МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
"УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ"
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ КОНФЛІКТОЛОГІЇ

Ужгород-2015

Мулеса О. Ю. Математичні методи конфліктології. Конспект лекцій. – Ужгород: УжНУ, 2015. – 52 с.

Рекомендовано до друку кафедрою кібернетики і прикладної математики ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол № 10 від 12 червня 2015 р.

Рекомендовано до друку методичною комісією математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол № 7 від 31 серпня 2015 р.

Рецензенти: **Млавець Ю.Ю.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики (ДВНЗ "Ужгородський національний університет")

Синявська О.Ю., кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри теорії ймовірностей та математичної статистики (ДВНЗ "Ужгородський національний університет")

ЗМІСТ

I. ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ

1.1. Сітка Томаса-Кілмана

Розглянемо так звану сітку Томаса-Кілмана (Рис. 1.1), запропоновану у 1972 році. У ній на описовому рівні стверджується, що всі види розв'язання конфліктів між людьми зводяться до п'яти способів, які визначаються чотирма видами дій сторін. Томас та Кілман наводять типові ситуації, в яких потрібно застосовувати певний стиль дій.

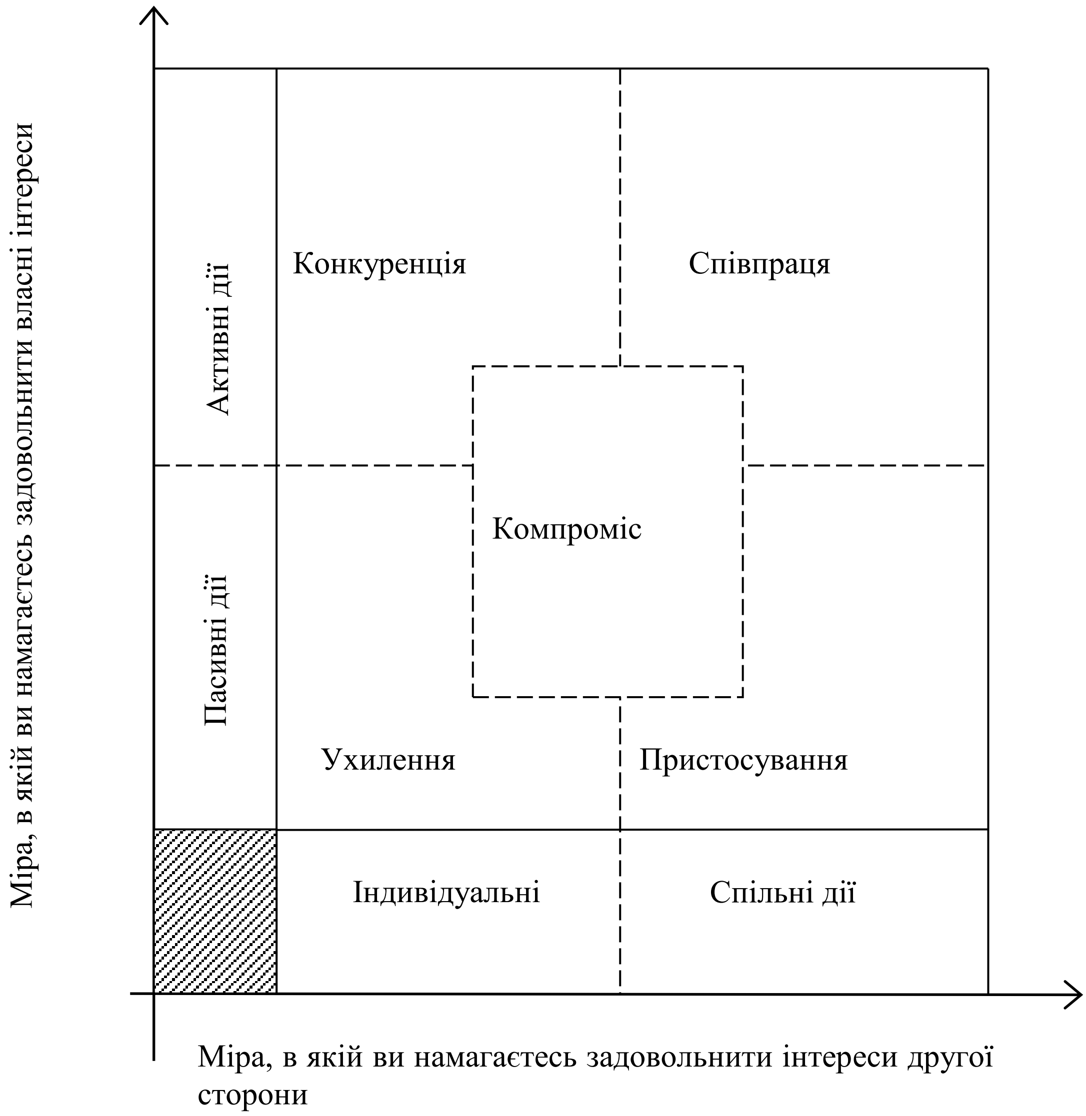

Рис.1.1. Сітка Томаса-Кілмана

Конкуренція:

– результат конфлікту дуже для вас важливий;

– ви маєте достатню владу;

– ви маєте авторитет;

– у вас немає іншого вибору;

– ви знаходитесь у критичній ситуації.

Ухилення:

– результат для вас не дуже важливий;

– ви відчуваєте, що не можете вирішити конфлікт на свою користь;

– ви хочете виграти час;

– ситуація дуже складна;

– у вас недостатньо влади.

Пристосування:

– вас не дуже хвилює конфлікт;

– ви хочете зберегти мир;

– ви розумієте, що не праві;

– у вас мало шансів перемогти;

– ви розумієте, що вирішити конфлікт на свою користь набагато важливіше для іншої сторони.

Співпраця:

– у вас взаємозалежні стосунки;

– усі сторони мають рівну владу;

– усі можуть викласти свої інтереси і вислухати іншу сторону.

Компроміс:

– ви хочете прийти до розв'язку конфлікту швидко;

– ви хочете отримати хоча б щось (максимально можливе у даній ситуації);

– інші підходи виявились не ефективними.

1.2. Основні поняття конфліктології

Існує багато різних визначень гри, - як із точки зору математики, так і із точки зору економіки.

Означення. *Теорія ігор* – це математичний апарат для моделювання узгодження інтересів сторін.

Отже, метою застосування теорії ігор є визначення інтересів сторін, знаходження можливих варіантів узгодження таких інтересів, та пропозиція прогнозу розвитку подій у відповідності до зробленого сторонами вибору.

Теорія ігор має потужний апарат для того, щоб для однієї й тої ж самої задачі розглядати багато різних моделей, підходів та концепцій для її вирішення.

Наведемо сукупність визначень, які використовуються в теорії ігор.

Сторони, які приймають участь у узгодженні своїх інтересів, називаються *гравцями* (player's). Іноді застосовують також назву агенти (agents).

Означення. *Обстановкою (environtment) гри* зветься сукупність всіх об'єктів та суб'єктів, які впливають на дану гру. Це можуть бути інші гравці, керівні органи, природні явища тощо.

Характеристики одного гравця

Гравець здатний формувати стратегії (strategies) або дії (actions) та вибирати їх із деякої множини А. Стратегію гравця будемо позначати у ($y \in A$). Під стратегією найчастіше розуміють опис послідовності дій, технологій (technologies) для застосування, методів (methods), алгоритмів (algorithms), способів (mechanisms) тощо.

В результаті вибору дії $y \in A$ гравець під впливом обстановки отримає результат, який позначимо як $z \in A_0$, де A_0 – множина (set) всіх можливих для даної гри результатів діяльності. Множини A та A_0 можуть не співпадати: зумовлено це впливом обстановки. Наприклад, відсутністю потрібної гравцю інформації, впливом зовнішнього середовища, діями інших учасників гри тощо.

Важливою для практичного застосування теорії ігор є та обставина, що для конкретної людини як для гравця існують певні обмеження відносно тих стратегій, які вона може вибрати. Відомо, що з множини усіх можливих стратегій A конкретна людина вибирає лише стратегії із певної підмножини $A^T \subseteq A$. Причому можливо однозначно зв'язати конкретну людину із відповідною множиною A^T. Це дозволяє говорити про типи гравців.

Загалом же тип гравця (player's type) визначається як сукупність стратегій (яка не охоплює всієї множини можливих стратегій A), яких притримується даний гравець.

Гравець має властивість визначати переваги (advantages) на множині результатів $z \in A_0$, коли він володіє здатністю порівнювати між собою різні результати своєї діяльності.

Ключовим елементом в теорії ігор є концепція раціональної поведінки для гравця.

