f(x_i)=a_i$, $i=0,1,\ldots,n$.

Алгоритм пошуку максимального значення функції складається з двох етапів. На першому етапі шукаємо початкову точку. На другому відбувається пошук екстремальної точки, використовуючи послідовність вершинних індексів і числових нахилів діаграми Ньютона для функції $f(x)$, заданої в точках x_k $(k=0,1,\ldots,n)$ (зростаючу або спадну).

Виберемо середній індекс із проміжку $[0,n]$. Нехай цим індексом буде $i=m$. Тоді знаходимо r_m^-, r_m^+, d_m за формулами [5]:

$$r_m^+ = \min_{1\le i\le n-m}\left(\frac{a_m}{a_{m+i}}\right)^{\frac{1}{x_{m+i}-x_m}},$$

$$r_m^- = \max_{1\le i\le m-1}\left(\frac{a_{m-i}}{a_m}\right)^{\frac{1}{x_m-x_{m-i}}},$$

$$d_m = \frac{r_m^+}{r_m^-}.$$

Можливі такі три випадки (теорема 4 із [6]):

1. $d_m>1$. В цьому випадку за початковий вершинний індекс діаграми Ньютона беремо індекс $i=m$, початковою точкою буде точка $x=x_m$.
2. $d_m=1$. Індекс $i=m$ є діаграмним індексом, але не вершинним.
3. $d_m<1$. Індекс $i=m$ не належить множині діаграмних індексів.

Розглянемо перший випадок. Якщо $r_m^-\le 1$ і $r_m^+\ge 1$, то точку x_m приймаємо за точку абсолютного максимуму функції $y=f(x)$ і на цьому робота алгоритму завершується. Якщо $r_m^-<1$ і $r_m^+<1$, то індекс $i=m$ беремо за початковий вершинний індекс діаграми Ньютона, покладаємо $R_m=r_m^-$ і на другому етапі шукаємо зростаючу послідовність вершинних індексів і числових нахилів діаграми Ньютона доти, доки для деякого індекса $i=k$ не виконається умова $R_k\le 1$, $R_{k+1}\ge 1$ при $k<n$, або $R_k<1$ при $k=n$. Тоді точку x_k приймаємо за точку абсолютного максимуму функції на проміжку $[a,b]$. Якщо $r_m^->1$ і $r_m^+>1$, то індекс $i=m$ беремо за початковий вершинний індекс діаграми Ньютона, покладаємо $R_m=r_m^-$ і на другому етапі шукаємо спадну послідовність вершинних індексів і числових нахилів діаграми Ньютона доти, доки для деякого індекса $i=k$ не виконається умова $R_k\le 1$, $R_{k+1}\ge 1$ при $k>0$, або $R_{k+1}>1$ при $k=0$. Тоді точку x_k приймаємо за точку абсолютного максимуму функції на проміжку $[a,b]$.

Нехай має місце другий випадок. Якщо $r_m^-=r_m^+=1$, то точку x_m приймаємо за точку абсолютного максимуму функції $y=f(x)$. Якщо $r_m^-=r_m^+<1$, то шукаємо найбільший із індексів ν, для якого досягається

$$\min_{\nu>m}\left(\frac{a_m}{a_\nu}\right)^{\frac{1}{x_\nu-x_m}}. \qquad (3)$$

Якщо таким індексом є $\nu=r$, то за початкову точку приймемо x_r, індекс r беремо за початковий вершинний індекс діаграми Ньютона, покладаємо $R_r=r_m^+$ і на другому етапі шукаємо зростаючу послідовність вершинних індексів і числових нахилів діаграми Ньютона доти, доки для деякого індекса $i=k$ не виконається умова $R_k\le 1$, $R_{k+1}\ge 1$ при $k<n$, або $R_k<1$ при $k=n$. Тоді точку x_k приймаємо за точку абсолютного максимуму функції на проміжку $[a,b]$. Якщо $r_m^-=r_m^+>1$, то шукаємо найменший із індексів ν, для якого досягається

