ISSN 2078–5097. Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інф. 2014. Вип. 21. С. 58–66
Visnyk of the Lviv University. Series Appl. Math. and Informatics. Issue 21. P. 58–66

УДК 519.622.517.925

АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МІНОРАНТ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО, ТА ЙОГО ВИКОРИСТАННЯ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Г. Цегелик[1], М. Глебена[2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua
[2]Ужгородський національний університет, вул. Підгірна, 46, Ужгород, 88000

Побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, використано цей апарат для оцінки точності наближення функцій некласичними мінорантами Ньютона.

Ключові слова: некласична міноранта Ньютона та її діаграма, апроксимація функцій.

1. ВСТУП

В [2] розглянуто побудову апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї й двох дійсних змінних, заданих таблично, та його використання для побудови чисельних методів розв'язування задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь і їхніх систем, точних на певних класах функцій. В [1] апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона використано для розробки чисельних методів оптимізації негладких логарифмічно вгнутих функцій однієї, двох і багатьох дійсних змінних.

Розглянемо побудову апарату некласичних мінорант Ньютона та їхніх діаграм функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично, й оцінимо точність наближення функції некласичною мінорантою Ньютона.

2. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Нехай функція дійсної змінної $y = f(x)$ задана своїми значеннями в деяких точках x_i, $i = 1,2,\ldots,n$:

$$f(x_i) = y_i, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{1}$$

Вважатимемо, що

$$|y_i| = a_i, \quad 0 < a_i \le M, \quad i = 0,1,\ldots,n, \tag{2}$$

де M – деяка стала. Треба для функції $f(x)$ побудувати міноранту Ньютона, визначити властивості, оцінити похибку наближення функції мінорантою Ньютона.

3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ

3.1. АПАРАТ НЕКЛАСИЧНИХ МІНОРАНТ НЬЮТОНА ФУНКЦІЙ, ЗАДАНИХ ТАБЛИЧНО

Означення 1. Точку $P_i(x_{i,} -\ln a_i)$ з координатами $x = a_i$, $y = -\ln a_i$ у площині xy назвемо точкою зображення значення функції $y = f(x)$ у точці $x = x_i$.

Припустимо, що точки зображення P_i значень функції $y = f(x)$ у точках x_i, $i = 0,1,\ldots,n$, в площині xy побудовані. З кожної точки P_i проведемо півпряму у від'ємному напрямі осі Oy перпендикулярно до осі Ox. Множину точок цих півпрямих позначимо через S, а її опуклу оболонку – через $C(S)$. Для кожного $x \in [x_0, x_n]$ визначимо точку $D_x(x, \chi_x)$, де

$$\chi_x = \sup_{(x,y)\in C(S)} y .$$

Множина точок $D_x(x, \chi_x)$, $x \in [x_0, x_n]$, утворює лінію δ_f, яка обмежує $C(S)$ зверху. Ця лінія є неперервною, вгнутою ламаною лінією і її рівняння таке:

$$y = \chi(x), \ x \in [x_0, x_n],$$

де $\chi(x) = \chi_x$.

Позначимо

$$m_f(x) = \exp(-\chi(x)), \ x \in [x_0, x_n].$$

Тоді для кожного x_i, $i = 0,1,\ldots,n$, виконується нерівність

$$m_f(x_i) \le |f(x_i)| = a_i .$$

Справді, з побудови δ_f випливає, що

$$-\ln|f(x_i)| \le \chi(x_i),$$

або

$$|f(x_i)| \ge \exp(-\chi(x_i)) = m_f(x_i).$$

Крім того, $m_f(x_0) = |f(x_0)|$, $m_f(x_n) = |f(x_n)|$.

Означення 2. Функцію $y = m_f(x)$, визначену на проміжку $[x_0, x_n]$, назвемо некласичною мінорантою Ньютона функції $y = f(x)$ на цьому проміжку, а ламану лінію δ_f – її діаграмою.