Під раціональною поведінкою (rational behavior) гравця розуміють, що гравець з урахуванням всієї наявної у нього інформації вибирає саме ті стратегії, які приводять до найбільш бажаних для нього результатів.

Функція корисності (utility function) $U(z)$ гравця виражає в числовому вигляді результат його дії.

Для економічних задач в якості функції корисності гравця найчастіше вибирають прибуток, витрати, зарплату, прикладені зусилля тощо.

Характеристики багатьох гравців

Власне, сама гра й виникає тільки тоді, коли є хоча б два гравця. За наявності інших гравців, функція корисності кожного із них буде залежати вже також і від всієї вибраної іншими гравцями сукупності стратегій.

Кожному із n гравців відповідає його функцію корисності для даної гри, яку називають функцією виграшу $v_i(y)$ для *i*-того гравця ($I=\{1,2,\ldots,n\}$ – множина всіх гравців). Тут $y=(y_1,y_2, \ldots,y_n)$ – вектор дій всіх гравців, $y\in A_n=\Pi A_i$. A_n – простір стратегій всіх гравців, а Ai – простір стратегій i-того гравця.

Таким чином, yi називається стратегією (*i*-го гравця), а вектор y - ситуацією гри (тобто вектором стратегій усіх гравців).

Сукупність стратегій $y_{-i}=(y_1,y_2,\ldots,y_{i-1}, y_{i+1}, \ldots,y_n)$ зветься обстановкою гри для *i*-го гравця (це вектор, в якому зібрані стратегії всіх інших гравців).

Таким чином, щоб задати гру необхідно:

1. Описати всіх гравців.
2. Описати цілі (goals) учасників гри.
3. Описати правила гри (game's rules).
4. Описати рівень інформованості гравців: що вони знають, тощо.

З огляду на це розрізняють різні типи ігор.

1.3. Класифікація ігор

За кількістю гравців розрізняють ігри двох гравців та багатьох гравців. Ігри двох гравців є найбільш повно дослідженою частиною теорії ігор. Однак в практичних застосування, особливо в сфері моделювання поведінки соціально-економічних систем, найбільш часто зустрічаються ігри з багатьма гравцями.

В залежності від обмежень на суму виграшу розрізняють ігри із нульовою сумою (zero-sum game) та ігри із довільною сумою.

Ігри із нульовою сумою часто називають антагоністичними іграми, бо цілі гравців тут прямо протилежні, а виграш (payoff) одним гравцем певної суми означає програш (payoff) іншим гравцем (сукупністю інших гравців) тієї ж самої суми.

Ігри поділяються на класи за рівнем інформованості гравців. Виділяють ігри із повною інформованістю (complete information) гравців (довершеною інформацією) та ігри із неповною інформованістю гравців (недовершеною інформацією) щодо різних параметрів гри.

Повна інформованість означає, що відсутні всі інші види невизначеності, окрім невизначеності ігрової (зумовленої можливістю вибору гравцями своєї стратегії).

За можливістю повторів виділяють ігри одноразові (гравці ходять одночасно) та динамічні (або послідовні) ігри, в яких гравці ходять послідовно.

Динамічні ігри, в яких динаміка описується диференціальними або різницевими рівняннями, називаються диференціальними іграми (differential game). Диференціальні ігри часто використовуються для моделювання керування неживими об'єктами.

Дискретні ігри (discrete game) мають дискретну множину результатів гри. Неперервні ж ігри допускають неперервну множину результатів.

З точки зору можливості спільних дій (coupled actions) гравців розрізняють некооперативні та кооперативні ігри (cooperative games).

В некооперативних іграх гравці не можуть в процесі формування стратегій діяти спільно. Домовленості між гравцями, передавання один одному ресурсів чи інформацій, створення коаліцій – все це заборонено.

Для кооперативних ігор характерно те, що гравці вибирають свої стратегії спільно та формують коаліції.

Враховуючи зовнішній контекст, ігри поділяють на унікальні (коли гра проводиться всього один раз), популяційні (де гравці користуються знанням щодо перебігу аналогічних ігор), та ігри, які повторюються (repeated games) серед тієї ж самої сукупності гравців (в цих іграх гравці можуть користуватися загрозами).

Є дві найбільш поширені форми представлення некооперативних ігор. Перша це позиційна форма гри (часто її ми будемо називати динамічною). Вона задає: (1) порядок ходів гравців, (2) множини сценаріїв, які доступні гравцеві на кожному із його ходів (ці множини можуть бути різними для різних ходів), (3) інформацію, яку гравець має при виборі кожного із своїх ходів, (4) виграші (функції виграшу), які гравець має під час кожного ходу (5) ймовірнісний розподіл на множині ходів Природи. Ця форма гри задається деревом гри, яке можна розглядати як узагальнення дерева прийняття рішень на випадок декількох гравців.

Друга – це гра в нормальній (стратегічній) формі (normal (strategic) form game), коли задається: (1) сукупність гравців, (2) сукупність стратегій для кожного гравця, (3) функції виграшів для кожної із стратегій.

Нарешті, є ігри, в яких явно вводиться ймовірність (probability) вибору гравцем тієї чи іншої стратегії. Оптимізують тут математичне очікування виграшу, а самі такі ігри звуться байєсівськими (Bayesian games).

Одну й ту ж саму соціально-економічну задачу часто можна представити у вигляді різних ігор. Задачею дослідника у цьому випадку є перш за все обґрунтування форми представлення гри (form of game representation), а вже потім концепції її рішення.

1.4. Постановка гри в нормальній формі

Постановка задачі. Нехай $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ – множина гравців (учасників), n – їх кількість. Грою $G = (X_i, u_i; i \in N)$ у *нормальній формі* назвемо сукупність, котра містить для кожного гравця $i \in N$:

– множину *стратегій* X_i, елементи якої позначають через x_i;

– *виграші* гравців $u_i(x)$, $i \in N$, – функції, які визначені на множині *ситуацій* гри $X_N = \prod_{i \in N} X_i$ (які максимізуються або мінімізуються).

II. НЕКООПЕРАТИВНА ПОВЕДІНКА ІЗОЛЬОВАНИХ ГРАВЦІВ

Розглянемо спочатку випадок, коли гравці діють ізольовано, тобто кожен з них вибирає свою стратегію незалежно, вони не обмінюються інформацією, на вибір гравців не впливає минуле (початкова позиція або передісторія партії гри). Будемо також вважати, що кожен гравець знає лише свою цільову функцію виграшу, значення якої він може обчислити після вибору своїх стратегій іншими учасниками.

2.1. Недоміновані та домінуючі стратегії

Позначимо через $x_{N\backslash i}$ вектор x без i-ї компоненти, тобто $x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i} = \prod_{j \in N\backslash\{i\}} X_j$ (сукупність стратегій усіх гравців за виключенням фіксованого i-го).

<u>*Означення.*</u> Стратегія $x_i \in X_i$ гравця i *домінує* його стратегію $y_i \in X_i$, якщо:

$$u_i(x_i, x_{N\backslash i}) \geq u_i(y_i, x_{N\backslash i}),\ \forall x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i};$$
$$\exists \tilde{x}_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i} : u_i(x_i, \tilde{x}_{N\backslash i}) > u_i(y_i, \tilde{x}_{N\backslash i}).$$

Таким чином, стратегія i-го гравця x_i домінує його стратегію y_i (позначатимемо це як $x_i \succ y_i$), якщо при виборі стратегії x_i значення його цільової функції є не гіршим за значення цільової функції при виборі стратегії y_i при довільних виборах своїх стратегій усіма іншими гравцями, при чому хоча б для одного набору стратегій інших гравців значення цільової функції для стратегії x_i є кращим, ніж для стратегії y_i. Іншими словами, вибираючи стратегію x_i, гравець не погіршує свій виграш у порівнянні з вибором стратегії y_i, при чому хоча б в одному випадку значення цільової функції покращується.

<u>*Означення.*</u> Стратегія $x_i \in X_i$ гравця *i* називається *домінуючою* стратегією, якщо: $u_i(x_i, x_{N\setminus i}) \geq u_i(y_i, x_{N\setminus i})$, $\forall\ y_i \in X_i$, $\forall\ x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$.

Множину домінуючих стратегій *i*-го гравця позначатимемо через D_i.

<u>*Означення.*</u> Стратегії x_i та y_i першого гравця називаються *еквівалентними*, якщо: $u_i(x_i, x_{N\setminus i}) = u_i(y_i, x_{N\setminus i})$, $\forall\ x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}$. Множину еквівалентних стратегій *i*-го гравця позначимо як E_i.

