УДК 512.54:519.61

І. Ю. Король, П. П. Горват, Г. С. Тютюнникова (Ужгородський нац. ун-т)

ЗАСТОСУВАННЯ СУЧАСНИХ КОМП'ЮТЕРНИХ ТЕХНОЛОГІЙ ПРИ ВИВЧЕННІ КУРСУ "АЛГОРИТМИ ТА МЕТОДИ ОБЧИСЛЕНЬ"

In this paper expedience of the use of package of Mathcad is grounded at teaching of mathematical and natural disciplines.

В даній роботі обґрунтовується доцільність використання пакету Mathcad при викладанні математичних та природничих дисциплін.

Сучасний стан освіти характеризується інформаційною революцією і швидким ростом обсягу знань, яким повинен володіти випускник інженерного напрямку. Традиційні класичні методики викладання природничих дисциплін поступово втрачають свою ефективність, що вимагає впровадження в навчальний процес сучасних інформаційних технологій, перевага яких полягає в підвищенні пізнавальної активності студентів, виробленню інтересу до знань, розвитку творчої ініціативи. Такі технології передбачають використання:

- електронних конспектів лекцій, практикумів, посібників тощо;
- професійних математичних пакетів, систем комп'ютерної математики, пошукових систем, прикладного програмного забезпечення та ін.

Зупинимось більш детально на математичних пакетах. Якщо студент оволодів одним із них, то він буде готовий розв'язувати достатньо складні задачі, не боячись складних розрахунків. Він оволодіє навичками різностороннього аналізу розв'язків складних задач і подання результатів досліджень у наочній графічній чи іншій формі. Використання математичних пакетів дає можливість навчити студентів грамотно формулювати практичну задачу на мові математики, інтерпретувати результати її розв'язання, а також перевіряти відповідність одержаних результатів і дослідних (реальних) даних.

Разом з тим, використання математичних пакетів дає можливість змінити традиційний підхід до вивчення природничих (зокрема математичних) дисциплін з використанням лише лекційних та практичних занять на більш ефективний підхід – проведення звичайних лекційних та практичних занять, доповнивши їх ***лабораторними заняттями, які проводяться в комп'ютерних класах з використанням математичних пакетів.***

На сьогоднішній день найбільш поширеними математичними пакетами є Mathcad, MatLab, Mathematica і Maple. Кожен із них може бути застосований в навчальному процесі при викладанні математичних та інженерних дисциплін. Однак, при вивченні курсів "Вища математика", "Алгоритми та методи обчислень", на нашу думку, найбільш доцільно використовувати математичний пакет Mathcad, в якому інтегровані три процесори: текстовий, математичний та графічний. Суттєвою перевагою пакету Mathcad є також і те, що в ньому уведення формул чи інших елементів (вектори, матриці та ін.) здійснюється у звичайній математичній формі. Це є дуже важливим для студентів молодших курсів, які ще недостатньо оволоділи мовами програмування високого рівня.

Деякі аспекти застосування пакету Mathcad при вивченні курсу "Вища математика" викладені в [1]. Що стосується викладання курсу "Алгоритми та методи обчислень", то доцільність застосування пакету Mathcad викликана простотою і наглядністю обчислювальних і програмних засобів, які легко сприймаються студентами. Деякі можливості і зручність використання пакету Mathcad при викладанні курсу "Алгоритми та методи обчислень" будуть проілюстровані в даній роботі. Звернемо також увагу на використання деяких вбудованих функцій для розв'язання задач, які є чутливими до похибок округлення, та на реалізацію нестійких алгоритмів. І, насамкінець, спробуємо пояснити, чому наш вибір впав саме на застосування пакету Mathcad при викладанні курсу "Алгоритми та методи обчислень".

Методи обчислень – це математичний інструментарій, за допомогою якого математична задача формулюється у вигляді, зручному для розв'язання на комп'ютері. У такому разі говорять про перетворення математичної задачі в обчислювальну задачу. При цьому послідовність виконання необхідних арифметичних і логічних операцій визначається алгоритмом її розв'язання. Алгоритм повинен бути, як правило, ітераційним і складатися з невеликих блоків, які багато разів виконуються при різних вхідних даних.