На рис. 1 побудована діаграма міноранти Ньютона функції, заданої в дев'ятьох точках

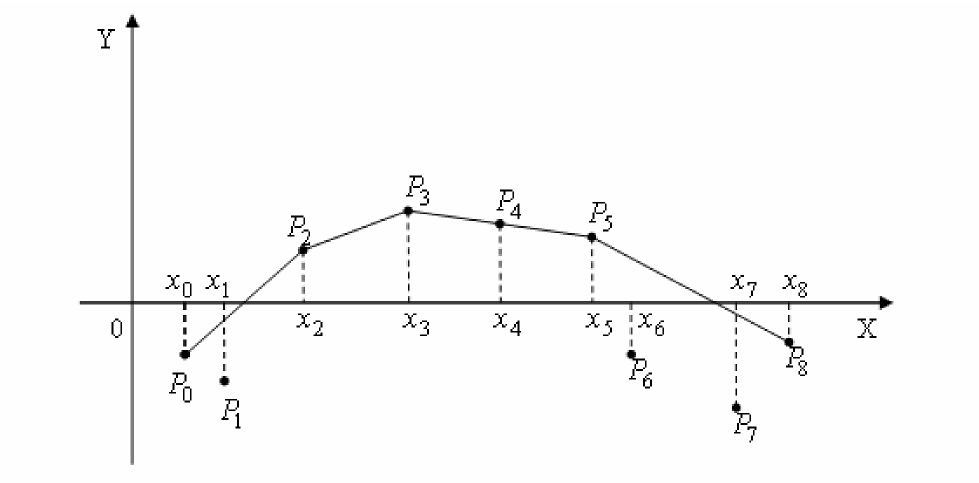

Рис. 1. Діаграма міноранти Ньютона функції, заданої в дев'ятьох точках

Діаграма δ_f міноранти Ньютона функції $y = f(x)$ має такі властивості:

– кожна вершина δ_f розміщена в одній із точок зображення P_i значення функції $y = f(x)$ у точці x_i, $i = 0,1,\ldots,n$;

– кожна точка зображення P_i, $i = 0,1,\ldots,n$, розміщена на δ_f або нижче неї.

Нехай

$$m_f(x_i) = t_i,\ i = 0,1,\ldots,n.$$

Означення 3. Величини

$$r_i = \left(\frac{t_{i-1}}{t_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}} \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

і

$$d_i = \frac{r_{i+1}}{r_i} \quad (i = 1,2,\ldots,n-1)$$

назвемо відповідно i-м числовим нахилом і i-м відхиленням діаграми δ_f міноранти Ньютона.

Означення 4. Якщо точка зображення P_i, $i = 0,1,\ldots,n$, розташована у вершині δ_f, то індекс i назвемо вершинним індексом, якщо ж на δ_f, то діаграмним індексом δ_f. Індекси $i = 0$ та $i = n$ зачислимо до вершинних індексів.

Множину всіх вершинних індексів позначимо через I, а множину діаграмних індексів – через G. Очевидно, $I \subseteq G$ і $t_i = a_i$ для всіх $i \in G$.

Нехай φ_i – кут між відрізком $D_{x_{i-1}} D_{x_i}$ діаграми δ_f і додатним напрямом осі абсцис. Тоді кутовий коефіцієнт k_i відрізка $D_{x_{i-1}} D_{x_i}$ визначиться за формулою

$$k_i = \frac{\chi_{x_i} - \chi_{x_{i-1}}}{x_i - x_{i-1}} = \frac{-\ln t_i + \ln t_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = \ln\left(\frac{t_{i-1}}{t_i}\right)^{\frac{1}{x_i - x_{i-1}}}.$$