<u>*Означення.*</u> Стратегія $x_i \in X_i$ *i*-го гравця називається *недомінованою*, якщо не існує стратегії $y_i \in X_i$, яка б її домінувала: $\overline{\exists}\ y_i \in X_i :\ y_i \succ x_i$. Множину недомінованих стратегій *i*-го гравця позначатимемо через HD_i.

<u>*Означення.*</u> Ситуація $x^* = (x_i^*)_{i\in N}$ називається *рівновагою у домінуючих стратегіях*, якщо x_i^* є домінуючою стратегією кожного гравця ($x_i^* \in D_i,\ \forall i \in N$). Множина $D = \prod_{i\in N} D_i$ називається множиною рівноваг у домінуючих стратегіях.

<u>*Означення.*</u> Ситуація $x \in X$ *домінує за Парето* ситуацію $y \in X$, якщо:

$$u_i(x) \geq u_i(y),\ \forall i \in N; \tag{1}$$

$$\exists j \in N : u_j(x) > u_j(y). \tag{2}$$

Ситуація x^* називається *Парето-оптимальною* (оптимальною за Парето, ефективною), якщо вона не домінується за Парето.

Коротко умови (1), (2) будемо описувати, як *xPy*, тоді умова ефективності x^* запишеться як: $\overline{\exists} x,\ xPx^*,\ x, x^* \in X$.

Отже, ситуація x^* є ефективною, якщо не існує іншої ситуації, у якій усі гравці мають значення виграшу, не гірші, ніж у x^*, і хоча б один гравець має краще значення функції виграшу.

2.2.Обережні стратегії

Коли кожен гравець знає лише свою цільову функцію, єдиною раціональною поведінкою кожного гравця є використання домінуючих стратегій, якщо вони існують. А що залишається, якщо рівновага у домінуючих стратегіях відсутня (найбільш поширений випадок). Тоді залишається вибирати не „абсолютно краще”, а „відносно краще” – „краще з гіршого”.

<u>*Означення.*</u> Стратегія x_i називається *обережною*(песимістичною) стратегією *i*-го гравця, якщо $\inf\limits_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(x_i, x_{N\setminus i}) = \sup\limits_{y_i \in X_i} \inf\limits_{x_{N\setminus i} \in X_{N\setminus i}} u_i(y_i, x_{N\setminus i}) = \alpha_i$.

Множину обережних стратегій *i* - го гравця позначимо O_i. Величина α_i називається *гарантованим результатом* (виграшем) *i* - го гравця.

Отже, *i*-й гравець вважає, що його супротивники діють найгіршим для нього чином і його „розумність” у такій ситуації полягає у виборі на множині своїх стратегій максимізуючої його цільову функцію стратегії.

Множина $IR = \left\{ x \in X \,\middle|\, u_i(x) \geq \alpha_i,\ \forall i \in N \right\}$ називається множиною *індивідуально-раціональних ситуацій*. Множині *IR* належать ситуації, у яких кожен гравець має виграш не менший за гарантований.

Очевидно, що вести переговори про вибір ситуації, у якій хоча б один гравець має виграш, менший за гарантований α_i, не має сенсу. Адже і без переговорів кожен гравець, діючи ізольовано, може отримати α_i. Очевидно також, що вести переговори про вибір домінованої за Парето ситуації не логічно (з урахуванням міркувань про ефективні рішення).

<u>*Означення.*</u> Множина $\ddot{I} = IR \bigcap PO$ називається *переговорною*.

<u>*Означення.*</u> Обережні стратегії гравців x_i, $i \in N$, називаються оптимальними, якщо набір гарантованих результатів $\alpha = (\alpha_i)_{i \in N}$, що відповідає цим стратегіям, є Парето-оптимальним. Оптимальні стратегії *i*-го гравця позначимо через OP_i.

2.3. Ігри двох осіб з нульовою сумою

Окремо й коротко розглянемо *ігри двох осіб з нульовою сумою*, у яких $u_2(x_1, x_2) = -u_1(x_1, x_2)$ для $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

Обережні стратегії x_1, x_2 кожного гравця визначаються співвідношеннями: $\inf\limits_{x_1 \in X_1} u(x_1, x_2) = \sup\limits_{y_1 \in X_1} \inf\limits_{x_2 \in X_2} u_i(y_1, x_2) = \alpha_1$,

$$\sup_{x_2 \in X_2} u(x_1, x_2) = \inf_{y_2 \in X_2} \sup_{x_1 \in X_1} u_i(x_1, y_2) = \alpha_2.$$

Легко показати, що $\alpha_1 \le \alpha_2$. Фіксуючи довільні $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, маємо: $\varphi_1(x_1) = \inf\limits_{y_2} u_1(x_1, y_2) \le u_1(x_1, x_2) \le \sup\limits_{y_1} u_1(y_1, x_2) = \varphi_2(x_2)$. Звідси випливає: $\alpha_1 = \sup\limits_{y_1} \varphi_1(y_1) \le \inf\limits_{y_2} \varphi_2(y_2) = \alpha_2$.

Якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, то величина α називається *ціною гри*. Якщо $\alpha_1 < \alpha_2$, то відповідна гра не має ціни.

Якщо для $\forall (y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$, $u_1(y_1, x_2) \le u_1(x_1, x_2) \le u_1(x_1, y_2)$, то ситуація (x_1, x_2) називається *сідловою точкою*.

ІІІ. ПОВЕДІНКА ГРАВЦІВ В УМОВАХ ПОВНОЇ ТА ЧАСТКОВОЇ ІНФОРМОВАНОСТІ

Розглянемо випадок „повної інформованості” гравців, коли кожен з них знає всі цільові функції – свою і суперників.

3.1. Складна поведінка гравців

При некооперативній поведінці в умовах повної інформованості породжуються взаємні „стратегічні очікування”, які полягають у тому, що і -й гравець очікує, що всі інші гравці також будуть виключати свої доміновані стратегії. У результаті цього у деяких гравців можуть виникнути нові доміновані стратегії і т.д.

<u>Означення.</u> Для гри $G=\left(X_i, u_i, i \in N\right)$ послідовне виключення домінованих стратегій означає побудову послідовностей $X_i = X_i^0 \supset X_i^1 \supset \ldots \supset X_i^t \supset X_i^{t+1} \supset \ldots, \forall i \in N$, де $X_i^{t+1} = ND\left(u_i, X_j^t, j \in N\right)$.

<u>Означення.</u> Гра G називається *розв’язною за домінуванням*, якщо існує натуральне *t* таке, що для усіх *і* функція виграшу u_i не залежить від x_i на X_N^t: $\forall x_i, y_i \in X_i^t$, $\forall x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}^t$ $u_i\left(x_i, x_{N\backslash i}\right)=u_i\left(y_i, x_{N\backslash i}\right)$. Множина X_N^t при цьому називається *множиною складних рівноваг*.

3.2. Рівновага за Нешем

Домінуюча стратегія, обережна й складна поведінка можуть бути визначеними гравцями незалежно один від одного.

На противагу цьому рівновага за Нешем може бути обумовленою тільки динамічним сценарієм, у якому стратегічні рішення, що приймаються у даний момент, залежать від попередніх сценаріїв гри або хоча б від початкової позиції. Таким чином, спілкування гравців стає неминучим. Вони повинні хоча б сумісно спостерігати ситуації гри.

<u>*Означення.*</u> Для гри $G = (X_i, u_i, i \in N)$ ситуація x^* називається *рівновагою за Нешем*, якщо:

$$u_i(x^*) \ge u_i(x_i, x^*_{N\setminus i}), \forall\, i \in N, \forall\, x_i \in X_i. \qquad (3)$$

Будемо позначати через *NE* (Nesh Equalibrity) множину рівноваг Неша.

Як синоніми будемо використовувати терміни „рівновага Неша”, „нешівська рівновага”, „нешівська ситуація”, „*NE* – ситуація”. Для зручності будемо використовувати також позначення x^{NE} для рівноваг Неша. Стратегії, з яких утворюється x^{NE}, будемо аналогічно називати „нешівські стратегії”, „*NE* – стратегії”.

Отже, у рівновазі Неша x^* гравець *i* розглядає стратегії інших гравців $x^*_{N\setminus i}$ як екзогенно задані („зовнішньо” задані) і максимізує свою функцію виграшу u_i на множині своїх стратегій $x_i \in X_i$. Властивість (3) рівноваг Неша полягає у тому, що x_i^* – одна з кращих відповідей на стратегії $x^*_{N\setminus i}$ (потрібно підкреслити – x_i^* є точкою глобального максимуму функції однієї змінної $u_i(x_i) \equiv u_i(x_i, x^*_{N\setminus i})$ при фіксованих значеннях змінних $x_{N\setminus i} = x^*_{N\setminus i}$). З означень випливає, що дана ситуація є рівновагою Неша, якщо від неї невигідно відхилятись будь-якому одному гравцю (усі інші свої стратегії не змінюють), оскільки значення його цільової функції не покращується (залишається таким, як у даній ситуації, або погіршується). Навпаки, дана ситуація не є рівновагою Неша, якщо хоча б одному гравцю вигідно відхилятись від неї (значення його цільової функції хоча б на одній стратегії покращується).