$$\max_{\nu<m}\left(\frac{a_\nu}{a_m}\right)^{\frac{1}{x_m-x_\nu}}. \qquad (4)$$

Якщо таким індексом є $\nu=r$, то за початкову точку приймемо x_r, індекс r беремо за початковий вершинний індекс діаграми Ньютона, покладаємо $R_r=r_m^+$ і на другому етапі шукаємо спадну послідовність вершинних індексів і числових нахилів доти, доки для деякого індекса $i = k$ не виконається умова $R_k \le 1$, $R_{k+i} \ge 1$ при $k > 0$, або $R_{k+1} > 1$ при $k = 0$. Тоді точку x_k приймаємо за точку абсолютного максимуму функції $y = f(x)$.

У третьому випадку, якщо $r_m^- < 1$, то максимальне значення функція $y = f(x)$ досягає на проміжку $[x_q; x_n]$, де q – найбільший з індексів ν, для якого досягається мінімум в (3). Якщо $r_m^+ > 1$, то абсолютний максимум функції досягається на проміжку $[x_0; x_p]$, де p – найменший з індексів ν, для якого досягається максимум в (4). Визначивши проміжок, на якому функція досягає свого найбільшого значення, для відшукання точки абсолютного максимуму використовуємо алгоритм, наведений в [7], або даний алгоритм.

У разі $r_m^- > 1$ і $r_m^+ < 1$ знаходимо найменший з індексів ν, для яких досягається максимум в (4), і найбільший з індексів ν, для яких досягається мінімум в (3). Нехай цими індексами будуть відповідно $\nu = p$ і $\nu = q$. Тоді за початкову точку приймаємо x_p або x_q і використовуємо приведений алгоритм.

5. Метод розв'язування задачі.

Позначимо через S_1 і S_2 множину точок, які є проекцією поверхні $z = f(x, y)$ відповідно на площини xOz і yOz, а через $C(S_1)$ і $C(S_2)$ їх опуклі оболонки. Нехай $z = \varphi(x)$ і $z = \psi(y)$ – частини границь відповідно опуклих оболонок $C(S_1)$ і $C(S_2)$, які їх обмежують зверху. Очевидно, якщо $\max\limits_{x\in[a,b]} \varphi(x)$ досягається в точці $x = \bar{x}$, а $\max\limits_{y\in[c,d]} \psi(y)$ досягається в точці $y = \bar{y}$, то точка $(\bar{x}, \bar{y})$ є точкою абсолютного екстремуму функції $z = f(x, y)$. Для наближеного відшукання точки $(\bar{x}, \bar{y})$ поступаємо так.

В площині xOz і yOz побудуємо апроксимуючі функції для $z = \varphi(x)$ і $z = \psi(y)$. Для цього в області D побудуємо прямокутну сітку:

$$x = x_i = a + ih, \quad i = 0, 1, \dots, n, \; h = (b - a)/n,$$

$$y = y_j = c + jk, \quad j = 0, 1, \dots, m, \; k = (d - c)/m,$$

і розглянемо множину точок $(x_i, y_j) \in D$. Тоді для кожного фіксованого $x = x_i$ знайдемо $\bar{z}_i = \max\limits_{0\le j\le m} f(x_i, y_j)$ і для кожного фіксованого $y = y_j$ знайдемо $\tilde{z}_j = \max\limits_{0\le i\le n} f(x_i, y_j)$. В площині xOz і yOz побудуємо опуклі оболонки відповідно множин точок $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ і $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m$. Частини границь цих опуклих оболонок, які обмежують їх зверху, позначимо відповідно через $z = \bar{\varphi}(x)$ і $z = \tilde{\psi}(y)$. Тоді функції $z = \bar{\varphi}(x)$ і $z = \tilde{\psi}(y)$ будуть апроксимуючими функціями відповідно для $z = \varphi(x)$ і $z = \psi(y)$. Тому якщо $\bar{x}_0 = \max\limits_{x\in[a,b]} \bar{\varphi}(x)$, $\bar{y}_0 = \max\limits_{y\in[c,d]} \tilde{\psi}(y)$, то точка $(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$ буде наближеною точкою до екстремальної точки $(\bar{x}, \bar{y})$.