Тому

$$k_i = \ln r_i.$$

Звідси випливає, що

$$r_i = \exp(tg\varphi_i),\ d_i = \exp(tg\varphi_{i+1} - tg\varphi_i).$$

Якщо $\{i_k\}$ $(k = 0,1,\ldots,s;\ s \le n)$ – послідовність вершинних індексів δ_f, то

$$r_{i_1} > r_{i_2} > \cdots > r_{i_s};$$
$$r_{i_k+1} = r_{i_k+2} = \cdots = r_{i_{k+1}}, \quad k = 0,1,\ldots,s-1;$$
$$d_i \le 1, \quad i = 1,2,\ldots,n-1;$$
$$d_{i_k} < 1, \quad k = 1,2,\ldots,s-1.$$

Нехай p і q – два послідовні вершинні індекси δ_f, індекс i задовольняє умову $p < i < q$. Розглянемо відрізок $D_{x_p} D_{x_q}$ діаграми δ_f (рис. 2).

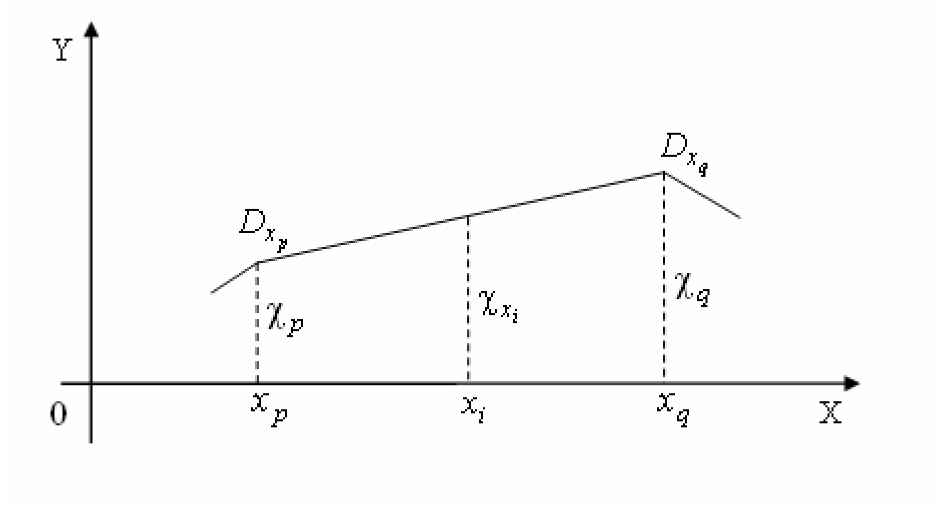

Рис. 2. Відрізок $D_{x_p}D_{x_q}$ діаграми δ_f

Тоді

$$\frac{\chi_{x_q}-\chi_{x_p}}{x_q-x_p}=\frac{\chi_{x_i}-\chi_{x_p}}{x_i-x_p},$$

або

$$\frac{-\ln a_q+\ln a_p}{x_q-x_p}=\frac{-\ln t_i+\ln a_p}{x_i-x_p}.$$

Звідси

$$t_i=\left(a_p^{x_q-x_i}a_q^{x_i-x_p}\right)^{\frac{1}{x_q-x_p}}.$$

Аналогічно одержуємо формулу для мінoранти Ньютона $m_f(x)$ на проміжку $\lfloor x_p, x_q\rfloor$

$$m_f(x)=\left(a_p^{x_q-x}a_q^{x-x_p}\right)^{\frac{1}{x_q-x_p}}.$$

3.2. ВЛАСТИВОСТІ МІНОРАНТИ НЬЮТОНА ТА ЇЇ ДІАГРАМИ

Якщо рівняння відрізка $D_{x_p}D_{x_q}$ діаграми δ_f набуває вигляду $y=kx+b$, $x\in\lfloor x_p, x_q\rfloor$, то

$$m_f(x)=\exp(-kx-b),\ x\in\lfloor x_p, x_q\rfloor.$$

Звідси випливає таке твердження.

Твердження 1.

а) Якщо $k\neq 0$, то мінoранта Ньютона $m_f(x)$ на проміжку $\lfloor x_p, x_q\rfloor$ є строго опуклою функцією; якщо $k=0$, то $m_f(x)$ на цьому проміжку є відрізком, паралельним до осі абсцис.