На відміну від складної або обережної поведінки концепція рівноваги Неша у загальному випадку не дає конкретних рекомендацій по вибору стратегії. Для ігор двох осіб з нульовою сумою *NE* – ситуації є, очевидно, просто сідловими точками, тому нешівські стратегії співпадають з оптимальними стратегіями.

3.3. Вибір Нешівських рівноваг

У загальному випадку гра може мати декілька ситуацій рівноваги за Нешем, при цьому, в різних ситуаціях гравці можуть отримувати різні виграші. Тобто одні ситуації вигідні одним гравцям, інші – іншим. Після введення Нешем поняття рівноваги, численні спеціалісти намагались сформулювати додаткові умови вибору єдиної рівноваги. Одна з таких концепцій запропонована лауреатами Нобелевської премії з економіки за 1994 рік Дж. Харшаньї та Р. Зельтеном.

Розглянемо спрощений варіант концепції Харшаньї – Зельтена.

Означення. Нехай r та s шукані рівноваги в грі G. Ситуація r *домінує за виграшем* ситуацію s , якщо $u_i(r) \geq u_i(r), i \in N; u_i(r) \neq u_i(r)$.

Означення. Ситуація рівноваги r називається *ефективною за виграшем* у грі G, якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за виграшем r.

Означення. Ситуація *a домінує за ризиком* b, якщо $v_1 v_2 > w_1 w_2$.

Означення. Ситуація рівноваги *a* ефективна за ризиком у грі G, якщо не існує інших ситуацій рівноваги, які домінують за ризиком *a*.

Отже, за думкою Дж. Харшаньї та Р. Зельтена гравці не повинні вибирати ситуації, що є домінованими чи за виграшем, чи за ризиком. А далі, вони повинні вирішити, що для них важливіше: виграш чи ризик, та вибирати одну з недомінованих рівноваг, відповідно чи за виграшем, чи за ризиком.

Слід відмітити, що у випадку, коли гравців більше двох та гравці мають більше двох стратегій, пошук недомінованих за ризиком рівноваг значно ускладнюється, але ця проблема має вирішення.

3.4 Часткова інформованість гравців

У багатьох економічних, політичних і соціальних ситуаціях природним чином виникає несиметричний розподіл інформації. Розглянемо найпростішу модель такого виду – поведінка типу „лідер-підлеглий”. Першим подібну модель розглянув економіст Г. Штакельберг на початку XX сторіччя при описанні стратегій фірм, що конкурують на одному і тому ж ринку. У таких ситуаціях нерідко одна з фірм виявляється сильнішою за інші і нав’язує їм свою стратегію, наприклад, призначає ціну.

Нехай для даної гри двох осіб $G = (X_1, X_2, u_1, u_2)$, R_j – множина кращих (оптимальних) відповідей j - го гравця на задані стратегії i - го ($j \neq i$): $$R_j = \left\{ (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 \;\middle|\; u_j(x_1, x_2) = \sup_{y_j \in X_j} u_j(x_i, y_i),\;\; j \neq i \right\}.$$

<u>*Означення.*</u> Ситуація (x_1, x_2) називається i - *рівновагою Штакельберга*, якщо:

$$u_i(x_1, x_2) = \sup_{(y_1, y_2) \in R_j} u_i(y_1, y_2);\; i,j=1,2,\; i \neq j\,. \tag{4}$$

Можна інтерпретувати 1-у рівновагу Штакельберга на основі наступного сценарію: гравець 1 (*лідер*) знає обидві функції виграшу u_1 і u_2 та використовує цю інформацію для передбачення реакції гравця 2. Гравець 2 (*підлеглий*) сприймає стратегію гравця 1 як задану екзогенне (ззовні) і максимізує власний виграш (вибираючи свою максимізуючу стратегію). Таким чином, гравець 1, маючи перший хід і передбачаючи „розумність” реакцій на нього гравця 2, сам, поступаючи „розумно”, буде розв’язувати задачу (4).

IV ПОВЕДІНКА ГРАВЦІВ В УМОВАХ МІНІМАЛЬНОЇ ІНФОРМОВАНОСТІ

Кажуть, що гра відбувається в умовах мінімальної інформованості, якщо гравці знають лише свої функції виграшу, але на відміну від умов повної неінформованості гравців, гра може відбуватися необмежену кількість разів і гравці можуть разом спостерігати її наслідки.

4.1. Процедура Курно

Можна дати різні визначення процедури намацування Курно для ігор n осіб: гравці можуть змінювати свої стратегії одночасно або послідовно (порядок має значення). Відповідні поняття співпадають для $n=2$ і не співпадають для $n \geq 3$.

Нехай кожен гравець має єдину стратегію оптимальної відповіді $r_i(x_{N\backslash i}) \in R_i$ на стратегії інших гравців $x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash i}$. З будь-якою ситуацією $x^0 \in X_N$ зв'язана *процедура одночасного намацування Курно*, що будує послідовність $x^0, x^1, \ldots, x^t, \ldots$ з X_N таку, що $x_i^t = r_i\left(x_{N\backslash i}^{t-1}\right)$, $i \in N$, $t=1,2,\ldots$.

4.2. Стійкі, локально стійкі та нестійкі рівноваги Неша

<u>*Означення.*</u> Рівновага Неша x^* *стійка*, якщо для $\forall\, x^0 \in X_N$, процедура намацування Курно, що починається з x^0, збігається до x^*.

Відмітимо, що стійка *NE*– ситуація обов'язково є єдиною рівновагою Неша у грі, оскільки, якщо x^0 є рівновагою Неша (у визначенні x^0 може будь-якою, зокрема, *NE*– ситуацією), то процедура намацування Курно приводить до стаціонарної послідовності.

Для заданого порядку гравців $N = \{1,2,\ldots,n\}$ процедурою $\{1,2,\ldots,n\}$ – *послідовного намацування Курно*, що починається з x^0, називається послідовність $\{x^t\}$, де $x_i^t = r_i\left(x_1^t,\ldots,x_{i-1}^t, x_{i+1}^{t-1},\ldots,x_n^{t-1}\right)$, $i \in N$, *t=1,2,…*.

<u>*Означення.*</u> *NE* – ситуація x^* є $\{1,2,\ldots,n\}$ – стійкою, якщо для $\forall\ x^0$ процедура $\{1,2,\ldots,n\}$ – послідовного намацування Курно, що починається у x^0, збігається до x^*.

V. ЗМІШАНІ СТРАТЕГІЇ

5.1. Змішане розширення гри

Формалізуємо зроблені нами висновки.

<u>*Означення.*</u> Нехай $G=\left(X_i, u_i, i\in N\right)$, де X_i – скінченна множина при усіх $i\in N$. *Змішаною стратегією* гравця *i* називається ймовірнісний розподіл $\mu_i=\mu_i(x_i)_{x_i\in X_i}$ на X_i, $0\le \mu_i(x_i)\le 1, x_i\in X_i$; $\sum\limits_{x_i\in X_i}\mu_i(x_i)=1, i\in N$ ($\mu_i(x_i)$ – ймовірність вибору *i*-м гравцем його „чистої” стратегії з $x_i\in X_i$). Отже, множина M_i змішаних стратегій *i* - го гравця є одиничним симплексом у просторі його стратегій $E^{|X_i|}$.

Змішаним розширенням гри *G* називається гра $\overline{G}=\left(M_i, \overline{u}_i, i\in N\right)$, де:

$$\forall\ \mu\in M_N=\prod_{i=\overline{1,n}}M_i:\ \overline{u}_i(\mu)=\sum_{x\in X_N}u_i(x)\mu_1(x_1)..\mu_n(x_n). \qquad (5)$$

Мається на увазі, що „лотерея” *i* - го гравця не залежить від „лотереї” *j* - го для усіх $j\ne i$, тільки гравець *i* знає стратегію x_i, яка дійсно випала у лотереї (навіть якщо інші гравці, можливо, знають ймовірнісний розподіл μ_i). Оскільки випадкові змінні незалежні у сукупності, то $\overline{u}_i(\mu)$ є очікуваний виграш (математичне сподівання) гравця *i*.

<u>*Означення.*</u> Чиста стратегія $x_i\in X_i$ гравця *i* у початковій грі ототожнюється із змішаною стратегією $\delta_{x_i}\in M_i$, у якій вибирається x_i з ймовірністю *1*: $\delta_{x_i}(x_i)=1; \delta_{x_i}(y_i)=0,\ y_i\in X_i,\ y_i\ne x_i$.

