УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря (Мукачів. держ. ун–т)

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ЛАНЦЮГОВІ ДРОБИ ТИПУ ТІЛЕ

This article is devoted to a functional Thiele–like continued fractions. The g–reciprocal derivatives are considered, the properties of g–reciprocal derivatives are got, the rules of g–reciprocal differentiation are given.

Робота присвячена функціональним ланцюговим дробам типу Тіле. Введені в розгляд g–обернені похідні, отримані властивості таких похідних та обґрунтовані правила g–оберненого диференціювання.

Вступ. Добре відомо, що функція $f(x)$ однієї дійсної змінної, яка визначена на відрізку $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ та задана своїми значеннями в точках множини

$$X=\{x_i : x_i\in[\alpha,\beta],\ i=0,1,\ldots,n,\ x_i\neq x_j \text{ при } i\neq j\}, \tag{1}$$

може бути наближена узагальненим інтерполяційним багаточленом

$$g(x;b_0,b_1,\ldots,b_n)=b_0\varphi_0(x)+b_1\varphi_1(x)+\cdots+b_n\varphi_n(x), \tag{2}$$

де $\{\varphi_i(x)\}$— система функцій Чебишова [1].

Коефіцієнти узагальненого інтерполяційного багаточлена (2) однозначно визначаються із інтерполяційної умови

$$f_i=g(x_i;b_0,b_1,\ldots,b_n),\quad \text{де}\quad f_i=f(x_i),\ i=0,1,\ldots,n. \tag{3}$$

Узагальнений інтерполяційний багаточлен для заданої системи функцій Чебишова існує, єдиний і може бути поданий у різних формах запису. Наприклад, якщо $\varphi_i(x)=x^i, i=0,1,\ldots,$ то інтерполяційний багаточлен можна подати у формах Лагранжа та Ньютона.

Аналогом інтерполяційного багаточлена у формі Ньютона в теорії ланцюгових дробів виступає інтерполяційний ланцюговий дріб Т. Тіле (ІЛДТ) [2]

$$D_n(x)=\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}=b_0+\cfrac{x-x_0}{b_1+\cfrac{x-x_1}{b_2+\ddots+\cfrac{x-x_{n-2}}{b_{n-1}+\cfrac{x-x_{n-1}}{b_n}}}}=$$

$$=b_0+\frac{x-x_0}{b_1}\,\underset{+}{}\,\frac{x-x_1}{b_2}\,\underset{+}{}\cdots\underset{+}{}\,\frac{x-x_{n-1}}{b_n}=b_0+\mathop{\mathrm{K}}_{i=1}^{n}\frac{x-x_{i-1}}{b_i}\ . \tag{4}$$

Коефіцієнти ІЛДТ визначаються із інтерполяційної умови (3) [2–4]. В граничному випадку, коли всі вузли інтерполяції будуть прямувати до одного і того ж значення, із ІЛДТ (4) отримаємо формулу Тіле — аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів.

Дана робота присвячена побудові узагальненого інтерполяційного ланцюгового дробу типу Тіле, деякого аналогу узагальненого багаточлена (2), та отриманню на його основі аналогу формули типу Тіле.

1. Інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле. Припустимо, що на відрізку $[\alpha,\beta]\subset\mathbb{R}$ функція $f(x)$ визначена своїми значеннями в точках множини (1). Нехай функція $t=g(x)$ неперервна та строго монотонна на $[\alpha,\beta]$.

Зауваження 1. *Умова строгої монотонності функції $t=g(x)$ гарантує, що множина*

$$G=\{t_i : t_i=g(x_i), i=0,1,2,\dots,n\}$$

буде складатися із різних точок, оскільки множина X (1) містить всі різні точки.

За аналогією з [5] розглянемо наступну послідовність $\{v_k(x)\}$, де

$$f(x)=v_0(x),\quad v_{k-1}(x)=v_{k-1}(x_{k-1})+\frac{g(x)-g(x_{k-1})}{v_k(x)},\quad k=1,2,3,\dots. \tag{5}$$

Якщо послідовно вкладати елементи вказаної послідовності, то на $n{+}1$-му кроці отримаємо

$$f(x)=v_0(x)=v_0(x_0)+\frac{g(x)-g(x_0)}{v_1(x)}=v_0(x_0)+\frac{g(x)-g(x_0)}{v_1(x_1)}\underset{+}{}\frac{g(x)-g(x_1)}{v_2(x)}=$$

$$=\dots=v_0(x_0)+\frac{g(x)-g(x_0)}{v_1(x_1)}\underset{+}{}\dots\underset{+}{}\frac{g(x)-g(x_{n-1})}{v_n(x_n)}\underset{+}{}\frac{g(x)-g(x_n)}{v_{n+1}(x)}.$$

Підставимо $1/v_{n+1}(x)=0$ та позначимо через $b_k=v_k(x_k)$, $k=0,1,\dots,n$, тоді отримаємо інтерполяційний ланцюговий дріб типу Тіле (ІЛД–Т)

$$f(x)\approx D_n(g;x)=b_0+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{g(x)-g(x_{k-1})}{b_k}, \tag{6}$$

де b_k — невідомі коефіцієнти, $k=0,1,2,\dots,n$.

Якщо скористатися прямим або оберненим рекурентними алгоритмами [6], то можна поставити у відповідність ІЛД–Т (6) відношення двох узагальнених багаточленів відносно $g(x)$, тобто

$$D_n(g;x)=\frac{P_n(g;x)}{Q_n(g;x)}=b_0+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{n}\frac{g(x)-g(x_{k-1})}{b_k}. \tag{7}$$

Невідомі коефіцієнти b_k, $k=0,1,\dots,n$, ІЛД (6) визначимо із наступної інтерполяційної умови

$$D_n(g;x_i)=f_i,\quad i=0,1,2,\dots,n. \tag{8}$$

Легко бачити, що

$$D_n(g;x_i)=b_0+\mathop{\mathrm{K}}_{k=1}^{i}\frac{g(x)-g(x_{k-1})}{b_k}\ . \tag{9}$$

Аналогічно як в [3, 4], із (8) та (9) можна отримати рекурентну формулу знаходження коефіцієнтів ІЛД–Т (6):

$$b_0=f_0,\ b_k=\frac{g(x_k)-g(x_{k-1})}{-b_{k-1}}\underset{+}{}\dots\underset{+}{}\frac{g(x_k)-g(x_1)}{-b_1}\underset{+}{}\frac{g(x_k)-g(x_0)}{f_k-b_0},\quad k\geqslant 1.$$

Коефіцієнти b_k ІЛД–Т (6) також можна визначити через обернені поділені g–різниці.