б) Якщо $f(x)=A\exp(kx+b)$, то $m_f(x)=|f(x)|$.

З побудови δ_f випливають такі твердження.

Твердження 2.

а) Міноранта Ньютона $m_f(x)$, $x \in [x_0, x_n]$, складається з $(s-1)$ – ї опуклих дуг, де s – кількість вершинних індексів δ_f.

б) Якщо функція є логарифмічно опуклою, то $m_f(x) \geq f(x)$ для всіх $x \in [x_0, x_n]$; якщо логарифмічно вгнутою, то $m_f(x) \leq f(x)$ для всіх $x \in [x_0, x_n]$.

Твердження 3. Для того, щоб для функції $f(x)$, заданої таблицею значень (1), існувала діаграма δ_f, визначена на проміжку $[x_0, x_n]$, необхідно і достатньо, щоб для неї виконувалась умова (2).

Твердження 4. Міноранта Ньютона $m_f(x)$ функції $y = f(x)$, заданої таблицею значень (1), є неперервною і логарифмічно опуклою функцією на проміжку $[x_0, x_n]$.

Твердження 5. Якщо для функції $y = f(x)$, заданої таблицею значень (1), виконуються умови (2), то

$$\min_{1 \prec i \leq n} \left| f(x_i \right| = \min_{x \in [x_0, x_n]} m_f(x).$$

Якщо

$$\min_{1 \prec i \leq n} \left| f(x_i \right| = \left| f(x_s \right|,$$

то

$$\min_{x \in [x_0, x_n]} m_f(x) = m_f(x_s) = t_s,$$

де $s \in G$.

3.3. ОЦІНКА ПОХИБКИ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ НЕКЛАСИЧНОЮ МІНОРАНТОЮ НЬЮТОНА

Розглянемо питання оцінки похибки апроксимації функції некласичною мінорантою Ньютона. Нехай $f(x) \in C[a,b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,b]$ і на цьому проміжку задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L. Виберемо на $[a,b]$ систему рівновіддалених точок $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, де $x_0 = a$, $h = (b-a)/n$. Побудуємо для функції $y = f(x)$ некласичну міноранту Ньютона $m_f(x)$, визначену на проміжку $[a,b]$, за точками $x_0, x_1, \ldots, x_n$ і значеннями функції в цих точках. Позначимо її через $m_f^{(n)}(x)$. Оскільки $f(x)$ – логарифмічно опукла функція, то $m_f^{(n)}(x)$ на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, збігається з мінорантою Ньютона, побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

Теорема 1. Якщо для функції $f(x) \in C[a,b]$ виконуються умови:

1) $f(x)$ є логарифмічно опуклою функцією на $[a,b]$,
2) $f(x)$ на $[a,b]$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L, то

$$\lim_{n \to \infty} m_f^{(n)}(x) = f(x)$$

рівномірно для всіх $x \in [a,b]$ й існує таке натуральне N_0, що для всякого $n \geq N_0$ правильна оцінка

$$0 \leq m_f^{(n)}(x) - f(x) \leq \frac{L(b-a)}{n}.$$

Доведення. Знайдемо таке натуральне число N_0, що для кожного $n \geq N_0$ на всіх проміжках $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, функція $f(x)$ буде монотонно зростаючою або монотонно спадною. Тоді для будь-якого $x \in [a,b]$

$$m_f^{(n)}(x) - f(x) \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} \left(m_f^{(n)}(x) - f(x) \right) \leq$$

$$\leq \max_{0 \leq k \leq n-1} |f(x_k) - f(x_{k+1})| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} L|x_k - x_{k+1}| = \frac{L(b-a)}{n}.$$

Отже, для будь-якого $x \in [a,b]$

$$m_f^{(n)}(x) - f(x) \leq \frac{L(b-a)}{n}.$$

Звідси випливає рівномірна збіжність $m_f^{(n)}(x)$ до $f(x)$ при $n \to \infty$.