Слід зазначити, що з появою швидких та потужних комп'ютерів роль чисельних методів для розв'язання наукових та інженерних задач значно зросла. І хоча аналітичні методи розв'язання математичних задач, як і раніше, дуже важливі, чисельні методи істотно розширюють можливості розв'язання наукових та інженерних задач, незважаючи на те, що самі рівняння математичних моделей з ускладненням об'єктів дослідження стають погано обумовленими та жорсткими, що істотно ускладнює їх розв'язання.

Методи обчислень є надзвичайно потужним інструментом для розв'язання проблемних задач, що описуються довільними нелінійними алгебраїчними, диференціальними чи інтегральними рівняннями та їх системами великої розмірності, для яких в даний час не існує аналітичних розв'язків. Освоївши такі методи, майбутній фахівець, набуває здібностей до системного аналізу через математичне моделювання найскладніших задач сучасної науки і техніки. Особливо ефективно розв'язуються такого типу задачі з використанням сучасних математичних пакетів. А тепер перейдемо до розгляду деяких проблем, на які варто звернути увагу при використанні математичних пакетів, зокрема, пакету Mathcad.

Розглянемо поліном 12-го порядку, задавши його корені як числа натурального ряду:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9)(x-10)(x-11)(x-12).$$

Якщо розкрити дужки з використанням пакету Mathcad, то одержимо многочлен вигляду

$$PK(x) = \sum_{i=0}^{12} K_i x^i,$$

з коефіцієнтами:

$$K_0 = 47001600, \quad K_1 = -1486442880, \quad K_2 = 1931559552, \quad K_3 = -1414014888,$$

$$K_4 = 657206836, \quad K_5 = -206070150, \quad K_6 = 44990231, \quad K_7 = -6926634,$$

$$K_8 = 749463, \quad K_9 = -55770, \quad K_{10} = 2717, \quad K_{11} = -78, \quad K_{12} = 1.$$

Для знаходження коренів полінома скористаємося функцією ***polyroots(K)***, яка визначає усі корені полінома одночасно. Тут K – вектор коефіцієнтів полінома, починаючи з вільного члена, який одержується за допомогою функції $K := P(x) coeffs, x$**.**

Для функції *polyroots* можна вибрати один із двох чисельних методів – ***метод Лагерра*** (він використовується за замовчуванням) або ***метод супроводжуючої матриці (companion matrix).***

На лістингу 1 наведено обчислення коефіцієнтів полінома $PK(x)$ (вектора K) та коренів рівняння $PK(x) = 0$ за допомогою двох вищезгаданих методів.

Лістинг 1

$$P(x) := (x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)\cdot(x-5)\cdot(x-6)\cdot(x-7)\cdot(x-8)\cdot(x-9)\cdot(x-10)\cdot(x-11)\cdot(x-12)$$

Коефіцієнти многочлена

$$K := P(x) \text{ coeffs}, x \rightarrow \begin{pmatrix} 479001600 \\ -1486442880 \\ 1931559552 \\ -1414014888 \\ 657206836 \\ -206070150 \\ 44990231 \\ -6926634 \\ 749463 \\ -55770 \\ 2717 \\ -78 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Корені, одержані методом Лагерра

polyroots(K) =

	0
0	1
1	2
2	2.9999996
3	4.0000022
4	4.9999962
5	6.0000013
6	7.0000049
7	7.9999917
8	8.998842
9	10.0034441
10	10.9966126
11	12.0011053

Корені, одержані методом супроводжуючої матриці

polyroots(K) =

	0
0	1
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6
6	7
7	8
8	9
9	10
10	11
11	12

Рис. 1. Лістинг 1

З наведеного лістингу бачимо, що метод Лагерра дає похибку порядку 10^{-3}, а метод супроводжуючої матриці дає точні значення коренів, що свідчить про те, що вектор K знайдено точно.

З обчислювальної точки зору знаходження коренів полінома є нестійкою задачею по відношенню до незначних змін в коефіцієнтах полінома. Для підтвердження чисельної нестійкості задачі змінимо коефіцієнт при x^{11} на величину $10^{-5,66}$, тобто $K_{11} = -78 + 10^{-5,66} = -77,9999978$. Результати обчислень наведено на лістингу 2.