Обернені g–різниці. Позначимо через $\Phi_k[g;x_0,\ldots,x_{k-1},x;f]=v_k(x)$ обернену поділену g–різницю k–го порядку. Очевидно, що $b_k=\Phi_k[g;x_0,x_1,\ldots,x_k;f]$, при$k=0,1,2,\ldots,n$. Із (5) отримаємо рекурентну формулу обчислення обернених поділених g–різниць

$$\Phi_k[g;x_0,\ldots,x_k;f]=$$
$$=\frac{g(x_k)-g(x_{k-1})}{\Phi_{k-1}[g;x_0,\ldots,x_{k-2},x_k;f]-\Phi_{k-1}[g;x_0,\ldots,x_{k-2},x_{k-1};f]}, \tag{10}$$
$$\Phi_0[g;x;f]=f(x).$$

Із (10) випливає, що обернена поділена g–різниця $\Phi_k[g;x_0,x_1,\ldots,x_{k-1},x_k;f]$ симетрична відносно двох останніх своїх аргументів x_{k-1} та x_k. Утворимо лінійну комбінацію обернених поділених g–різниць

$$\rho_k[g;x_0,\ldots,x_k;f]=\sum_{i=0}^{[k/2]}\Phi_{k-2i}[g;x_0,\ldots,x_{k-2i};f], \tag{11}$$

яку будемо називати оберненою g–різницею k–го порядку. Із (11) маємо, що

$$b_0=\Phi_0[g;x_0;f]=\rho_0[g;x_0;f],\quad b_1=\Phi_1[g;x_0,x_1;f]=\rho_1[g;x_0,x_1;f],$$

$$b_k=\Phi_k[g;x_0,\ldots,x_k;f]=\rho_k[g;x_0,\ldots,x_k;f]-\rho_{k-2}[g;x_0,\ldots,x_{k-2};f],\quad k\geqslant 2.$$

Тоді ІЛД–Т (7) запишеться у вигляді

$$D_n(g;x)=\rho_0[g;x_0;f]+\frac{g(x)-g(x_0)}{\rho_1[g;x_0,x_1;f]}\,{+}\,\frac{g(x)-g(x_1)}{\rho_2[g;x_0,x_1,x_2;f]-\rho_0[g;x_0;f]}\,{+}$$
$$+\cdots+\frac{g(x)-g(x_{n-1})}{\rho_n[g;x_0,x_1,\ldots,x_n;f]-\rho_{n-2}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{n-2};f]}\;. \tag{12}$$

Обернені g–різниці задовольняють наступне рекурентне співвідношення

$$\rho_k[g;x_0,x_1,\ldots,x_k;f]=\rho_{k-2}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{k-2};f]+$$
$$+\frac{g(x_k)-g(x_{k-1})}{\rho_{k-1}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{k-2},x_k;f]-\rho_{k-1}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{k-1};f]}, \tag{13}$$

для $k=2,3,\ldots,n$, при початкових значеннях

$$\rho_0[g;x_0;f]=f(x_0),\ \ \rho_1[g;x_0,x_1;f]=\frac{g(x_1)-g(x_0)}{\rho_0[g;x_1;f]-\rho_0[g;x_0;f]}.$$

Легко переконатися, що

$$\rho_1[g;x_0,x_1;f]=\frac{g(x_1)-g(x_0)}{f_1-f_0},$$

$$\rho_2[g;x_0,x_1,x_2;f]=\frac{g(x_0)f_0(f_2-f_1)+g(x_1)f_1(f_0-f_2)+g(x_2)f_2(f_1-f_0)}{f_0(f_2-f_1)+f_1(f_0-f_2)+f_2(f_1-f_0)}\;.$$

Отже, 1–а та 2–а обернені g–різниці симетричні відносно всіх аргументів. Далі покажемо, що обернена g–різниця k–го порядку $\rho_k=\rho_k[g;x_0,x_1,\ldots,x_k;f]$ симетрична відносно всіх своїх $k+1$ аргументу $x_0,x_1,\ldots,x_k$.

Із (12) маємо, що $P_0(g;x)=\rho_0$, $Q_0(g;x)=1$, $P_1(g;x)=\rho_0\,\rho_1+g(x)-g(x_0)$, $Q_1(g;x)=\rho_1$. Якщо скористатися прямим рекурентним алгоритмом [6], то можна отримати [7, с. 110]:

$$\begin{array}{rcl} P_{2m}(g;x) &=& a_0+a_1\,g(x)+\cdots+a_{m-1}\,g^{m-1}(x)+\rho_{2m}\,g^m(x),\\ Q_{2m}(g;x) &=& b_0+b_1\,g(x)+\cdots+b_{m-1}\,g^{m-1}(x)+g^m(x),\\ P_{2m+1}(g;x) &=& c_0+c_1\,g(x)+\cdots+c_{m-1}\,g^{m-1}(x)+c_m\,g^m(x)+g^{m+1}(x),\\ Q_{2m+1}(g;x) &=& d_0+d_1\,g(x)+\cdots+d_{m-1}\,g^{m-1}(x)+\rho_{2m+1}g^m(x), \end{array} \tag{14}$$

де $a_0,\ldots,a_{m-1},b_0,\ldots,b_{m-1},c_0,\ldots,c_m,d_0,\ldots,d_{m-1}$— деякі коефіцієнти.