Нехай тепер $f(x) \in C[a,b]$ – довільна функція, яка задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L на $[a,b]$. Припустимо, що $f(x) > 0$ для всіх $x \in [a,b]$. Виберемо на $[a,b]$ систему рівновіддалених точок $\bar{x}_i = \bar{x}_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, де $\bar{x}_0 = a$, $h = (b-a)/n$. Доповнимо цю систему критичними точками функції $f(x)$, які належать проміжку $[a,b]$ і не входять у вибрану систему точок (якщо такі існують). Внаслідок такого доповнення одержимо нову систему вузлів $x_0, x_1, \ldots, x_{n+m}$, де

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+m} = b,$$

m $(m \geq 0)$ – кількість критичних точок функції $y = f(x)$, які належать проміжку $[a,b]$ і не входять до системи точок $\bar{x}_0, \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$. Для нової системи точок виконується умова

$$x_{i+1} - x_i \leq h, \; i = 0,1,\ldots,n+m-1.$$

Побудуємо функцію $q_n(f;x)$, визначену на $[a,b]$, яка на кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$ збігається з мінорантою Ньютона , побудованою для функції $f(x)$ за двома точками $(x_i, f(x_i))$ і $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$. Очевидно, $q_n(f;x) \in C[a,b]$.

Теорема 2. Якщо функція $f(x) \in C[a,b]$ на проміжку $[a,b]$ задовольняє умову Ліпшиця зі сталою L, то

$$\lim_{n \to \infty} q_n(f;x) = f(x)$$

рівномірно за всіма $x \in [a,b]$ і правильна оцінка

$$|f(x) - q_n(f;x)| \leq \frac{L(b-a)}{n}.$$

Доведення. Нехай

$$\max_{x \in [a,b]} |f(x) - q_n(f;x)| = \max_{x \in [x_k, x_{k+1}]} |f(x) - q_n(f;x)|.$$

Оскільки на проміжку $[x_k, x_{k+1}]$ функція $q_n(f;x)$ збігається з мінорантою Ньютона , побудованою для $f(x)$ за двома точками $(x_k, f(x_k))$ і $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, і на цьому проміжку $f(x)$ монотонно спадає або зростає, то

$$\max_{x\in[x_k, x_{k+1}]} |f(x) - q_n(f;x)| \le |f(x_k) - f(x_{k+1})| \le L|x_k - x_{k+1}| \le \frac{L(b-a)}{n}.$$

Ця нерівність і доводить теорему.

Якщо $f(x) \in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція, то можна одержати іншу оцінку похибки апроксимації $f(x)$ некласичною мінорантою Ньютона.

Теорема 3. Якщо $f(x) \in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція, то

$$m_f(x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}(b-a)^2,$$

де $M_2 = \max_{x\in[a,b]} f''(x)$.

Доведення. Оскільки $f(x)$ – логарифмічно опукла функція, то $m_f(x) \ge f(x)$ і $L_1(x) \ge m_f(x)$ для всіх $x \in [a,b]$, де $L_1(x)$ – інтерполяційний поліном Лагранжа першого степеня, побудований за вузлами $x_0 = a,\ x_1 = b$. Тоді

$$m_f(x) - f(x) \le L_1(x) - f(x) = -\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b), \quad \xi \in (a,b).$$

Добуток $-(x-a)(x-b)$ на проміжку $[a,b]$ набуває найбільшого значення $\frac{(b-a)^2}{4}$ при $x = \frac{a+b}{2}$. Тому

$$m_f(x) - f(x) \le -\frac{f''(\xi)}{8}(b-a)^2,$$

або

$$m_f(x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}(b-a)^2.$$

Якщо на проміжку $[a,b]$ вибрати систему точок $x_i = x_0 + ih$, $i = 0,1,\ldots,n$, де $x_0 = a$, $h = (b-a)/n$, і на кожному проміжку $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$, побудувати некласичну міноранту Ньютона $m_f^{(n)}(x)$ за двома точками $(x_k, f(x_k))$ і $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$, то з теореми випливає такий наслідок.