Для знаходження точок абсолютного максимуму функцій $z = \bar{\varphi}(x)$ і $z = \tilde{\psi}(y)$, які задані відповідно таблицями своїх значень $\bar{z}_0, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ і $\tilde{z}_0, \tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m$ можна використати алгоритм відшукання абсолютного екстремуму довільної функції однієї дійсної змінної, наведений вище.

У випадку розривних функцій вимагається, щоб точки розриву не потрапляли до точок, за якими будуються апроксимуючі функції.

6. Приклади

6.1. Розглянемо задачу відшукання абсолютного максимуму функції

$$f(x, y) = -\sqrt{|x \cdot y| - x} + 100$$

Графік цієї функції зображено на рис.1. $D = \{-2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2\}$. Покладемо $h = 0.1$ і для кожного $x_i = -2 + 0.1 \cdot i$, $i = 0, 1, \dots, 40$ знайдемо значення $\bar{z}_i$. В результаті одержимо таблицю значень функції $z = \bar{\varphi}(x)$ (табл.1).

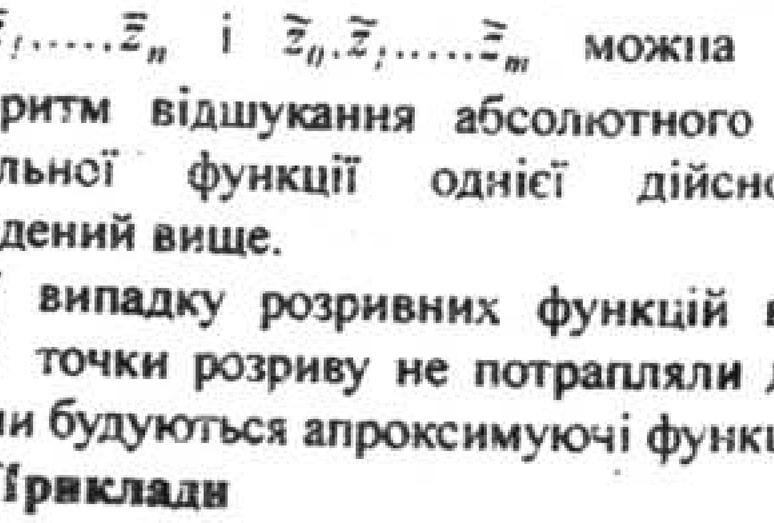

Рис.1.

Тоді за алгоритмом [6] шукаємо абсолютний максимум функції $z = \bar{\varphi}(x)$, яка представлена таблицею своїх значень. Одержуємо точку $x_{20} = 0$ абсолютного максимуму функції.

Апроксимуючою функцією $z = \widetilde{\psi}(y)$ є пряма $z = 100$, тобто максимум функції $z = \widetilde{\psi}(y)$ досягається в будь-якій точці $y \in [-2;2]$. Отже, абсолютний максимум функції $f(x, y) = 100$.

6.2. Знайти абсолютний максимум функції [1].

$$f(x,y) = \begin{cases} -\sqrt{|x \cdot y|} + 1, & x \in \{x : x < 0, y < 0\}, \\ -\sqrt{|x \cdot y|} & x \notin \{x : x < 0, y < 0\}. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображений на рис.2.