Із (14) випливає, що $\mathbf{deg}\ P_n(g;x)=\left[\frac{n+1}{2}\right]$, $\mathbf{deg}\ Q_n(g;x)=\left[\frac{n}{2}\right]$ відносно $t=g(x)$. Оскільки для ІЛД–Т (6) має місце інтерполяційна умова (9), то [7]

$$\rho_\mu=\frac{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & t_0 & t_0\,f_0 & t_0^2 & t_0^2\,f_0 & \cdots & t_0^{m-1} & t_0^{m-1}\,f_0 & t_0^m\,f_0\\ 1 & f_1 & t_1 & t_1\,f_1 & t_1^2 & t_1^2\,f_1 & \cdots & t_1^{m-1} & t_1^{m-1}\,f_1 & t_1^m\,f_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & f_\mu & t_\mu & t_\mu\,f_\mu & t_\mu^2 & t_\mu^2\,f_\mu & \cdots & t_\mu^{m-1} & t_\mu^{m-1}\,f_\mu & t_\mu^m\,f_\mu \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & t_0 & t_0\,f_0 & t_0^2 & t_0^2\,f_0 & \cdots & t_0^{m-1} & t_0^{m-1}\,f_0 & t_0^m\\ 1 & f_1 & t_1 & t_1\,f_1 & t_1^2 & t_1^2\,f_1 & \cdots & t_1^{m-1} & t_1^{m-1}\,f_1 & t_1^m\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & f_\mu & t_\mu & t_\mu\,f_\mu & t_\mu^2 & t_\mu^2\,f_\mu & \cdots & t_\mu^{m-1} & t_\mu^{m-1}\,f_\mu & t_\mu^m \end{vmatrix}}, \tag{15}$$

$$\rho_\nu=\frac{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & t_0 & t_0\,f_0 & \cdots & t_0^{m-1} & t_0^{m-1}\,f_0 & t_0^m & t_0^{m+1}\\ 1 & f_1 & t_1 & t_1\,f_1 & \cdots & t_1^{m-1} & t_1^{m-1}\,f_1 & t_1^m & t_1^{m+1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & f_\nu & t_\nu & t_\nu\,f_\nu & \cdots & t_\nu^{m-1} & t_\nu^{m-1}\,f_\nu & t_\nu^m & t_\nu^{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f_0 & t_0 & t_0\,f_0 & \cdots & t_0^{m-1} & t_0^{m-1}\,f_0 & t_0^m & t_0^m\,f_0\\ 1 & f_1 & t_1 & t_1\,f_1 & \cdots & t_1^{m-1} & t_1^{m-1}\,f_1 & t_1^m & t_1^m\,f_1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & f_\nu & t_\nu & t_\nu\,f_\nu & \cdots & t_\nu^{m-1} & t_\nu^{m-1}\,f_\nu & t_\nu^m & t_\nu^m\,f_\nu \end{vmatrix}}, \tag{16}$$

де $t_k=g(x_k), k=0,1,2,\ldots,2m+1, \mu=2m, \nu=2m+1$.

Із (15)–(16) безпосередньо випливає, що обернена g–різниця симетрична відносно всіх своїх аргументів.

Властивості обернених g–різниць. Оскільки далі всі перетворення у визначниках (15) та (16) здійснюються над рядочками, то будемо записувати тільки i-й рядок цих визначників. Тоді (15) та (16) запишуться наступним чином

$$\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f]=\frac{\left|1,\ f_i,\ t_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}f_i,\ t_i^m f_i\right|}{\left|1,\ f_i,\ t_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}f_i,\ t_i^m\right|}\ , \tag{17}$$

$$\rho_{2m+1}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m+1};f]=\frac{\left|1,\ f_i,\ t_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}f_i,\ t_i^m,\ t_i^{m+1}\right|}{\left|1,\ f_i,\ t_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}f_i,\ t_i^m,\ t_i^m f_i\right|}\ . \tag{18}$$

Із (17)–(18) безпосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 1. *Нехай C — деяка стала. Тоді*

$$\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};Cf]=C\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f]\ , \tag{19}$$

$$\rho_{2m+1}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m+1};Cf]=\frac{1}{C}\rho_{2m+1}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m+1};f]\ . \tag{20}$$

Твердження 2. *Нехай $z_i=z(x_i)$, A,B,C,D — деякі сталі. Тоді обернені g–різниці задовольняють співвідношення:*

$$\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f+C]=\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f]+C\ , \tag{21}$$

$$\rho_{2m+1}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m+1};f+C]=\rho_{2m+1}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m+1};f]\ , \tag{22}$$

$$\rho_{2m}\Big[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};\frac{f}{z}\Big]=\frac{\big|z_i,\ f_i,\ t_iz_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m-1}z_i,\ t_i^{m-1}f_i,\ t_i^mf_i\big|}{\big|z_i,\ f_i,\ t_iz_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m-1}z_i,\ t_i^{m-1}f_i,\ t_i^mz_i\big|}\ , \tag{23}$$

$$\rho_{2m+1}\Big[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m+1};\frac{f}{z}\Big]=\frac{\big|z_i,\ f_i,\ t_iz_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m}z_i,\ t_i^{m+1}z_i\big|}{\big|z_i,\ f_i,\ t_iz_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^mz_i,\ t_i^mf_i\big|}\ , \tag{24}$$

$$\rho_{2m}\Big[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};\frac{1}{f}\Big]=\frac{1}{\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f]}\ , \tag{25}$$

$$\rho_{2m}\Big[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};\frac{A+Bf}{C+Df}\Big]=\frac{A+B\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f]}{C+D\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f]}\ . \tag{26}$$

Доведення. Із (17) маємо

$$\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f+C]=$$
$$=\frac{\big|1,\ f_i+C,\ t_i,\ t_i(f_i+C),\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}(f_i+C),\ t_i^m(f_i+C)\big|}{\big|1,\ f_i+C,\ t_i,\ t_i(f_i+C),\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}(f_i+C),\ t_i^m\big|}\ .$$

Оскільки

$$\big|1,\ f_i+C,\ t_i,\ t_i(f_i+C),\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}(f_i+C),\ t_i^m(f_i+C)\big|=$$
$$=\big|1,\ f_i,\ t_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}f_i,\ t_i^mf_i\big|+$$
$$+C\big|1,\ f_i,\ t_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}f_i,\ t_i^m\big|\ ,$$

а

$$\big|1,\ f_i+C,\ t_i,\ t_i(f_i+C),\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}(f_i+C),\ t_i^m\big|=$$
$$=\big|1,\ f_i,\ t_i,\ t_if_i,\ \cdots,\ t_i^{m-1},\ t_i^{m-1}f_i,\ t_i^m\big|\ ,$$

то із (17) випливає, що

$$\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f+C]=\rho_{2m}[g;x_0,x_1,\ldots,x_{2m};f]+C.$$

Аналогічно доводиться (22).

