УДК 519.6

М. І. Глебена, О. М. Гапак, Р. С. Шулла (Ужгородський нац. ун-т), **Г. Г. Цегелик** (Львівський нац. ун-т ім. І.Франка)

ЧИСЕЛЬНИЙ МЕТОД МАЖОРАНТНОГО ТИПУ ОПТИМІЗАЦІЇ НЕГЛАДКИХ ЛОГАРИФМІЧНО ВГНУТИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

The numerical method of finding of the global extremum of logarithmic concave arbitrary multivariables functions is suggested. The method is based on the use of the apparatus of non-classical Newtonian majorant and diagrams functions which are given discretely.

Пропонується чисельний метод відшукання абсолютного екстремуму довільної логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних, в основі якого лежить використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично.

1. Вступ. При розв'язуванні прикладних задач визначення оптимальних режимів складних систем необхідно розв'язувати задачі на знаходження екстремумів негладких і розривних функцій. Такі ситуації зустрічаються, наприклад, в теорії апроксимації, при розв'язуванні окремих задач дослідження операцій, в застосуванні теорії керування рухом динамічних систем тощо. Тому великий інтерес становить розробка чисельних методів, за допомогою яких можна було б знаходити абсолютний екстремум як неперервно-диференційовних, так і довільних негладких і розривних функцій.

Нами ведеться робота над розробленням таких методів. В їх основу покладено використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично [1].

В $[2, 3]$ розглянуто використання апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій однієї та двох дійсних змінних, заданих таблично для оптимізації негладких функцій однієї та двох дійсних змінних.

В статті розглядається побудова апарату некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій багатьох дійсних змінних, заданих таблично, та алгоритм нульового порядку оптимізації негладких логарифмічно вгнутих функцій багатьох змінних.

2. Основний результат. Розглянемо функцію $f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$, визначену в області $D = \{a_i \leq x_i \leq b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) > 0$ для всіх $x = \left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) \in D$. Нехай функція $y = f\left(x\right)$ задана своїми значеннями на дискретній множині точок $\left(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \ldots, a_n + k_n h_n\right)$, де $k_i = 0, 1, \ldots, m_i$, $h_i = \left(b_i - a_i\right)/m_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Позначимо через M дискретну множину точок $f\left(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \ldots, a_n + k_n h_n\right) = a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$.

У просторі змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n, y$ побудуємо точки зображення $P_{k_1 k_2 \ldots k_n}\left(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \ldots, a_n + k_n h_n, -\ln a_{k_1 k_2 \ldots k_n}\right)$ і з кожної точки $P_{k_1 k_2 \ldots k_n}$ проведемо півпряму в додатному напрямі осі Oy. Сукупність точок цих півпрямих позначимо через S, а їхню опуклу оболонку – через $C\left(S\right)$. Для кожної точки $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \in D$ визначимо $B_x\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \chi_x\right)$, де $\chi_x = \inf\limits_{x \in C(S)} y$.

Множина точок $B_x,\ x \in D$, утворює багатогранну поверхню δ_f, яку називатимемо некласичною діаграмою Ньютона, визначеною в області D, функції

$y = f(x)$, заданої таблично. Ця поверхня є неперервною, опуклою і її рівняння має вигляд $y = \chi(x)$, де $\chi(x) = \chi_x,\ x \in D$.

Позначимо

$$M_f(x) = \exp(-\chi(x)),\ x \in D.$$

Тоді для будь-якого $x \in R$ виконується нерівність $-\ln f(x) \geq \chi(x)$, або $f(x) \leq \exp(-\chi(x)) = M_f(x)$. Функцію $M_f(x)$, визначену в області D, називатимемо некласичною мажорантою Ньютона функції $y = f(x)$, заданої таблично.