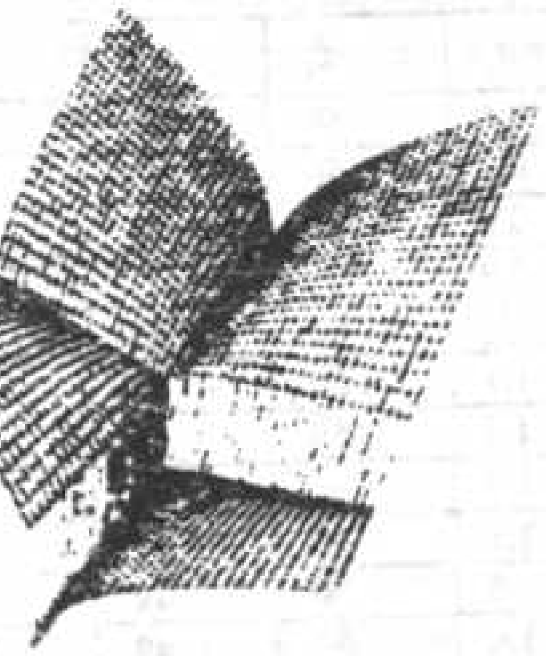

Рис.2.

Для того, щоб виконувалась умова невід'ємності значень функції, розглянемо функцію $f(x,y) + 50$ в прямокутній області $D = \{-2 \le x \le 3, -3 \le y \le 3\}$.

Покладемо $h = 0.1$ і для кожного $x_i = -2 + 0.1 \cdot i$, $i = 0,1,\ldots,50$, знайдемо значення $\bar{z}_i$. В результаті одержимо таблицю значень функції $z = \overline{\varphi}(x)$ (табл.2).

Тоді за алгоритмом [4] шукаємо абсолютний максимум функції $z = \overline{\varphi}(x)$, яка представлена таблицею своїх значень. Одержуємо точку $x_{19} = -0.1$ абсолютного максимуму функції.

Аналогічно, покладемо $k = 0.1$ і для кожного $y_j = -3 + 0.1 \cdot j$, $j = 0,1,\ldots,60$, знайдемо значення $\bar{z}_j$. В результаті одержимо таблицю значень функції $z = \overline{\psi}(y)$ (табл.3). Точкою абсолютного максимуму є $y_{29} = -0.1$. Уточнюючи одержану точку (-0,1;-0,1), маємо точку (-0,00001;-0,00001) і абсолютний максимум функції $f(x, y) = 0.99999$.

6.3. Знайти абсолютний максимум функції

$$f(x, y) = 4\left|\sin(x)\cos(y)e^{\left|\cos\left(\left(x^2+y^2\right)/200\right)\right|}\right|,$$