Як бачимо, за методом Лагерра чотири корені є комплексними з досить великою уявною частиною в порівнянні зі зміною коефіцієнта при x^{11}. Що стосується методу супроводжуючої матриці, то похибка теж велика, хоча комплексних коренів і немає.

Якщо ж похибку трохи збільшити, то уже і метод супроводжуючої матриці видає пару комплексних коренів. На лістингу 3 наведено чотири останніх корені,

Лістинг 2 $K_{11} := -78$ $K_{11} := K_{11} + 10^{-5.66}$ $K_{11} = -77.9999978$

Корені, одержані методом Лагерра

polyroots(K) =

	0
0	1
1	2
2	3.0000002
3	3.9999642
4	5.0008812
5	5.9909797
6	7.0542475
7	7.8574174
8	9.4810052-0.0531743i
9	9.5037756+0.0544082i
10	11.1580545-2.2776828i·10⁻³
11	11.9536722+1.0437675i·10⁻³

Корені, одержані методом супроводжуючої матриці

polyroots(K) =

	0
0	1
1	2
2	3.0000005
3	3.9999621
4	5.0008853
5	5.9909768
6	7.0542513
7	7.8586485
8	9.4381655
9	9.5483824
10	11.1535417
11	11.9551837

Рис. 2. Лістинг 2

одержані методом Лагерра (KL) і методом супроводжуючої матриці (KSM). Як бачимо, поліноми високих степенів є дуже чутливими до похибок задання коефіцієнтів.

Лістинг 3 $K_{11} := -78$ $K_{11} := K_{11} + 10^{-5.21}$ $K_{11} = -77.9999938$

KL := polyroots(K)

$KL_8 = 9.485 - 0.564i$

$KL_9 = 9.486 + 0.565i$

$KL_{10} = 11.411 - 1.666i \times 10^{-3}$

$KL_{11} = 11.834 + 1.15i \times 10^{-3}$

KSM := polyroots(K)

$KSM_8 = 9.486 + 0.565i$

$KSM_9 = 9.486 - 0.565i$

$KSM_{10} = 11.412$

$KSM_{11} = 11.833$

Рис. 3. Лістинг 3

Ще одним прикладом нестійкості алгоритмів знаходження коренів алгебраїчного рівняння, закладених в функцію *polyroots*, є застосування їх для знаходження кратних коренів. На лістингу 4 наведено приклади застосування функції *polyroots* для знаходження усіх коренів алгебраїчного рівняння (у тому числі і кратних) з використанням методу Лагерра та методу супроводжуючої матриці. Аналіз одержаних результатів показує, що у випадку простих коренів обидва методи дають точні значення коренів. У випадку кратних коренів, обидва методи видають корені із значними похибками, в тому числі видають комплексні корені замість дійсних.

Таким чином, можна зробити загальні висновки, що у випадку задання коефіцієнтів рівняння з невеликими похибками, або при наявності кратних коренів, функція *polyroots* повертає розв'язки із значними похибками. Тому одержані розв'язки потребують додаткової перевірки.

Одним із методів, який дає можливість уникнути даної проблеми, є метод Ньютона. Як відомо, швидкість збіжності методу Ньютона погіршується, якщо рівняння $f(x) = 0$ має кратні корені. Разом з тим, квадратичну збіжність можна зберегти, якщо побудувати дещо іншу ітераційну формулу, яка базується на