В цьому випадку з формули (5) випливає: $\overline{u}_i(\delta_x)=u_i(x),\ \forall\ x\in X_N$, $\delta_x=\left(\delta_{x_i}\right)_{i\in N}$. Тому будемо розглядати X_i як підмножину M_i, а $\overline{u}_i$ – як розширення визначення функції u_i з X_N на M_N.

5.2. Знаходження рівноваг у змішаних стратегіях

Нехай X_i – скінчена множина стратегій гравця $i \in N$. Для довільної змішаної стратегії $\mu_i \in M_i$ позначимо через $[\mu_i] = \{x_i \in X_i \mid \mu_i(x_i) > 0\}$ – „*носій*" μ_i, тобто множину чистих стратегій гравця *i*, котрі входять у μ_i з додатною ймовірністю.

<u>*Означення.*</u> Змішана стратегія μ_i називається *цілком змішаною*, якщо $[\mu_i] = X_i$, тобто носієм μ_i є вся множина чистих стратегій.

<u>*Означення.*</u> Ситуація μ у грі $\overline{G}$ називається цілком змішаною, якщо μ_i – цілком змішана стратегія при усіх $i \in N$.

<u>*Означення.*</u> Нехай множини стратегій X_1, X_2 скінченні. Деяка властивість *P виконується майже* для усіх ігор, визначених на $X_1 \times X_2$, якщо $\overline{P} = \left\{(u_1, u_2) \in E^{n_1 \times n_2} \times E^{n_1 \times n_2} \;\middle|\; \text{для гри } (X_1, X_2, u_1, u_2) \text{ не виконано } P\right\}$ має міру Лебега, рівну нулю, і міститься у деякій замкненій підмножині без внутрішніх точок простору $E^{n_1 \times n_2} \times E^{n_1 \times n_2}$.

Нехай X_1, X_2 – скінченні множини. Майже для усіх ігор, визначених на $X_1 \times X_2$, справедливі твердження:

1) Кількість рівноваг Неша у змішаних стратегіях обмежена й непарна, для будь-якої *NE* – ситуації у змішаних стратегіях множини $[\mu_1]$ й $[\mu_2]$ мають однакову кількість елементів.

2) Рівноваги Неша у змішаних стратегіях, які не є рівновагами у початковій грі, не є оптимальними за Парето у змішаному розширенні гри.

Розглянемо три класи ігор.

1. У початковій грі *G* хоча б один гравець, наприклад, перший, має домінуючу стратегію (нехай *B*). Тоді гра *G* і її змішане розширення $\overline{G}$ мають єдину ситуацію рівноваги Неша:

$$NE(G) = NE(\overline{G}) = \{(B, Л), \text{ якщо } a_2 > c_2; (B, П), \text{ якщо } a_2 < c_2\},$$

оскільки нерівності $a_1 > b_1$, $c_1 > d_1$ (усі числа – різні) приводять до того, що у грі $\overline{G}$ чиста стратегія *B* строго домінує усі змішані стратегії.

2. Гра *G* не має рівноваг Неша. Це може бути, якщо:

$\{b_1 < a_1, c_1 < d_1, a_2 < c_2, d_2 < b_2\}$ або $\{a_1 < b_1, d_1 < c_1, c_2 < a_2, b_2 < d_2\}$, (6)

тоді змішане розширення $\overline{G}$ гри *G* має єдину *NE*– рівновагу:

$$\mu_1^* = \left(\frac{d_2 - b_2}{a_2 + d_2 - b_2 - c_2}, \frac{a_2 - c_2}{a_2 + d_2 - b_2 - c_2} \right),$$

$$\mu_2^* = \left(\frac{d_1 - c_1}{a_1 + d_1 - b_1 - c_1}, \quad \frac{a_1 - b_1}{a_1 + d_1 - b_1 - c_1} \right). \tag{7}$$

і відповідні рівноважні виграші: $v_1 = \dfrac{a_1 d_1 - b_1 c_1}{a_1 + d_1 - b_1 - c_1}$, $v_2 = \dfrac{a_2 d_2 - b_2 c_2}{a_2 + d_2 - b_2 - c_2}$.

Єдиність гарантується умовами (6), при їх виконанні або U_i – невироджена матриця, або її можна зробити невиродженою, додаванням деякої константи *c* до елементів матриці (ця операція, очевидно, не змінює множину *NE*– ситуацій).

3. Гра *G* має дві рівноваги Неша. Цей випадок визначається якщо: $\{b_1 < a_1, c_1 < d_1, c_2 < a_2, b_2 < d_2\}$ або $\{a_1 < b_1, d_1 < c_1, a_2 < c_2, d_2 < b_2\}$. Тоді у грі $\overline{G}$ виникає ще одна *NE*– ситуація, що співпадає з (7).

Якщо множини чистих стратегій X_i нескінченні, то навіть для гри двох осіб з нульовою сумою не можна гарантувати існування ціни гри у змішаних стратегіях. Тим паче не гарантується існування *NE*– ситуації.

VI. КООПЕРАТИВНА ПОВЕДІНКА ГРАВЦІВ

Будемо розглядати необов'язкові домовленості з точки зору їх стабільності, яка розуміється як невигідність відхилення від неї гравцями. Стабільність є не таким уже простим поняттям, як може здатись на перший погляд. Дійсно, відхилення деяких гравців від домовленості (необов'язкової) може заставити інших гравців (котрі спочатку не збирались порушувати домовленість) змінити свої стратегії. Ці зміни важко передбачити незалежно від того, чи ми передбачаємо чи ні, що порушення домовленості знищить дух кооперації й приведе до некооперативної поведінки гравців. Тому будемо вважати, що необов'язкові домовленості будуть складатись з домовленостей про ситуацію, а також із сценарію реагування кожного гравця і на відхилення будь-якої коаліції, що не містить гравця і. Цей сценарій об'являється наперед і є „сценарієм погроз". Зокрема, реакція на порушення домовленості може полягати у відсутності будь-якої реакції („сценарій ігнорування").

У принципі у якості домовленості може виступати будь-яка ситуація гри, але логічно використовувати „стабільні" ситуації, від яких невигідно відхилятись. Основним прикладом стабільної домовленості є домовленість, що базується на рівновазі Неша. Її стабільність забезпечується взаємним незнанням остаточних стратегічних виборів.

6.1. Сильна рівновага Неша

<u>*Означення.*</u> Для гри $G=\left(X_i,u_i,i\in N\right)$ ситуація x^* є *сильною рівновагою* Неша, якщо не існує коаліції гравців, для яких було б вигідно відхилятись від даної ситуації у випадку, коли доповнювальна коаліція не реагує на відхилення: $\forall\, T\subset N$, $\forall\, x_T\in X_T$ несумісна система нерівностей:

$$u_i\left(x_T,x^*_{N\setminus T}\right)\ge u_i\left(x^*\right), \forall i\in T;\ \exists j\in T:\ u_j\left(x_T,x^*_{N\setminus T}\right)>u_j\left(x^*\right). \tag{8}$$

Множину сильних рівноваг у грі *G* позначатимемо через *SNE(G)*. Ця множина може бути порожньою.

Покладаючи у формулах (8) $T=\{i\},\ i\in N$, маємо, що сильна рівновага Неша є просто рівновагою Неша, тобто $SNE(G)\subseteq NE(G)$. Покладаючи *T=N*, отримуємо, що сильна рівновага є Парето–оптимальною (ефективною) ситуацією. Отже, для *n=2* сильні рівноваги Неша – це ефективні рівноваги Неша.

Інтерпретація властивості стабільності (8) базується на двохетапному процесі прийняття рішень. На першому етапі гравці приходять до домовленості про деяку конкретну ситуацію x^*. Далі обмін інформацією припиняється й кожен гравець самостійно приймає рішення про свою остаточну стратегію. Будь-який гравець $i\in N$ може відмовитись від використання стратегії x^*, але не може інформувати останніх про своє відхилення. Може бути також сформованою будь-яка коаліція *T*, яка відхиляється від x_T^* й вибирає x_T, але гравці поза даною коаліцією не можуть бути проінформовані про цю зміну, тому очікується, що вони будуть притримуватись стратегій з домовленості x_T^*.

6.2. Рівновага у спільних змішаних стратегіях

З кооперативної точки зору рівновага Неша у змішаних стратегіях є необов'язковою домовленістю, яка забезпечується тайною проведення лотерей, що організують гравці для випадкового вибору остаточного рішення.