Співвідношення (23) та (24) отримаємо безпосередньо із (17) та (18) відповідно, якщо i рядки визначників чисельника і знаменника помножимо на z_i.

Якщо у (23) підставити $1/f$, а потім зробити перестановку непарних та парних рядків у визначниках чисельника та знаменника, то отримаємо (25).

Оскільки
$$\frac{A+Bf}{C+Df}=\frac{B}{D}+\frac{A-BC/D}{C+Df}\ ,$$
то скориставшись (19), (21) та (25) отримаємо (26).

Формула типу Тіле. При побудові ІЛД–Т (6) робилися припущення, що всі інтерполяційні вузли $x_i, i = 0, \ldots, n$, різні. Перейдемо тепер до граничного випадку, коли всі вузли, чи деяка їх частина, прямують до одного і того ж значення.

Означення 1. *Граничне значення оберненої g–різниці k–го порядку у випадку, коли всі вузли $x_0, x_1, \ldots, x_k$ прямують до x, назвемо g–оберненою похідною k–го порядку і позначимо через ${}^{\{k\}}f_g(x)$, тобто*

$$
{}^{\{k\}}f_g(x) = \rho_k[g; \underbrace{x, \ldots, x}_{k+1}; f] = \lim_{x_0, x_1, \ldots, x_k \to x} \rho_k[g; x_0, x_1, \ldots, x_k; f]. \qquad (27)
$$

З (16) та (27) при $m = 0$ маємо:

$$
{}^{\{1\}}f_g(x) = \rho_1[g; x, x; f] = \lim_{x_0, x_1 \to x} \frac{\begin{vmatrix} 1 & g(x_0) \\ 1 & g(x_1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) \\ 1 & f(x_1) \end{vmatrix}} = \lim_{h \to 0} \frac{\begin{vmatrix} 1 & g(x) \\ 1 & g(x+h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) \\ 1 & f(x+h) \end{vmatrix}} =
$$

$$
= \lim_{h \to 0} \frac{\begin{vmatrix} 1 & g(x) \\ 0 & \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) \\ 0 & \dfrac{f(x+h) - f(x}{h} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & g(x) \\ 0 & g'(x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) \\ 0 & f'(x) \end{vmatrix}} = \frac{g'(x)}{f'(x)}.
$$

Зауваження 2. *Очевидно, що ${}^{\{1\}}f_g(x) = g'(x) \cdot {}^{(1)}f(x)$, де ${}^{(1)}f(x)$ обернена похідна Тіле 1–го порядку* [2]*, а отже у випадку, коли $g(x) = x$, то g–обернена похідна 1–го порядку буде збігатися із оберненою похідною Тіле.*

Із (15) та (27) при $m = 1$ отримуємо, що

$$
{}^{\{2\}}f_g(x) = \rho_2[g; x, x, x; f] = \lim_{x_0, x_1, x_2 \to x} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & f(x_0)g(x_0) \\ 1 & f(x_1) & f(x_1)g(x_1) \\ 1 & f(x_2) & f(x_2)g(x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & g(x_0) \\ 1 & f(x_1) & g(x_1) \\ 1 & f(x_2) & g(x_2) \end{vmatrix}} =
$$

$$
= \lim_{\substack{h \to 0 \\ x_2 \to x}} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)g(x) \\ 1 & f(x+h) & f(x+h)g(x+h) \\ 1 & f(x_2) & f(x_2)g(x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x) \\ 1 & f(x+h) & g(x+h) \\ 1 & f(x_2) & g(x_2) \end{vmatrix}} =
$$

$$
= \lim_{\substack{h\to 0\\ x_2\to x}} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)g(x) \\ 0 & \frac{f(x+h)-f(x)}{h} & \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \\ 1 & f(x_2) & f(x_2)g(x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x) \\ 0 & \frac{f(x+h)-f(x)}{h} & \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ 1 & f(x_2) & g(x_2) \end{vmatrix}} =
$$

$$
= \lim_{h\to 0} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)g(x) \\ 0 & f'(x) & \big(f(x)g(x)\big)' \\ 1 & f(x+h) & f(x+h)g(x+h) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 0 & f'(x) & g'(x) \\ 1 & f(x+h) & g(x+h) \end{vmatrix}} =
$$

$$
= \lim_{h\to 0} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)g(x) \\ 0 & f'(x) & \big(f(x)g(x)\big)' \\ 0 & \frac{f(x+h)-f(x)-h\,f'(x)}{h^2} & \frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)-h\,(f(x)g(x))'}{h^2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 0 & f'(x) & g'(x) \\ 0 & \frac{f(x+h)-f(x)-h\,f'(x)}{h^2} & \frac{g(x+h)-g(x)-h\,g'(x)}{h^2} \end{vmatrix}} =
$$

$$
= \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & f(x)g(x) \\ 0 & f'(x) & \big(f(x)g(x)\big)' \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & \dfrac{\big(f(x)g(x)\big)''}{2!} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x) & g(x) \\ 0 & f'(x) & g'(x) \\ 0 & \dfrac{f''(x)}{2!} & \dfrac{g''(x)}{2!} \end{vmatrix}} .
$$

Отримаємо формули взаємозв'язку g–оберненої похідної k–го порядку із похідними функцій $f(x)$ та $g(x)$ у загальному випадку. Для цього розглянемо два випадки: a) $k = 2m$; b) $k = 2m + 1$.