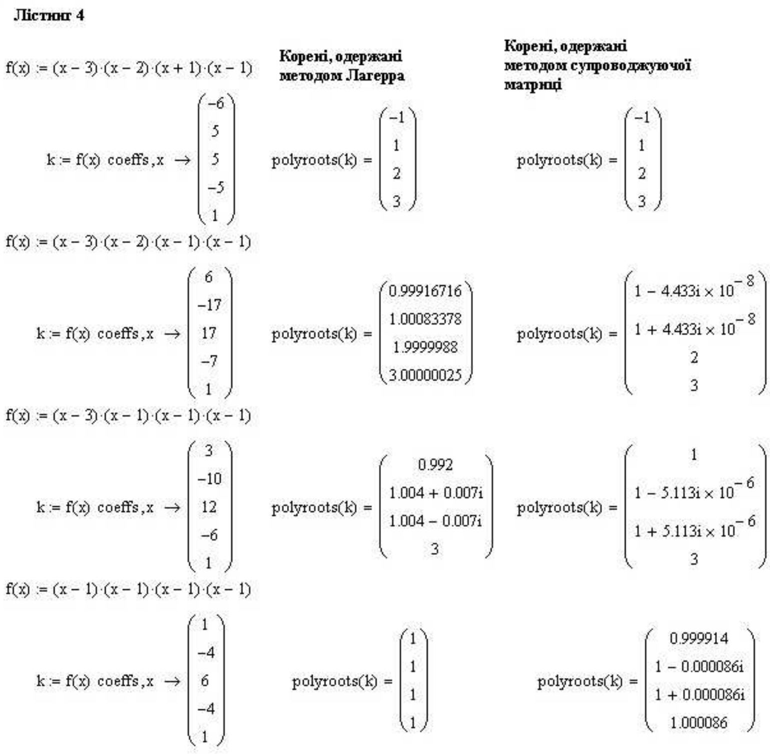

Рис. 4. Лістинг 4

наступному відомому факті: якщо функція $f(x)$ має деякий корінь кратності k, то її похідна $f'(x)$ має цей самий корінь кратності $k-1$.

У більшості випадків кратність коренів невідома, тому для збереження квадратичної збіжності на базі заданого рівняння з кратним коренем x^* розглядають рівняння

$$g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = 0,$$

яке має корінь x^* кратності одиниця, незалежно від його кратності k у рівнянні $f(x) = 0$.

Можна показати, що для рівняння $g(x) = 0$ ітераційний процес Ньютона має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)f'(x_n)}{[f'(x_n)]^2 - f(x_n)f''(x_n)}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Процедура графічного відокремлення коренів та обчислення їх методом Ньютона наведена на лістингу 5.

Іноді під час розв'язання стійкої, за вхідними даними задачі, нестійким може бути метод її розв'язання [3].

Наприклад, нехай треба обчислити інтеграл $I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{x-1} dx, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Інтегруючи за частинами, отримуємо

$$I_n = \int\limits_0^1 x^n e^{x-1} dx = x^n e^{x-1}\Big|_0^1 - n\int\limits_0^1 x^{n-1} e^{x-1} dx = 1 - nI_{n-1}.$$

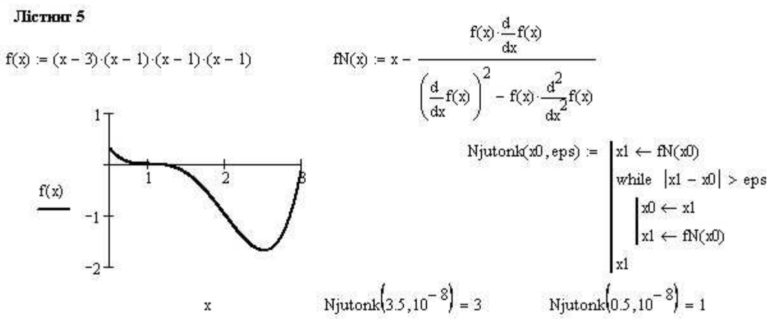

Рис. 5. Лістинг 5

Звідси дістаємо рекурентне співвідношення, яке дає можливість обчислювати інтеграл, не інтегруючи за частинами:

$$I_0 = 1 - e^{-1}, \quad I_1 = e^{-1}, \quad I_n = 1 - nI_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

На лістингу 6 наведено результати, одержані за допомогою пакету Mathcad при $n = 1, 5, 9$ у випадках:

a) безпосереднього інтегрування з точністю 10^{-12};

b) інтегрування з використанням рекурентного співвідношення з точністю 10^{-12};

c) інтегрування з використанням рекурентного співвідношення з точністю 10^{-6}.