Наслідок 1. Якщо $f(x) \in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,b]$, то для всіх $x \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots,n-1$ справджується оцінка

$$m_f(x) - f(x) \le \frac{M_2}{8}h^2.$$

До цього часу ми всюди вважали, що $f(x) > 0$, для всіх $x \in [a,b]$. Якщо ця умова не виконується, то для наближення функції $f(x)$ некласичною мінорантою Ньютона робимо так. Розглянемо функцію $f(x) + C$, де C – деяка стала, така що $f(x) + C > 0$ для всіх $x \in [a,b]$. Тоді на проміжку $[a,b]$ вибираємо систему точок $x_k = x_0 + kh$, $k = 0,1,\ldots,n$, де $x_0 = a$, $h = (b-a)/n$, і для функції $f(x) + C$ будуємо мінoранту Ньютона, яку позначаємо через $m_{f+c}(x)$. Очевидно, функція $m_{f+c}(x)-C$ буде апроксимуючою функцією для $f(x)$ і точність наближення $f(x)$ функцією $m_f(x)+C$ буде визначатись точністю наближення функції $f(x)+C$ мінорантою Ньютона $m_{f+c}(x)$, тобто будуть справджуватись аналогічні теореми про точність наближення $f(x)$ функцією $m_{f+c}(x)-C$ як у випадку наближення функції $f(x)>0$ мінорантою Ньютона $m_f(x)$.

Наслідок 2. Якщо $f(x)\in C^2[a,b]$ – логарифмічно опукла функція на проміжку $[a,b]$, то для всіх $x\in[a,b]$ справджується оцінка

$$m_f(x)-f(x)\le\frac{M_2}{8}h^2 .$$

4. ВИСНОВКИ

Побудовано апарат некласичних мінорант Ньютона функцій однієї дійсної змінної, заданих таблично. Визначено оцінки точності наближення функцій некласичною мінорантою Ньютона.

Список використаної літератури

1. *Глебена М. І.* Математичні моделі та числові методи мажорантного типу для аналізу дискретних оптимізаційних процесів: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. фіз.-мат. наук: спец. 01.05.02 Математичне моделювання та обчислювальні методи / М. І. Глебена. – Івано-Франківськ, 2012. – 23 с.
2. *Цегелик Г. Г.* Аппарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г. Г. Цегелик. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190 с.

Стаття: надійшла до редколегії 02.10.2013
доопрацьована 20.11.2013
прийнята до друку 27.11.2013

АППАРАТ НЕКЛАССИЧЕСКИХ МИНОРАНТ НЬЮТОНА ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЧНО, И ЕГО ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДЛЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Г. Цегелик[1], М. Глебена[2]

[1]Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua
[2]Ужгородский национальный университет, ул. Подгорная, 46, Ужгород, 88000

Построен аппарат неклассических минорант Ньютона функций одной действительной переменной, заданных таблично. Установлены оценки точности приближения функций неклассической минорантой Ньютона.

Ключевые слова: неклассическая миноранта Ньютона, аппроксимация функций.

THE APPARATUS OF NON-CLASSICAL NEWTONIAN MINORANTS FUNCTIONS GIVEN TABULARLY AND THE USE IT FOR THE APPROXIMATION OF FUNCTIONS

H. Tsehelyk[1], M. Hlebena[2]

[1]Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000, e-mail: kafmmsep@franko.lviv.ua
[2]Uzhgorod National University, Pidgirna Str., 46, Uzhgorod, 88000

The apparatus of non-classical Newtonian minorants functions given tabularly has been constructed. The accuracy of approximation of functions of non-classical Newtonian minorants has been established.

Key words: non-classical Newtonian minorants, accuracy of approximation.