<u>*Означення.*</u> Для гри $G=(X_i,u_i,i\in N)$ із скінченною множиною стратегій *спільною лотереєю* назвемо ймовірносний розподіл $L=(L(x))_{x\in X_N}$ на X_N. Для всіх $i\in N$ і для всіх $x_i\in X_i$ позначимо через L_{X_i} умовну ймовірність реалізації $x_{N\backslash i}\in X_{N\backslash\{i\}}$:

$$L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sum\limits_{y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} L\left(x_i, y_{N\setminus i}\right)}\cdot L\left(x_i, x_{N\setminus i}\right), \text{ якщо знаменник не дорівнює нулю,}\\ 0, \text{ якщо } L\left(x_i, y_{N\setminus i}\right)=0 \text{ для всіх } y_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}.\end{cases}$$

Скажемо, що L є *рівновагою у спільних змішаних* стратегіях у грі G, якщо виконані наступні нерівності:

$$\forall\, i\in N,\ \forall\, x_i, y_i\in X_i,\ \sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(x_i, x_{N\setminus i}\right) L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)\geq \sum_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right) L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right) \quad (9)$$

Позначимо через *CNE(G)* множину всіх рівноваг у спільних змішаних стратегіях у грі G.

Кооперативний сценарій, що слугує обґрунтуванням даного визначення, полягає у наступному. Гравці спільно будують випадковий датчик, котрий може реалізувати вибір ситуацій $x\in X_N$ з ймовірністю $L(x)$. Якщо реалізувалась ситуація x, то гравець i отримує інформацію лише про компоненту x_i. Далі кожен гравець вибирає вільно й незалежно, а також таємно, свою справжню стратегію. Сигнал x_i сприймається гравцем i як необов'язкова пропозиція зіграти x_i. Умови (9) означають, що виконання домовленості про вибір x_i гравцем i забезпечуються автоматично при тій же обмеженій інформації, котра доступна кожному гравцю. Дійсно, нехай гравцю i запропоновано використати стратегію x_i. Він робить висновок із загального розподілу L, що з ймовірністю $L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)$ набір $x_{N\setminus i}$ буде вибрано. Отже, $M\left(y_i, L_{x_i}\right)=\sum\limits_{x_{N\setminus i}\in X_{N\setminus\{i\}}} u_i\left(y_i, x_{N\setminus i}\right) L_{x_i}\left(x_{N\setminus i}\right)$ є математичним сподіванням його виграшу при використанні стратегії $y_i\in X_i$, якщо всі інші гравці згодні у виборі стратегій слідувати сигналу. Таким чином, умова (9) означає, що використання стратегії, що пропонується датчиком, є оптимальною відповіддю гравця i при заданому рівні інформації у припущенні, що всі інші гравці підкоряються сигналу.

Нехай стратегія x_i така, що $L(x_i, x_{N\backslash i}) = 0$ для всіх $x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash\{i\}}$, тобто ймовірність того, що стратегія x_i буде запропонована датчиком, дорівнює нулю. Для такої стратегії x_i умова (9) виконується тривіально, отже, система (9) переписується у еквівалентному вигляді:

$$\forall\, i \in N,\ \forall\, x_i, y_i \in X_i,\ \sum_{x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash\{i\}}} u_i(x_i, x_{N\backslash i}) L(x_{N\backslash i}) \geq \sum_{x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash\{i\}}} u_i(y_i, x_{N\backslash i}) L(x_{N\backslash i}). \quad (10)$$

Звідси випливає, що лотерея L є рівновагою у спільних змішаних стратегіях тоді й лише тоді, коли ці стратегії задовольняють системі лінійних нерівностей (10).

Означення. Для всіх $i \in N$ позначимо через $L_{N\backslash i}$ звуження розподілу L на $X_{N\backslash\{i\}}$: $L_{N\backslash i}(x_{N\backslash i}) = \sum_{x_i \in X_i} u_i(x_i, x_{N\backslash i})$ для $\forall\, x_{N\backslash i}$. Назвемо лотерею L слабкою рівновагою у спільних змішаних стратегіях у грі G, якщо виконані нерівності:

$$\forall i \in N,\ \forall y_i \in X_i,\ \sum_{x \in X_N} u_i(x) L(x) \geq \sum_{x_{N\backslash i} \in X_{N\backslash\{i\}}} u_i(y_i, x_{N\backslash i}) L_{N\backslash i}(x_{N\backslash i}).$$

6.3. Стабільність на основі погроз

Погроза може слугувати сильним механізмом кооперації. Для досягнення стабільності домовленості (наприклад, вибору рівноваги Неша) гравці об'являють деяку схему реагування на можливі відхилення інших. Оскільки гравцю, що відхилиться, може стати погано, якщо об'явлена погроза здійсниться, то він остережеться відхилятись, й необов'язкова домовленість виявиться стабільною. Таким чином, попередження є „розумним використанням потенціальної сили". Успішною є та погроза, яка ніколи не реалізується (Шеллінг [1970]).

Стабільні домовленості вимагають повної секретності у прийнятті рішень. У протилежність цьому погроза є ефективною тільки тоді, коли відхилення неможливо приховати. Отже, для досягнення стабільності на основі застережень потрібно, щоб усі індивідуальні вибори стратегій відбувались відкрито.

<u>*Означення.*</u> *Сценарієм попередження* у грі $G = (X_i, u_i, i \in N)$ називається набір $(x_i, \xi_{N \setminus i}, i \in N)$, де відображення $\xi_{N \setminus i} : X_i \to X_{N \setminus i}$ - *погроза* гравцю *i*, де

$$\xi_{N \setminus i}(x_i) = x_{N \setminus i}, \quad \forall y \in X_i \setminus \{x_i\}: \ u_i(y_i, \xi_{N \setminus i}(y_i)) \le u_i(x). \tag{11}$$

Проілюструємо сценарій попередження, розглядаючи гру на нескінченному інтервалі часу. У кожен конкретний момент часу кожен гравець вибирає деяку стратегію, причому він може поміняти свою стратегію у будь-який час. Гра відбувається у відкриту, тобто стратегії усіх гравців усім відомі. Це є головним інформаційним припущенням, котре робить неможливим таємне порушення договору.

Гравець, який виконує домовленість, спочатку вибирає узгоджену з іншими стратегію x_i і потім спостерігає за стратегіями $y_{N \setminus i}$ інших гравців. Поки $y_{N \setminus i} = x_{N \setminus i}$, гравець *i* зберігає стратегію x_i. Як тільки якийсь гравець, скажімо *j*, переключається на стратегію $y_j \neq x_j$, гравець *i* переключається раз і назавжди на *i* - ту компоненту $\xi_{N \setminus j}(y_j)$. Умова стабільності (11) означає, що якщо гравці виконують договір, що базується на сценарії попередження, то у жодного гравця не виникає приводу для одностороннього порушення домовленості. Справді, виграш на нескінченному інтервалі часу завжди перевищує виграш на будь-якому інтервалі скінченої довжини.

<u>*Означення.*</u> *Поділом* у грі $G = (X_i, u_i, i \in N)$ називається оптимальна за Парето індивідуально-раціональна ситуація.

Позначимо через *I(G)* множину поділів у грі *G*.

<u>*Означення.*</u> Для гри $G = (X_i, u_i; i \in N)$ α *– ядром* називається підмножина $C_\alpha(G)$ таких ситуацій x^*, що для будь-якої коаліції $T \subseteq N$ знай-

деться така погроза коаліції $N\backslash T$ проти потенційних відхилень коаліції T, що $\left(x^*, \xi_T; T \subseteq N\right)$ – коаліційний сценарій порушення, тобто не знайдеться коаліції $T \subseteq N$ й спільної стратегії $x_T \in X_T$, для котрих було б виконано:

$$u_i\left(x_T, \xi_{N\backslash T}\left(x_T\right)\right) \geq u_i\left(x^*\right) \text{ для } \forall\ i \in T,$$

$$u_j\left(x_T, \xi_{N\backslash T}\left(x_T\right)\right) > u_j\left(x^*\right) \text{ для деякого } j \in T.$$

Згідно визначення, ситуація x^* належить α – ядру, якщо будь-якому відхиленню x_T коаліції T може бути протиставлений хід $x_{N\backslash T}$ доповнювальної коаліції $N\backslash T$, який застерігає хоча б одного члена коаліції T від прийняття стратегії x_T, оскільки у цьому випадку цей гравець програє: $u_i\left(x_T, x_{N\backslash T}\right) < u_i\left(x^*\right)$ (або ж усі гравці коаліції отримують такий само виграш, як і раніше $u_i\left(x_T, x_{N\backslash T}\right) = u_i\left(x^*\right)$ для $\forall\ i \in T$).

Застосовуючи цю властивість до коаліцій $T=N$ й $T = \{i\},\ i \in N$, маємо, зокрема, що будь-яка ситуація у α – ядрі є також поділом: $C_\alpha(G) \subset I(G)$.