Лістинг 6

a) $\mathrm{Int}(n) := \int_0^1 x^n \cdot e^{x-1}\,dx$ $\quad \mathrm{Int}(1) = 0.367879441171 \quad \mathrm{Int}(5) = 0.145532940573 \quad \mathrm{Int}(9) = 0.09161229299$

b) $I_0 := 1 - e^{-1} \quad I_0 = 0.632120558829 \quad I_1 := e^{-1} \quad I_1 = 0.367879441171$

```
I(n) := | I1 ← 1/e
        | for k ∈ 2..n
        |   Ik ← 1 − k·I(k−1)
        | I
```

$n := 9 \quad I := I(n)$

$I_1 = 0.367879441171 \quad I_5 = 0.145532940573 \quad I_9 = 0.091612292994$

c)

```
Ip(n) := | I1 ← 0.367879
         | for k ∈ 2..n
         |   Ik ← 1 − k·I(k−1)
         | I
```

$n := 9 \quad Ip := Ip(n)$

$Ip_1 = 0.367879 \quad Ip_5 = 0.14548 \quad Ip_9 = -0.06848$

$|I_1 - Ip_1| = 4.412 \times 10^{-7} \quad |I_5 - Ip_5| = 5.294 \times 10^{-5} \quad |I_9 - Ip_9| = 0.16$

Рис. 6. Лістинг 6

З наведених результатів видно, що у перших двох випадках результати співпадають. У випадку c) значення $Ip_9 = -0,06848$ помилкове, оскільки підінтегральна функція $x^9 e^{x-1}$ в усіх точках відрізка $[0; 1]$ невід'ємна. Помилка зумовлена похибкою округлення значення I_1 до шести знаків і нестійкістю методу до похибки округлення.

Ще одна проблема стійкості алгоритму до похибок округлення виникає при інтерполяції функцій за допомогою поліномів. Ця проблема пов'язана з вибором вузлів інтерполювання.

Як відомо, похибку інтерполяції поліномом Лагранжа можна оцінити за формулою [2]

$$|f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|,$$

де $M_{n+1} = \sup\limits_{x\in[a;b]} \left|f^{(n+1)}(x)\right|, \omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$. Аналогічна формула похибки справедлива і для інтерполяційних формул Ньютона.

Як бачимо, похибка інтерполяційної формули залежить від двох множників, з яких один, M_{n+1} , залежить від властивостей функції $f(x)$ і не піддається коректуванню, а величина іншого, $\omega_{n+1}(x)$, визначається винятково вибором вузлів інтерполяції.