а) Нехай $k = 2m$. Тоді згідно з (15) та (27) отримуємо

$$
{}^{\{2m\}}f_g(x) = \rho_{2m}[g; \underbrace{x, x, \cdots, x}_{2m+1}; f] = \lim_{x_0,\cdots,x_{2m}\to x} \rho_{2m}[g; x_0, x_1, \cdots, x_{2m}; f] =
$$

$$
= \lim_{x_0,\cdots,x_{2m}\to x} \frac{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & g(x_0) & \cdots & g^{m-1}(x_0)\,f(x_0) & g^m(x_0)\,f(x_0) \\ 1 & f(x_1) & g(x_1) & \cdots & g^{m-1}(x_1)\,f(x_1) & g^m(x_1)\,f(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & f(x_{2m}) & g(x_{2m}) & \cdots & g^{m-1}(x_{2m})\,f(x_{2m}) & g^m(x_{2m})\,f(x_{2m}) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f(x_0) & g(x_0) & \cdots & g^{m-1}(x_0)\,f(x_0) & g^m(x_0) \\ 1 & f(x_1) & g(x_1) & \cdots & g^{m-1}(x_1)\,f(x_1) & g^m(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & f(x_{2m}) & g(x_{2m}) & \cdots & g^{m-1}(x_{2m})\,f(x_{2m}) & g^m(x_{2m}) \end{vmatrix}} .
$$

Здійснимо поступовий перехід до границі у визначниках чисельника і знаменника. Підставимо x замість x_0 та $x+h$ замість x_1, віднімемо у визначниках від 2–го рядка 1–й, розділимо 2–й рядок на h та перейдемо до границі при $h \to 0$; замість x_2 підставимо $x+h$, від 3–го рядка віднімемо 1–й рядок та 2–й помножений на h, поділимо 3–й рядок на h^2 і перейдемо до границі при $h \to 0$; і т.д. У загальному випадку на i-му кроці, $i = 1, 2, \cdots, 2m$, підставимо $x+h$ замість x_i, від $i+1$–го рядка віднімемо 1–й рядок, 2–й рядок помножений на h, 3–й рядок помножений на h^2 і т.д. i–й рядок помножений на h^{i-1}, поділимо i–й рядок на h^i та перейдемо до границі при $h \to 0$. Після $2m$ таких кроків кінцеве отримаємо:

$$
{}^{\{2m\}}f_g(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^{m-1}f & g^m f \\ 0 & f' & g' & \left(gf\right)' & \cdots & \left(g^{m-1}f\right)' & \left(g^m f\right)' \\ 0 & \frac{f''}{2!} & \frac{g''}{2!} & \frac{(gf)''}{2!} & \cdots & \frac{(g^{m-1}f)''}{2!} & \frac{(g^m f)''}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{f^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{g^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{(gf)^{(2m)}}{(2m)!} & \cdots & \frac{(g^{m-1}f)^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{(g^m f)^{(2m)}}{(2m)!} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^{m-1}f & g^m \\ 0 & f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^{m-1}f)' & (g^m)' \\ 0 & \frac{f''}{2!} & \frac{g''}{2!} & \frac{(gf)''}{2!} & \cdots & \frac{(g^{m-1}f)''}{2!} & \frac{(g^m)''}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{f^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{g^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{(gf)^{(2m)}}{(2m)!} & \cdots & \frac{(g^{m-1}f)^{(2m)}}{(2m)!} & \frac{(g^m)^{(2m)}}{(2m)!} \end{vmatrix}}. \tag{28}
$$

b) У випадку, коли $k = 2m+1$, аналогічним чином отримуємо:

$$
{}^{\{2m+1\}}f_g(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^m & g^{m+1} \\ 0 & f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^m)' & (g^{m+1})' \\ 0 & \frac{f''}{2!} & \frac{g''}{2!} & \frac{(gf)''}{2!} & \cdots & \frac{(g^m)''}{2!} & \frac{(g^{m+1})''}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{f^{(2m+1)}}{(2m+1)!} & \frac{g^{(2m+1)}}{(2m+1)!} & \frac{(gf)^{(2m+1)}}{(2m+1)!} & \cdots & \frac{(g^m)^{(2m+1)}}{(2m+1)!} & \frac{(g^{m+1})^{(2m+1)}}{(2m+1)!} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & f & g & gf & \cdots & g^m & g^m f \\ 0 & f' & g' & (gf)' & \cdots & (g^m)' & (g^m)' \\ 0 & \frac{f''}{2!} & \frac{g''}{2!} & \frac{(gf)''}{2!} & \cdots & \frac{(g^m)''}{2!} & \frac{(g^m)''}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{f^{(2m+1)}}{(2m+1)!} & \frac{g^{(2m+1)}}{(2m+1)!} & \frac{(gf)^{(2m+1)}}{(2m+1)!} & \cdots & \frac{(g^m)^{(2m+1)}}{(2m+1)!} & \frac{(g^m f)^{(2m+1)}}{(2m+1)!} \end{vmatrix}}. \tag{29}
$$

У формулах (28)–(29) аргументи функцій $f(x)$ та $g(x)$ опущені.

Зауваження 3. *Якщо $g(x) = x$, то* (28) *та* (29) *будуть збігатися із відомими формулами із* [8], [9].