Відмітимо також, що оптимальна за Парето NE – ситуація також є поділом (разом з пасивною погрозою, що полягає у відсутності реакції, він утворює сценарій попередження). Сильна рівновага також міститься у α – ядрі: $NE(G) \cap PO(G) \subset I(G),\ SE(G) \subset C_\alpha(G)$.

Можна довести, що поділ x з α – ядра не обов’язково є сильною рівновагою. Тим не менш, з $SE(G) = \varnothing$ випливає $C_\alpha(G) = \varnothing$ і навпаки.

У грі з порожнім α – ядром кооперативна стабільність не може бути досягнутою лише за рахунок попереджувальних погроз, оскільки можливе існування коаліції, для якої відхилення є вигідним, не дивлячись на відповідні дії інших гравців. У цьому випадку для забезпечення стабільності можна ввести сценарій поведінки, у якому деякі гравці з коаліції „відступників” підкуповуються таким чином, щоб останні члени коаліції “відступників” понесли суттєві втрати.

<u>*Означення.*</u> β *– ядром* гри $G=(X_i,u_i;i\in N)$ називається множина $C_\beta(G)$ ситуацій x^*, що задовольняють наступній властивості. Для будь-якої коаліції $T\subset N$, існує спільна стратегія доповнювальної коаліції $x_{N\setminus T}\in X_{N\setminus T}$ така, що для $\forall\ x_T\in X_T$ не може бути виконаною наступна система нерівностей: $\begin{cases} u_i(x_T,x_{N\setminus T})\ge u_i(x^*) \text{ для } \forall i\in T, \\ u_j(x_T,x_{N\setminus T})> u_j(x^*) \text{ для деякого } j\in T. \end{cases}$

Стабільність ситуацій з β – ядра є більш сильною, ніж стабільність ситуацій з α – ядра. Коаліція *N\T* може попередити відхилення коаліції *T*, навіть якщо члени коаліції *T* вибирають свою спільну стратегію таємно. Порівнюючи наведені означення, маємо $SE(G)\subseteq C_\beta(G)\subseteq C_\alpha(G)$.

Для того, щоб дати інтерпретацію наведеним поняттям, уявимо, що гра $G(\infty)$ повторюється у часі. У момент *t, t=1,2,…*, кожен гравець *i*, знаючи попередні ходи $x^1,\ldots,x^{t-1}$, вибирає стратегію x_i^t. Виграш кожного гравця після зробленого ходу x^t:

$$u_i(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{s=1}^{t}u_i(x^s) \text{ („середнє Чезаро”).} \qquad (12)$$

Можна показати, що всі ситуації із змішаного β – ядра гри *G* можуть бути отриманими як сильні рівноваги у грі $G(\infty)$. Навпаки, виграші, що відповідають сильним рівновагам у грі $G(\infty)$, покривають опуклу оболонку виграшів, що відповідають змішаному β – ядру гри *G*. Таким чином, з допомогою гри, що повторюється, формалізується поняття кооперації із застосуванням погроз. Відхилення, тактично вигідні, стають невигідними стратегічно, якщо об’явлена погроза приводиться у виконання. Для цього необхідно, щоб довготривалі виграші завжди перевищували короткострокові (середнє Чезаро забезпечує виконання цієї умови).

Розглянемо більш простий варіант гри, що повторюється, у якій загальний виграш є „дисконтованою” сумою поточних виграшів.

Нехай у момент *t=1* розігрується гра *G* і реалізується ситуація x^1. Деякий випадковий механізм диктує або закінчити гру з ймовірністю $(1-\delta)$, $0<\delta<1$, або продовжити гру з ймовірністю δ і тоді гра *G* наново розігрується у момент *t=2*. Нехай гра *G* розігрується нескінченну кількість разів, тоді загальний виграш гравця $i \in N$ дорівнює:

$$u_i(\infty)=(1-\delta)\left(u_i(x^1)+\delta u_i(x^2)+\ldots+\delta^{t-1}u_i(x^t)+\ldots\right). \qquad (13)$$

Відомо, що при $\delta \to 1$ сума ряда (13) прямує до *середнього Чезаро* (12), якщо границя в (12) існує. Покладемо $\beta_i=\inf\limits_{x_{N\setminus i}}\sup\limits_{x_i}u_i(x)$ – максимальний виграш гравця *i*, який він може собі забезпечити при умові, що на момент вибору своєї стратегії він знає стратегії всіх інших гравців. Виберемо поділ x^* так, щоб виконувалась умова $\beta_i<u_i(x^*)$ для $\forall\, i\in N$.

Знайдемо *NE*– ситуацію σ^* у грі $G(\infty)$, яка дає кожному гравцю виграш $u_i(x^*)$. Для цього для кожного $j\in N$ виберемо стратегію $\tilde{x}_{N\setminus j}$ гравців $N\setminus\{j\}$ таку, що $\sup\limits_{x_j}u_j(x_j,\tilde{x}_{N\setminus j})=\beta_j$. Тоді для кожного $i\in N$ стратегія σ_i^* гравця *i* у грі $G(\infty)$ визначається наступним чином: $x_i^1=x_i^*$;

якщо $x^1=x^2=\ldots=x^{t-1}=x^*$, то $x_i^t=x_i^*$;

якщо $x^1=x^2=\ldots=x^{t-2}\neq x^{t-1}$, вибрати *j*, для якого $x_j^{t-1}\neq x_j^*$, й далі вибирати $\tilde{x}_i=x_i^t=x_i^{t+1}=\ldots$ для всіх $i\in N\setminus\{j\}$.

Нехай $u_i^*(x_{N\setminus i}^*)=\sup\limits_{x_i}u_i(x_i,x_{N\setminus i}^*)$, тоді „короткостроковий” дохід гравця *i* у момент *t* за рахунок відхилення від стратегії x_i^* дорівнює $\Delta_i=u_i^*(x_{N\setminus i}^*)-u_i(x^*)$. Порівнюючи його з „довгостроковими” втратами

$\varepsilon_i = \sum_{t=1}^{\infty} \delta^t \left(u_i \left(x^* \right) - \beta_i \right)$, отримуємо „умову стабільності”: $\Delta_i \le \varepsilon_i$, яка еквівалентна умовам:

$$1 - \delta \le \frac{u_i \left(x^* \right) - \beta_i}{u_i \left(x^*_{N \setminus i} \right) - \beta_i}, \ i \in N. \tag{14}$$

Таким чином, якщо δ є досить близьким до 1, умови (14) виконуються, і, отже, σ^* є NE – ситуацією гри $G(\infty)$.

<u>*Означення.*</u> γ *– ядро* гри двох осіб $C_\gamma(G)$ складається з таких поділів x^*, для котрих існує сценарій $\left(x^*, \xi_1, \xi_2 \right)$, де погрози ξ_i, *i=1,2*, є попередженнями:

$$\forall x_j \ne x_j^* \ \begin{cases} u_j \left(x_j, \xi_i \left(x_j \right) \right) \le u_j \left(x^* \right), \\ u_i \left(x_j, \xi_i \left(x_j \right) \right) = \sup\limits_{x_i} u_i \left(x_j, x_i \right). \end{cases}$$

<u>*Означення.*</u> Нехай $\left(x^*, \xi_1, \xi_2 \right)$ – сценарій попередження гри *G*. Погроза називається гарантованою, якщо її реалізація не приносить втрат гравцю, що погрожує:

$$u_1 \left(x_1, \xi_2 \left(x_1 \right) \right) \le u_1 \left(x^* \right) \le u_1 \left(\xi_1 \left(x_2 \right), x_2 \right),$$

$$u_2 \left(\xi_1 \left(x_2 \right), x_2 \right) \le u_2 \left(x^* \right) \le u_2 \left(x_1, \xi_2 \left(x_1 \right) \right), \forall x_1, x_2.$$

Тоді g *– ядром* гри *G* називається множина $C_g(G)$ таких ситуацій x^*, для яких існує хоча б один гарантований сценарій попередження $\left(x^*, \xi_1, \xi_2 \right)$.

VII. ІГРИ У ХАРАКТЕРИСТИЧНІЙ ФОРМІ

В кооперативних іграх доцільно розглядати виграші не лише для окремих гравців (індивідуальні корисності), і не лише для всієї спільноти N (колективна функція корисності, наприклад, утилітарна чи егалітарна), але й для кожної коаліції гравців (не порожньої підмножини) з N.