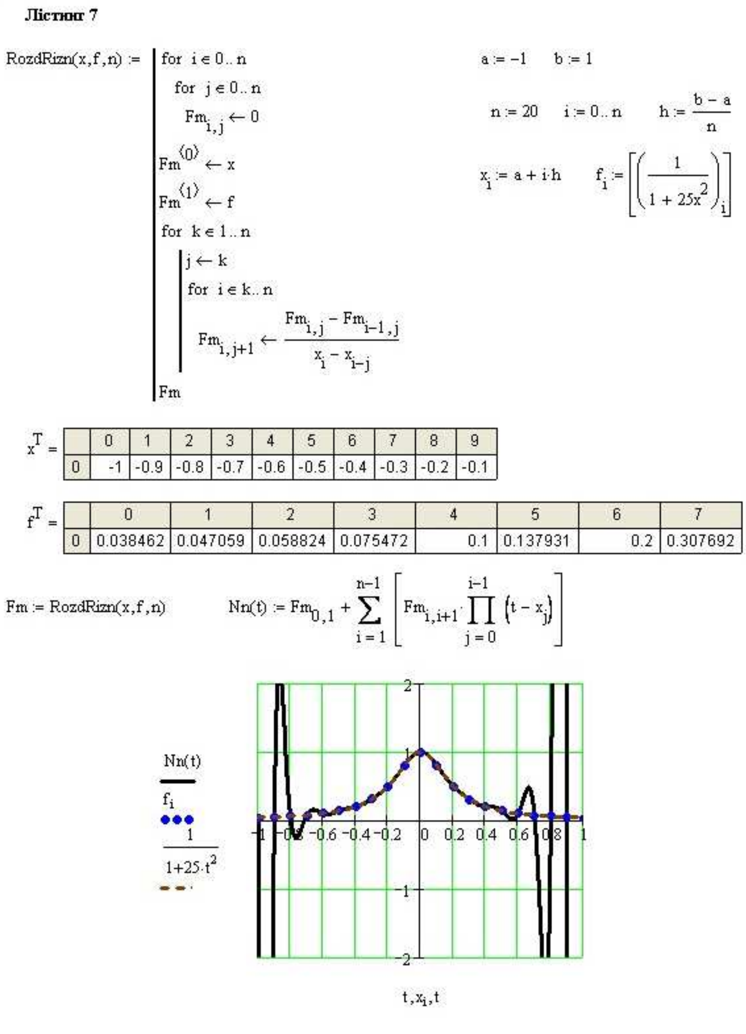

Рис. 7. Лістинг 7

Задача про раціональний вибір вузлів інтерполяції x_i (при заданому n) для мінімізації абсолютного значення полінома $\omega_{n+1}(x)$ була розв'язана Чебишевим, який довів, що величина $\max\limits_{x\in[a;b]} |\omega_{n+1}(x)|$ має найменше значення, якщо вузлами інтерполювання є числа $x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}\xi_k$, де $\xi_k = \cos\frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, (k = 0, 1, \dots, n)$ – нулі многочлена Чебишева $T_{n+1}(x) = \cos((n+1)\arccos x)$. Вони дійсні й різні, належать інтервалу $(-1;1)$ і ущільнюються біля його кінців.

На прикладі функції $f(x) = \frac{1}{1+25x^2}$ (відома функція Рунге) проілюструємо вплив вибору вузлів на результати інтерполювання при використанні формули Ньютона для інтерполювання вперед.

На лістингу 7 наведено програму обчислення розділених різниць *RozdRizn(x,f,n)* для рівномірно розташованих вузлів інтерполювання та відповідну інтерполяційну формулу Ньютона *Nn(t)*. На цьому ж лістингу побудовано графіки інтерполяційної формули Ньютона та графіки функції Рунге, заданої таблично та аналітично. З наведених результатів бачимо великі розбіжності інтерполяційної формули і заданої функції, особливо біля кінців відрізка інтерполювання.

На лістингу 8 наведено результати інтерполювання, одержані при використанні вузлів інтерполювання, побудованих з використанням поліномів Чебишева. Спостерігається повне співпадання графіка інтерполяційної формули із графіком заданої функції.

Лістинг 8

$$x_i := -\cos\left[\frac{\pi}{2\cdot n}(2\cdot i+1)\right] \qquad f_i := \left[\left(\frac{1}{1+25x^2}\right)_i\right]$$

$x^T =$

	0	1	2	3	4	5	6
0	-0.996917	-0.97237	-0.92388	-0.85264	-0.760406	-0.649448	-0.522499

$f^T =$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0.038691	0.040588	0.044765	0.052152	0.064702	0.086621	0.127794	0.214539

$$Fm := RozdRizn(x,f,n) \qquad Nn(t) := Fm_{0,1} + \sum_{i=1}^{n-1}\left[Fm_{i,i+1}\cdot\prod_{j=0}^{i-1}(t-x_j)\right]$$

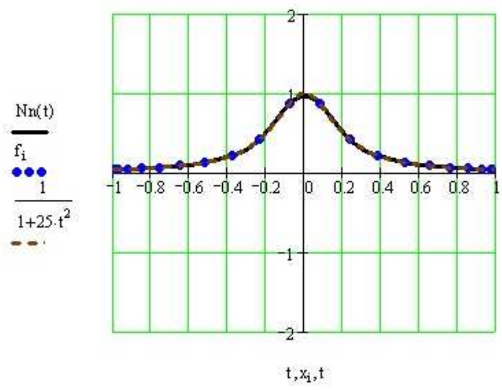

Рис. 8. Лістинг 8

1. *Король І.Ю.* Застосування сучасних комп'ютерних технологій в процесі вивчення курсу "Вища математика"/ III відкриті науково-методичні читання "Математика для інженерів і економістів: проблеми викладання та застосування". Херсон, 19-23 вересня 2005. Тези доповідей. – С. 44–46.
2. *Фельдман Л.П., Петренко А.І., Дмитрієва О.А.* Чисельні методи в математиці. — К.: Видавнича група BHV, 2006. – 480 с.
3. *Лященко М.Я., Головань М.С.* Чисельні методи: Підручник. — К.: Либідь, 1996. – 288 с.

Одержано ..2010