Визначимо рекурентне співвідношення для обчислення g–обернених похідних. З (13) випливає, що

$$\rho_k[g; x_0, \ldots, x_k; f] - \rho_{k-2}[g; x_0, \ldots, x_{k-2}; f] =$$

$$= \frac{g(x_k) - g(x_{k-1})}{\rho_{k-1}[g; x_0, \ldots, x_{k-2}, x_k; f] - \rho_{k-1}[g; x_0, \ldots, x_{k-1}; f]}.$$

Нехай в останньому співвідношенні $x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-1} = x$, а $x_k = y$. Тоді

$$\frac{\rho_{k-1}[g; x, \ldots, x, x; f] - \rho_{k-1}[g; x, \ldots, x, y; f]}{g(x) - g(y)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; x, \ldots, x, y; f] - \rho_{k-2}[g; x, \ldots, x, x; f]}.$$

Аналогічно, якщо $x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-3} = x_{k-1} = x$, а $x_{k-2} = x_k = y$, то враховуючи симетричність обернених g–різниць, можна отримати

$$\frac{\rho_{k-1}[g; x, \ldots, x, y; f] - \rho_{k-1}[g; x, \ldots, x, y, y; f]}{g(x) - g(y)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; x, \ldots, x, y, y; f] - \rho_{k-2}[g; x, \ldots, x, y; f]},$$

якщо $x_0 = x_1 = \cdots = x_{k-4} = x_{k-1} = x$, а $x_{k-3} = x_{k-2} = x_k = y$, то

$$\frac{\rho_{k-1}[g; x, \ldots, x, y, y; f] - \rho_{k-1}[g; x, \ldots, x, y, y, y; f]}{g(x) - g(y)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; x, \ldots, x, y, y, y; f] - \rho_{k-2}[g; x, \ldots, x, y, y; f]},$$

. . . .

$$\frac{\rho_{k-1}[g; x, y \ldots, y; f] - \rho_{k-1}[g; y, \ldots, y; f]}{g(x) - g(y)} = \frac{1}{\rho_k[g; x, y, \ldots, y; f] - \rho_{k-2}[g; y, \ldots, y; f]}.$$

Додавши k співвідношень маємо

$$\frac{\rho_{k-1}[g; x, x, \cdots, x; f] - \rho_{k-1}[g; y, y, \cdots, y; f]}{g(x) - g(y)} =$$

$$= \frac{1}{\rho_k[g; x, x, \cdots, x, y; f] - \rho_{k-2}[g; x, x, \cdots, x; f]} +$$

$$+ \frac{1}{\rho_k[g; x, \cdots, x, y, y; f] - \rho_{k-2}[g; x, \cdots, x, y; f]} +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{\rho_k[g; x, y, \cdots, y; f] - \rho_{k-2}[g; y, \cdots, y; f]}.$$

Перейшовши до границі у лівій та правій частинах при $y \to x$ отримуємо

$$\frac{({}^{\{k-1\}}f_g(x))'}{g'(x)} = \frac{k}{{}^{\{k\}}f_g(x) - {}^{\{k-2\}}f_g(x)}.$$

Кінцеве маємо рекурентне співвідношення для знаходження g–обернених похідних

$$ {}^{\{k\}}f_g(x) = \frac{k \cdot g'(x)}{\left({}^{\{k-1\}}f_g(x)\right)'} + {}^{\{k-2\}}f_g(x), \quad k \geqslant 2,\ {}^{\{0\}}f_g(x) = f(x),\ {}^{\{1\}}f_g(x) = \frac{g'(x)}{f'(x)}. \tag{30} $$

Тоді із (6) та (12) отримуємо в околі точки x_* формулу типу Тіле

$$ f(x) \approx f_g(x_*) + \frac{g(x)-g(x_*)}{g'(x){}^{\{1\}}f_g(x_*) + } \frac{g(x)-g(x_*)}{2\,g'(x)\,/({}^{\{1\}}f_g(x_*))' + } \frac{g(x)-g(x_*)}{3\,g'(x)/\left({}^{\{2\}}f_g(x_*)\right)' + } $$

$$ + \cdots + \frac{g(x)-g(x_*)}{n\,g'(x)/\left({}^{\{n-1\}}f_g(x_*)\right)'}\,. \tag{31} $$

Зауваження 4. *Якщо* $g(x) = x$, *то* $g'(x) = 1$ *і* ${}^{\{n\}}f_g(x) = {}^{(n)}f(x)$ *і формула* (31) *набуває вигляду формули Тіле* [5, 7].

Зауваження 5. *Формула* (31), *як результат формальної підстановки у формулу Тіле замість незалежної змінної* x *деякої функції* $g(x)$, *наведена також в* [5]. *При цьому ніяких умов на функцію* $g(x)$ *не накладалося.*

Властивості g–обернених похідних. Припустимо, що функція $f(x)$ в кожній точці відрізку $[\alpha, \beta]$ має похідні (скінчене значення, $+\infty$ чи $-\infty$) до n–го порядку включно, $n \geqslant 1$.

Твердження 3. *1. Нехай в точці* $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x_0) = 0$, *а* $g'(x_0) \neq 0$, *тоді* ${}^{\{1\}}f_g(x_0) = +\infty$, *якщо функції* $f(x)$ *та* $g(x)$ *одночасно строго зростають або спадають в деякому околі точки* x_0 *і* ${}^{\{1\}}f_g(x_0) = -\infty$, *якщо одна із функцій* $f(x)$ *або* $g(x)$ *спадає, а інша зростає в деякому околі точки* x_0.
2. Нехай в деякій точці $x_0 \in (\alpha, \beta), f'(x_0) = \pm\infty, g'(x_0) \neq 0$, *тоді* ${}^{\{1\}}f_g(x_0) = 0$.

Твердження 3 безпосередньо випливає із (30) та властивостей похідних [10, 11].

Зауваження 6. *За аналогією із „звичайними“ похідними, для* g*–обернених похідних можна означити* g*–обернену ліву похідну* ${}^{\{1\}}f_{g-}(x)$ *та* g*–обернену праву похідну* ${}^{\{1\}}f_{g+}(x)$ *та аналог похідних чисел* [12].

Із твердження 3 та (30) безпосередньо випливає наступне твердження.

Твердження 4. *Нехай* ${}^{\{n-2\}}f_g(x_0) = C$, $x_0 \in (\alpha, \beta)$, *де* $C = Const, C \neq 0$, $|C| < \infty$. *Тоді :*
1. якщо ${}^{\{n-1\}}f_g(x_0) = 0, g'(x_0) \neq 0$, *то* ${}^{\{n\}}f_g(x_0) = +\infty$, *коли в деякому околі точки* x_0 g*–обернена похідна* ${}^{\{n-1\}}f_g(x)$ *та функція* $g(x)$ *одночасно зростають або спадають і* ${}^{\{n\}}f(x_0) = -\infty$, *коли або* g*–обернена похідна* ${}^{\{n-1\}}f_g(x)$ *або функція* $g(x)$ *одна монотонно спадає, а інша монотонно зростає в деякому околі точки* x_0*;*
2. якщо ${}^{\{n-1\}}f_g(x_0) = \pm\infty$, *а* $g'(x) \neq 0$, *то тоді* ${}^{\{n\}}f_g(x_0) = 0$.