графік якої зображено на рис.3

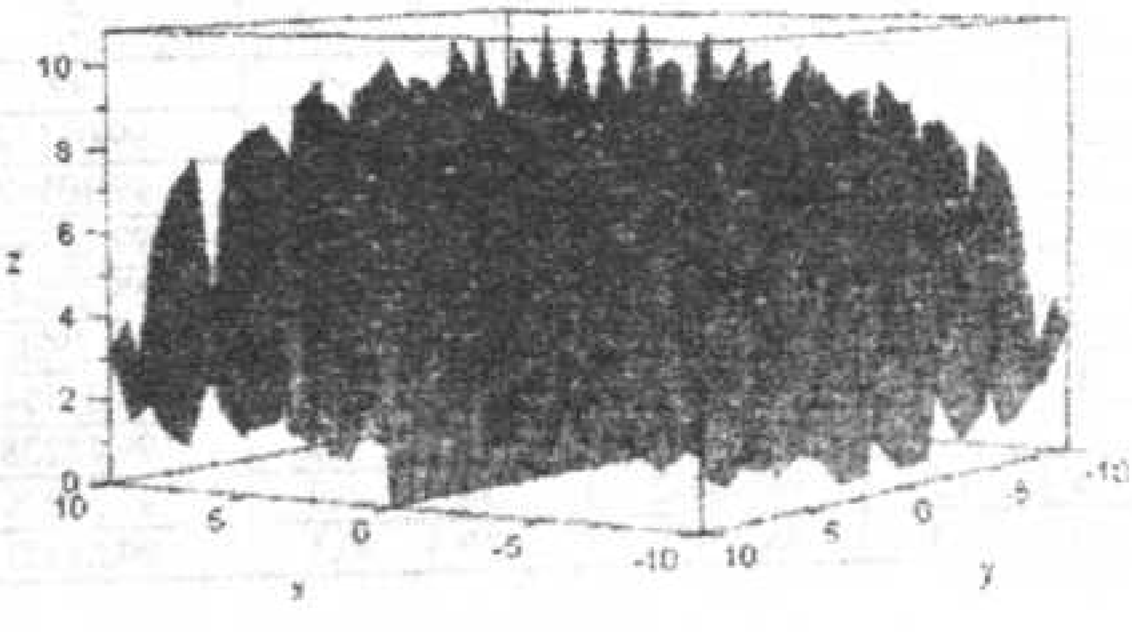

Рис.3.

Шукатимемо абсолютний максимум функції $f(x, y) + 5$ в $D = \{-5 \le x \le 35.4, -5 \le y \le 35.4\}$.

Приймемо точку $(-5;-5)$ за початкове наближення і покладемо $h = 0.1$. Застосовуючи наведений алгоритм одержимо точку $(-1.6;0)$. Для уточнення одержаної точки розглянемо область

$$D = \{-1.7 \le x \le 2.34; -1.7 \le y \le 2.34\}$$

з кроком $h = 0.01$. В результаті застосування алгоритму одержимо точку $(-1.57;0)$, яку приймаємо з точністю $h = 0.01$ за точку максимуму. Отже $\max f(x, y) \approx 10.8723$ з точністю $h = 0.01$.

Висновок.

Побудовано новий чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких і розривних функцій, в основі якого лежить проектування поверхні, яка досліджується, на координатні площини і використання методу відшукання абсолютного екстремуму функції однієї змінної, запропонованого в [4]. Метод може бути узагальнений на випадок функцій багатьох змінних.

Список використаних джерел

1. *Батухтин В.Д и др.* Оптимизация разрывных функций. -М.: Наука, 1984.
2. *Шор Н.З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их приложения.- К.: Наук. думка, 1979.
3. *Глебена М.І.. Цегелик Г.Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму недиференційованих функцій двох дійсних змінних // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14-15. - С.18-21.

Таблиця 1

i	x_i	$\tilde{z}_i$	i	x_i	$\tilde{z}_i$	i	x_i	$\tilde{z}_i$	i	x_i	$\tilde{z}_i$
0	-2	98.585	**10**	-1	99	**20**	0	100	**30**	1	100
1	-1.9	98.6216	**11**	-0.9	99.05132	**21**	0.1	100	**31**	1.1	100
2	-1.8	98.65836	**12**	-0.8	99.10557	**22**	0.2	100	**32**	1.2	100
3	-1.7	98.69616	**13**	-0.7	99.16334	**23**	0.3	100	**34**	1.4	100
4	-1.6	98.73509	**14**	-0.6	99.2254	**24**	0.4	100	**35**	1.5	100
5	-1.5	98.77526	**15**	-0.5	99.2928	**25**	0.5	100	**36**	1.6	100
6	-1.4	98.81678	**16**	-0.4	99.36754	**26**	0.6	100	**37**	1.7	100
7	-1.3	98.85982	**17**	-0.3	99.45228	**27**	0.7	100	**38**	1.8	100
8	-1.2	98.90455	**18**	-0.2	99.55279	**28**	0.8	100	**39**	1.9	100
9	-1.1	98.95119	**19**	-0.1	99.68377	**29**	0.9	100	**40**	2	100