Позначимо через $T_{k_1 k_2 \ldots, k_n}$ значення мажоранти Ньютона в точці $x = (a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \ldots, a_n + k_n h_n)$. Величини

$$R_{k_1 \ldots, k_i \ldots k_n}(x_i) = \left(\frac{T_{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_n}}{T_{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n}} \right)^{\frac{1}{h_i}},$$

називатимемо $(k_1 \ldots, k_i, \ldots k_n)$ числовими нахилами мажоранти $M_f(x)$ в напрямі осі Ox_i, а величини

$$D_{k_1 \ldots k_i \ldots k_n}(x_i) = \frac{R_{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_{i+1}, k_{i+1}, k_n}(x_i)}{R_{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots, k_n}(x_i)}$$

називатимемо $(k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n)$ відхиленнями в напрямі осі Ox_i.

Із опуклості діаграми δ_f випливають такі властивості:

$$R_{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots k_n}(x_i) \leq R_{k_1, \ldots k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots k_n}(x_i),$$

$$D_{k_1, \ldots, k_i, \ldots, k_n}(x_i) \geq 1,$$

$$\max_{x \in R} f(x) = \max_{x \in D} M_f(x).$$

Крім того, якщо

$$\max_{x \in R} f(x) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n),$$

то

$$\max_{x \in D} M_f(x) = M_f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n).$$

Ці властивості лежать в основі чисельного методу нульового порядку відшукання з певною точністю екстремуму будь-якої логарифмічно вгнутої функції багатьох змінних за будь-якого початкового наближення. Зазначимо, якщо $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - логарифмічно вгнута функція, то $T_{k_1 k_2 \ldots, k_n} = a_{k_1 k_2 \ldots k_n}$.

Суть методу полягає в наступному. Якщо в точці $(a_1 + k_1 h_1, a_2 + k_2 h_2, \ldots, a_n + k_n h_n) \in M$ виконуються умови:

$$R_{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots k_n}(x_i) \leq 1,$$

$$R_{k_1, \ldots k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots k_n}(x_i) > 1 \qquad (1)$$

для всіх $i = 1, 2, \ldots, n$, то ця точка з точністю $h = \max\limits_{1 \leq i \leq n} h_i$ приймається за точку максимуму функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Якщо для фіксованого i,($i = 1, 2, \ldots, n$) умови (1) не виконуються, то

$$R_{k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i, k_{i+1}, \ldots k_n}(x_i) > 1,$$

$$R_{k_1,\dots k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\dots k_n}(x_i) > 1, \tag{2}$$

або

$$R_{k_1,\dots,k_{i-1},k_i,k_{i+1},\dots k_n}(x_i) < 1,$$
$$R_{k_1,\dots k_{i-1},k_i+1,k_{i+1},\dots k_n}(x_i) < 1. \tag{3}$$

Алгоритм методу полягає в наступному. За початкову точку беремо будь-яку точку із множини M. Для кожного індекса i $(i = 1, 2, \dots, n)$ знаходимо точку для якої виконуються умови (1). При цьому, якщо для фіксованого індекса i умови (1) виконуються в точці $M_i \in M$, то для знаходження точки, для якої будуть виконуватись умови (1), для наступного i, за початкову точку беремо точку M_i.

Для відшукання точки, для якої виконуються умови (1) у випадку (2) знаходимо мінімальне значення індекса ν, для якого

$$R_{k_1,\dots,k_{i-1},k_i-\nu,k_{i+1},\dots k_n}(x_i) \le 1.$$

Для відшукання точки, для якої виконуються умови (1) у випадку (3) знаходимо мінімальне значення індекса ν, для якого

$$R_{k_1,\dots,k_{i-1},k_i+\nu,k_{i+1},\dots k_n}(x_i) > 1.$$

Приклад 1. *Розглянемо задачу відшукання абсолютного мінімуму штрафної функції №2 при $n = 3$:*

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + 10^{-3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 0.25\right)^2.$$