З означення g–оберненої похідної, похідної складеної функції та похідної оберненої функції [10] безпосередньо випливають наступні твердження.

Твердження 5. *Нехай функція* $y = f(x)$ *має похідну (скінчене значення,* $-\infty$ *чи* $+\infty$*) в точці* x_0, *а функція* $z = \varphi(y)$ *має похідну (скінчене значення,*

$-\infty$ чи $+\infty$) в точці $y_0 = f(x_0)$. Тоді складена функція $z = F(x) = \varphi(f(x))$ має в точці x_0 g–обернену похідну і

$$ {}^{\{1\}}F_g(x_0) = \frac{g'(x_0)}{\varphi_y'(y_0) f'(x_0)} \ . $$

Зауваження 7. *Якщо функція $g'(x)$ визначена в точці $x = y_0$, то*

$$ {}^{\{1\}}F_g(x_0) = \frac{{}^{\{1\}}\varphi_g(y_0)\, {}^{\{1\}}f_g(x_0)}{g'(y_0)} \ . $$

Твердження 6. *Нехай в деякій точці x_0 функція $f(x)$ має g–обернену похідну ${}^{\{1\}}f_g(x_0)$ і для функції існує однозначна обернена функція $x = h(y)$, яка неперервна у відповідній точці $y_0 = f(x_0)$. Нехай функція $g'(x)$ визначена в точці $x = y_0$. Тоді g–обернена похідна $h_g(y_0)$ існує і виконується*

$$ {}^{\{1\}}h_g(y_0) = \frac{g'(x_0)\, g'(y_0)}{{}^{\{1\}}f_g(x_0)} \ . $$

Правила g–оберненого диференціювання. Визначимо правила знаходження g–обернених похідних для суми, різниці, добутку та частки двох функцій.

Твердження 7. *Нехай існують g–обернені похідні функцій $u = f(x)$ та $v = g(x)$. Тоді g–обернені похідні суми, різниці, добутку та частки цих функцій визначаються за формулами:*

$$ {}^{\{1\}}(u \pm v)_g = \frac{{}^{\{1\}}u_g\, {}^{\{1\}}v_g}{{}^{\{1\}}v_g \pm {}^{\{1\}}u_g} \ , \tag{32} $$

$$ {}^{\{1\}}(u\, v)_g = \frac{{}^{\{1\}}u_g\, {}^{\{1\}}v_g}{{}^{\{1\}}u_g\, u + {}^{\{1\}}v_g\, v} \ , \tag{33} $$

$$ {}^{\{1\}}(u/v)_g = \frac{v^2\, {}^{\{1\}}u_g\, {}^{\{1\}}v_g}{{}^{\{1\}}v_g\, v - {}^{\{1\}}u_g\, u} \ . \tag{34} $$

Доведення. Із (30) маємо:

$$ {}^{\{1\}}(u \pm v)_g = \frac{g'}{u' \pm v'} = \frac{g'}{g'/{}^{\{1\}}u_g \pm g'/{}^{\{1\}}v_g} = \frac{{}^{\{1\}}v_g\, {}^{\{1\}}u_g}{{}^{\{1\}}v_g \pm {}^{\{1\}}u_g} \ . $$

Аналогічно у випадку добутку функцій отримуємо:

$$ {}^{\{1\}}(u\, v)_g = \frac{g'}{(u\, v)'} = \frac{g'}{u'\, v + u\, v'} = \frac{g'}{vg'/{}^{\{1\}}u_g + ug'/{}^{\{1\}}v_g} = \frac{{}^{\{1\}}v_g\, {}^{\{1\}}u_g}{{}^{\{1\}}v_g\, v + {}^{\{1\}}u_g\, u} \ . $$

У випадку частки функцій u і v маємо:

$$ {}^{\{1\}}(u/v)_g = \frac{g'}{(u/v)'} = \frac{v^2 g'}{u'\, v - u\, v'} = \frac{v^2 g'}{vg'/{}^{\{1\}}u_g - ug'/{}^{\{1\}}v_g} = \frac{v^2\, {}^{\{1\}}v_g\, {}^{\{1\}}u_g}{{}^{\{1\}}v_g\, v - {}^{\{1\}}u_g\, u}. $$

Формули (32)–(34) доведено.

Твердження 8. *Якщо функції $f_k(x)\,, k = 1,2,3,\ldots,n$, мають g–обернені похідні, то*

$$ {}^{\{1\}}\Big(\sum_{k=1}^{n} f_k\Big) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} {}^{\{1\}}(f_k)_g}{\sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} {}^{\{1\}}(f_j)_g}\ , \qquad {}^{\{1\}}\Big(\prod_{k=1}^{n} f_k\Big) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} {}^{\{1\}}(f_k)_g}{\sum\limits_{k=1}^{n}\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} {}^{\{1\}}(f_j)_g\, f_j}\ . $$

Доведення. Співвідношення доводяться методом повної математичної індукції спираючись на (32) та (33).

Як наслідок із твердження 8 випливає наступне твердження.