Таблиця 2

i	x_i	$\tilde{z}_i$	i	x_i	$\tilde{z}_i$	i	x_i	$\tilde{z}_i$	i	x_i	$\tilde{z}_i$
0	-2	50.5528	**13**	-0.7	50.7354	**26**	0.6	50	**39**	1.9	50
1	-1.9	50.5641	**14**	-0.6	50.755	**27**	0.7	50	**40**	2	50
2	-1.8	50.5757	**15**	-0.5	50.7764	**28**	0.8	50	**41**	2.1	50
3	-1.7	50.5877	**16**	-0.4	50.8	**29**	0.9	50	**42**	2.2	50
4	-1.6	50.6	**17**	-0.3	50.8267	**30**	1	50	**43**	2.3	50
5	-1.5	50.6127	**18**	-0.2	50.8585	**31**	1.1	50	**44**	2.4	50
6	-1.4	50.6258	**19**	-0.1	50.9	**32**	1.2	50	**45**	2.5	50
7	-1.3	50.6394	**20**	0	50	**33**	1.3	50	**46**	2.6	50
8	-1.2	50.6535	**21**	0.1	50	**34**	1.4	50	**47**	2.7	50
9	-1.1	50.6683	**22**	0.2	50	**35**	1.5	50	**48**	2.8	50
10	-1	50.6837	**23**	0.3	50	**36**	1.6	50	**49**	2.9	50
11	-0.9	50.7	**24**	0.4	50	**37**	1.7	50	**50**	3	50
12	-0.8	50.7171	**25**	0.5	50	**38**	1.8	50			

Таблиця 3

j	y_j	$\tilde{z}_j$	j	y_j	$\tilde{z}_j$	j	y_j	$\tilde{z}_j$	j	y_j	$\tilde{z}_j$	j	y_j	$\tilde{z}_j$
0	-3	50.4522	**13**	-1.7	50.5876	**26**	-0.4	50.8	**39**	0.9	50	**52**	2.2	50
1	-2.9	50.4614	**14**	-1.6	50.6	**27**	-0.3	50.8267	**40**	1	50	**53**	2.3	50
2	-2.8	50.4708	**15**	-1.5	50.6127	**28**	-0.2	50.8585	**41**	1.1	50	**54**	2.4	50
3	-2.7	50.4804	**16**	-1.4	50.6258	**29**	-0.1	50.9	**42**	1.2	50	**55**	2.5	50
4	-2.6	50.49	**17**	-1.3	50.6394	**30**	0	50	**43**	1.3	50	**56**	2.6	50
5	-2.5	50.5	**18**	-1.2	50.6535	**31**	0.1	50	**44**	1.4	50	**57**	2.7	50
6	-2.4	50.5101	**19**	-1.1	50.6683	**32**	0.2	50	**45**	1.5	50	**58**	2.8	50
7	-2.3	50.5204	**20**	-1	50.6837	**33**	0.3	50	**46**	1.6	50	**59**	2.9	50
8	-2.2	50.5309	**21**	-0.9	50.7	**34**	0.4	50	**47**	1.7	50	**60**	3	50
9	-2.1	50.5417	**22**	-0.8	50.7171	**35**	0.5	50	**48**	1.8	50			
10	-2	50.5527	**23**	-0.7	50.7354	**36**	0.6	50	**49**	1.9	50			
11	-1.9	50.5641	**24**	-0.6	50.755	**37**	0.7	50	**50**	2	50			
12	-1.8	50.5757	**25**	-0.5	50.7763	**38**	0.8	50	**51**	2.1	50			

4. *Глебена М.І., Цегелик Г.Г.* Чисельний метод відшукання екстремуму негладких функцій двох дійсних змінних. // Наук. зб. "Прикладні проблеми механіки і математики". -2007. – Вип. 5. - С. 17-21.
5. *Цегелик Г.Г.* Теория мажорант и диаграмм Ньютона функций, заданных таблично, и ее приложение // Укр. мат. журн.- 1989. Т.41.- №9. - С.1273-1276.
6. *Глебена М.І., Цегелик Г.Г.* Модифікований чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму // Наук. вісник УжНУ. Сер. матем. і інформ.–2008.–Вип. 16. -С.57-61.
7. *Глебена М.І., Цегелик Г.Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. – Вип. 12-13. - С. 55-58.
8. *Цегелик Г.Г., Федчишин Н.В.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій двох дійсних змінних, заданих таблично // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. 1998. Вип.50. - С.209-211.

Надійшла до редколегії 10.03.2009