Для цього шукатимемо абсолютний максимум функції

$$-f(x_1, x_2, x_3) + 500,$$

оскільки $-f(x_1, x_2, x_3) + 500 > 0$ в області

$$D = \{-10 \le x_i \le 10, \quad i = 1, 2, 3\}.$$

Покладемо $h_i = 0.1$, $i = 1, 2, 3$. За початкове наближення візьмемо точку $(-10; -10; -10)$. Застосувавши описаний вище алгоритм, одержимо точку $(0.7;\ 0.8;\ 1)$, яку приймаємо з точністю $h = 0,1$ за точку максимуму функції. Якщо цю точку уточнити в області

$$D = \{0.6 \le x_1 \le 2.6;\quad 0.7 \le x_2 \le 2.7;\quad 0.9 \le x_3 \le 2.9\},$$

то одержимо точку $(1;\ 0.99;\ 0.99)$, яку приймаємо за точку максимуму з точністю $h = 0.01$. Уточнимо цю точку в області

$$D = \{0.98 \le x_1 \le 1.\,18;\quad 0.98 \le x_2 \le 1.18;\quad 0.98 \le x_3 \le 1.18\}.$$

Одержимо точку $(0.995;\ 0.995;\ 0.995)$, $h = 0.001$ за точку максимуму. Після уточнення цієї точки в області

$$D = \{0.99 \le x_1 \le 0.995;\quad 0.99 \le x_2 \le 0.995;\quad 0.99 \le x_3 \le 0.995\}$$

одержимо точку $(0.99459;\ 0.99459;\ 0.99459)$, яку з точністю $h = 0.00001$ приймаємо за максимальну. Отже, абсолютний мінімум штрафної функції №2 досягається в точці $(0.99459;\ 0.99459;\ 0.99459)$ і $\min f(x_1, x_2, x_3) \approx 0.007473308$ з точністю $h = 0.00001$.

Приклад 2. *Розглянемо задачу відшукання абсолютного мінімуму штрафної функції №2 при $n = 4$:*

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2 + \\ +10^{-3}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - 0.25\right)^2.$$

Для цього шукатимемо абсолютний максимум функції

$$-f(x_1, x_2, x_3, x_4) + 1000,$$

оскільки $-f(x_1, x_2, x_3, x_4) + 1000 > 0$ в області

$$D = \{-10 \leq x_i \leq 10, \quad i = 1, 2, 3, 4\}.$$

Покладемо $h_i = 0.1$, $i = 1, 2, 3, 4$. За початкове наближення візьмемо точку $(-10;\ -10;\ -10; -10)$. Застосувавши описаний вище алгоритм, одержимо точку $(1;\ 1;\ 1; 1)$, яку приймаємо з точністю $h = 0.1$ за точку максимуму функції. В результаті застосування вищеописаного алгоритму одержимо наступну послідовність точок: $(0.99;\ 0.99; 0.99; 0.99)$, $(0.993;\ 0.995; 0.993; 0.993)$, $(0.9926;\ 0.9946; 0.9926; 0.9926)$, $(0.99266;\ 0.99461;\ 0.99266; 0.99266)$. Точку $(0.99266;\ 0.99461;\ 0.99266; 0.99266)$ приймаємо за максимальну з точністю $h = 0.00001$ і $\min f(x_1, x_2, x_3, x_4) \approx 0.013846443$.

Список використаної літератури

1. *Цегелик Г. Г.* Апарат некласичних мажорант і діаграм Ньютона функцій, заданих таблично, та його використання в чисельному аналізі: монографія / Г.Г. Цегелик. Ї Львів: ЛНУ імені Івана Франка, 2013. – 190 с.
2. *Глебена М. І.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання екстремуму негладких і розривних функцій / М.І. Глебена, Г.Г. Цегелик // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2006. Вип. № 12–13. – С. 55–58.
3. *Цегелик Г. Г.* Чисельний метод мажорантного типу відшукання абсолютного екстремуму довільних негладких функцій двох дійсних змінних / Г.Г.Цегелик, М.І.Глебена // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та ін форм. – 2010. - Вип.16. С. 63–70.

Одержано 10.11.2015