Твердження 9. *Якщо існує g–обернена похідна функції $f(x)$, то*

$$ {}^{\{1\}}(f^n)_g = \frac{{}^{\{1\}}f_g}{n\, f^{n-1}}\ , \qquad {}^{\{1\}}(nf)_g = \frac{{}^{\{1\}}f_g}{n}\ . $$

Твердження 10. *Для довільного $n = 0,1,2,\ldots$ мають місце співвідношення*

$$ {}^{\{2n\}}(Cf)_g = C\,{}^{\{2n\}}f_g\ ,\ {}^{\{2n+1\}}(Cf)_g = \tfrac{1}{C}\,{}^{\{2n+1\}}f_g\ , \qquad де \quad C = Const. $$

Доведення. Для доведення твердження скористаємося методом повної математичної індукції. Із (30) маємо

$$ {}^{\{1\}}(Cf)_g = \tfrac{1}{C}\,{}^{\{1\}}f_g,\ {}^{\{2\}}(Cf)_g = \frac{2}{\left({}^{\{1\}}(Cf)_g\right)'} + Cf = C\,{}^{\{2\}}f_g. $$

Припустимо, що твердження виконується при всіх $n = 1,2,\ldots,k$. Тоді, коли $n = k+1$ із припущення та (30) маємо:

$$ {}^{\{2k+2\}}(Cf)_g = \frac{2m+2}{\left({}^{\{2k+1\}}(Cf)_g\right)'} + {}^{\{2k\}}(Cf) = \frac{2k+2}{\left(\frac{1}{C}\,{}^{\{2k+1\}}f_g\right)'} + C^{\{2k\}}f_g = C\ {}^{\{2k+2\}}f_g\ , $$

$$ {}^{\{2k+3\}}(Cf)_g = \frac{2k+3}{\left({}^{\{2k+2\}}(Cf)_g\right)'} + {}^{\{2k+1\}}(Cf)_g = \frac{2k+3}{\left(C\,{}^{\{2k+2\}}f_g\right)'} + \tfrac{1}{C}\,{}^{\{2k+1\}}f_g = \frac{1}{C}\ {}^{\{2k+3\}}f_g\ . $$

Отже, і в цьому випадку твердження виконується.

Твердження 11. *Нехай $C = const$. При кожному значенні $n = 0,1,2,\ldots$ мають місце співвідношення*

$$ {}^{\{2n\}}(f+C)_g = {}^{\{2n\}}f_g + C, \qquad {}^{\{2n+1\}}(f+C)_g = {}^{\{2n+1\}}f_g\ . $$

Доведення. Як і в попередньому випадку, скористаємося методом повної математичної індукції. Легко бачити, що при $n = 0,1$ твердження виконується. Припустимо, що воно виконується при $n = 0,1,\ldots,k$. Тоді при $n = k+1$ із припущення та (30) маємо

$$ {}^{\{2k+2\}}(f+C)_g = \frac{2k+2}{\left({}^{\{2k+1\}}(f+C)_g\right)'} + {}^{\{2k\}}(f+C)_g = \frac{2k+2}{\left({}^{\{2k+1\}}f_g\right)'} + {}^{\{2k\}}f_g + C = {}^{\{2k+2\}}f_g + C\ , $$

$$ {}^{\{2k+3\}}(f+C)_g = \frac{2k+3}{\left({}^{\{2k+2\}}(f+C)_g\right)'} + {}^{\{2k+1\}}(f+C)_g = \frac{2k+3}{\left({}^{\{2k+2\}}f_g + C\right)'} + {}^{\{2k+1\}}f_g = {}^{\{2k+3\}}f_g\ . $$

Отже, і в цьому випадку твердження має місце.

Зауваження 8. *Твердження 10 та твердження 11 можна також було довести, якщо безпосередньо перейти до границі при $x_0, x_1, \ldots, x_k \to x$ у* (19)–(20) *та* (21)–(22) *відповідно, де* $k \in \{2m, 2m+1\}$.

Твердження 12. *Нехай A, B, C, D деякі сталі. При $n = 1, 2, 3, \ldots$ виконуються*

$$ {}^{\{2n\}}\!\left(\frac{1}{f}\right)_g = \frac{1}{{}^{\{2n\}}f_g}, \qquad {}^{\{2n\}}\!\left(\frac{A+Bf}{C+Df}\right)_g = \frac{A+B\,{}^{\{2n\}}f_g}{C+D\,{}^{\{2n\}}f_g} \ . $$

Доведення. Співвідношення безпосередньо випливають із (25) та (26), якщо здійснити граничний перехід при $x_0, x_1, \ldots, x_{2n} \to x$.

Зауваження 9. *Якщо $g(x) = x$, то твердження 1–12 будуть збігатися із аналогічними твердженнями* [13].

Вважаю своїм обов'язком висловити щиру подяку проф. Маринцю В.В., який звернув увагу автора на доцільність побудови та дослідження властивостей ланцюгових дробів типу Тіле.

1. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. В 2-х кн. – Саратов: Из-во Сарат. ун-та, 1990. — 424 с.
2. *Thiele T. N.* Interpolationsprechnung. – Leipzig: Commisission von B. G. Teubner, 1909.– XII + 175 S.
3. *Пагіря М. М.* Інтерполяція функцій ланцюговим дробом та гіллястим ланцюговим дробом спеціального виду // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1994. Вип. I. – С. 72–79.
4. *Pahirya M.* Some New Aspects of Thiele Interpolation Continued Fraction // Communication in the Analytic Theory of Continued Fractions. – 2001. – Vol. IX, Summer 2001. – P. 21–29.
5. *Hildebrand F. B.* Introduction to Numerical Analysis. 2^{nd} ed. – New York: Dover Publications,Inc, 1987. — 669 p.
6. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
7. *Milne–Thomson L. M.* The Calculus of Finite Differences. 2^{nd} ed. – Providence, Rhode Island: AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society, 2000. – XXIV+558 p.
8. *Nörlund N.E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. – Berlin, J. Springer, 1924. – 551 S.
9. *Кацала Р. А.* Зв'язок між оберненими похідними та похідними функції однієї дійсної змінної // Наук. вісник Ужгород. ун–ту. Сер. матем. і інформ. – 2008. – Вип.16. – С. 73 – 81.
10. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. I.–7–е изд. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1969.–608 с.
11. *Харди Г. Х.* Курс чистой математики – М.: Гос. изд. иностранной литературы, 1949.– 512 с.
12. *Титчмарш Е.* Теория функций: Пер. с анл.–2–е изд. перераб. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической
13. *Пагіря М.М., Кацала Р.А.* Властивості обернених похідних // Укр. мат. журнал. – 2010. – **62**, № 5. – С. 709–714.

Одержано ..2010