Нехай $N = \{\overline{1,n}\}$ – множина потенційно можливих споживачів об'єкта колективного користування. Кожен споживач може або обслуговуватись або ні, наприклад, він або отримує телефон, або ні, підключається до центрального водопостачання або ні і т.д. Витрати на обслуговування коаліції гравців S, $S \subseteq N$, підсумовуються у загальну функцію витрат $c(S) \geq 0$, де $c(S)$ – мінімальні витрати на обслуговування коаліції гравців S найбільш ефективним способом. Необхідно обслужити всіх гравців й поділити відповідні витрати, тобто визначити вектор $x = (x_i)_{i \in N}$ такий, що $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$. Зокрема, для деякого j може бути, що $x_j = 0$ (j- й гравець не несе жодних витрат), для деякого k, $x_k < 0$ (k-му гравцю „доплачують").

„*Принцип відокремлення*" говорить, що будь-яка коаліція не заплатить ціну, що є більшою за витрати, які вона понесе, якщо захоче обслуговуватись самостійно:

$$\forall S \subseteq N : \sum_{i \in S} x_i \leq c(S). \tag{15}$$

Означення. Будемо говорити, що задана кооперативна гра у *характеристичній формі* (N, c), якщо задано $N = \{1, \ldots, n\}$ – множину гравців й функцію витрат c, котра зв'язує з кожною коаліцією $S \subseteq N$ її витрати $c(S) \geq 0$.

Означення. *Ядром* гри (N, c) називається розподіл витрат $x = (x_i)_{i \in N}$,

$\sum_{i \in N} x_i = c(N)$, що задовольняє умові (15).

Принцип відокремлення можна переписати у еквівалентній формі у вигляді „принципу відсутності субсидій”: ніяка коаліція не повинна платити менше, ніж додаткові витрати на її обслуговування (різниця у витратах у коаліції й без неї):

$$\forall S \subseteq N: \sum_{i \in S} x_i \geq c(N) - c(N \setminus S). \qquad (16)$$

Оскільки $\sum_{i \in N} x_i = c(N)$, то з (15):

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \sum_{i \in N} x_i - c(N \setminus S) \Leftrightarrow c(N \setminus S) \geq \sum_{i \in N \setminus S} x_i .$$

Якщо розглядається кооперативна гра (N, v) по розподілу прибутку, то у формулах (15), (16) необхідно відповідно поміняти знаки.

Необхідною умовою непорожності ядра у грі (N, c) є властивість *субадитивності*: якщо коаліції $S_1, \ldots, S_k$ утворюють розбиття максимальної коаліції ($S_i \bigcap S_j = \varnothing, i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} S_i = N$), то $\sum_{i=1}^{k} c(S_i) \geq c(N)$.

Необхідною й достатньою умовою непорожності ядра гри (N, c) є суттєве підсилення властивості субадтивності.

Означення. Збалансованим покриттям N є таке відображення δ з $2^N \setminus \{N\}$ (множина власних коаліцій) у [0,1], що $\sum_{S: i \in S} \delta_S = 1, \forall i \in N$, де сума береться по всіх власних коаліціях, яким належить гравець i.

Розглянемо вибір розподілу, що відповідає принципу утилітаризму. У ньому доля прибутку кожного гравця у суспільстві (у розподілі $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$) залежить від його „внеску” у прибуток кожної коаліції, тобто від величини ($v(S \bigcup i) - v(S)$), $i \notin S$ (прибуток коаліції S з гравцем i та без нього, так званий „маргінальний прибуток” гравця i).

<u>*Означення.*</u> Для гри (N,v) *вектором Шеплі* σ називається наступний розподіл прибутку максимальної коаліції $v(N)$:

$$\sigma_i = \sum_{0\le s\le n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{S\subseteq N\setminus i, |S|=s} (v(S\cup i)-v(S)),\ i=\overline{1,n},\ \text{де } 0!=1,\ v(\varnothing)=0. \quad (17)$$

Змістовно формула (17) пояснюється таким чином. Нехай гравці з N упорядковані $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ випадково з рівною ймовірністю для кожного упорядкування. Вага внеску i-го гравця у коаліцію S відповідає ймовірності того, що у черзі $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ перед гравцем i стоять в точності елементи з множини S. Ця ймовірність, очевидно, дорівнює $s!(n-s-1)!/n!$, де $s=|S|$. Для перевірки умови $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = v(N)$ скористаємось ймовірносною інтерпретацією вектора Шеплі. Для будь-якого даного порядку, скажімо $(1,\ldots,n)$, вектор маргінальних внесків x дорівнює: $x_1 = v(1)$, $x_i = v(\{1,\ldots,i\}) - v(\{1,\ldots,i-1\})$, $i=\overline{2,n}$. Таким чином, рівність $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ виконується для кожного вектора маргінальних внесків, від яких береться середнє, отже, $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = v(N)$.

В якості альтернативи перевіримо рівність $\sum_{i=1}^{n}\sigma_i = v(N)$ безпосередньо з формули (17). Зафіксуємо довільну власну коаліцію S й підрахуємо її коефіцієнт: $s\left(\frac{(s-1)!(n-(s-1)-1)!}{n!}\right)-(n-s)\left(\frac{s!(n-s-1)!}{n!}\right)=0$, коефіцієнт же при $v(N)$ дорівнює $n\left(\frac{(n-1)!0!}{n!}\right)=1$.

Для гри (N,c) розподілу витрат у формулах (17) замість v необхідно підставити c.

Розглянемо гру (N,v) трьох осіб. Формула (17) для $i=1$ приймає вигляд: $\sigma_1 = \frac{1}{3}v(1) + \frac{1}{6}(v(1,2) - v(2)) + (v(1,3) - v(3)) + \frac{1}{3}(v(N) - v(2,3)) =$

$$= \frac{1}{3}v(N) + \frac{1}{6}(v(1,2) + v(1,3) - 2v(2,3)) + \frac{1}{6}(2v(1) - v(2) - v(3)).$$

Аналогічно, заміною індексу $i = 1$ на $i = 2,3$ отримуємо σ_2 й σ_3.

<u>*Означення.*</u> Кооперативна гра (N, v) називається *опуклою*, якщо вона задовольняє одній з двох еквівалентних умов ($v(\varnothing) = 0$):

1. $\forall i \in N$, $\forall S,T \subseteq N \setminus \{i\}$: $(S \subseteq T) \Rightarrow (v(S \bigcup i) - v(S) \le v(T \bigcup i) - v(T))$;
2. $\forall S,T \subseteq N$: $v(S) + v(T) \le v(S \bigcup T) + v(S \bigcap T)$.

В опуклих іграх вектор Шеплі займає „центральне положення” у ядрі, оскільки ядро опуклої гри є опуклою оболонкою векторів маргінальних внесків.

<u>*Означення.*</u> *Оператором значення* гри (N, v) є відображення φ із E^{2^N} у E^N, що ставить у відповідність кожній грі (N, v) розподіл $\varphi(v)$ величини $v(N)$: $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$.

<u>*Означення.*</u> Оператор значення $\varphi(v)$ гри (N, v) задовольняє „*аксіомі анонімності*”, якщо він комутує з перестановкою гравців, тобто для довільної біекції τ множини N у себе і $\forall v \in E^{2^N}$ має місце рівність $\tau(\varphi(v)) = \varphi(\tau(v))$, де $\tau(v)(S) = v(\tau(S))$, при $S \subseteq N$; $\tau(x)_i = x_{\tau(i)}$, при $x \in E^N$.

<u>*Означення.*</u> Оператор значення φ гри (N, v) задовольняє „*аксіомі адитивності*”, якщо $\forall v, w \in E^{2^N}$: $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$.

<u>*Означення.*</u> Оператор значення φ гри (N, v) задовольняє „*аксіомі бовдура*”, якщо $\forall i \in N$, $\forall v \in E^{2^N}$: $\{v(S \bigcup i) = v(S), \forall S \subseteq N \setminus i\} \Rightarrow \varphi_i(v) = 0$.

<u>*Означення.*</u> Оператор значення φ гри (N, v) задовольняє аксіомі *маргінальності*, якщо $\varphi_i(v)$ залежить лише від вектора $(v(S \bigcup i) - v(S))_{S \subseteq N \setminus i}$

тобто: $\forall v, w \in E^{2^N}$, $\{v(S \bigcup i) - v(S) = w(S \bigcup i) - w(S),\ \forall S \subseteq N \setminus i\} \Rightarrow$ $\varphi_i(v) = \varphi_i(w)$, $\forall i \in N$, де $v(\varnothing) = w(\varnothing) = 0$.

Означення. Лексимінний оптимум $\gamma = (\gamma_i)_{i \in N}$ на множині векторів $e(x) = \left(e(x,S) \equiv \sum_{i \in S} x_i - v(S) \right)_{S \subset N}$ таких, що $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$, називається N-*ядром* гри (N, v).

Величина $e(x,S)$ називається *ексцесом*, це по суті „наддохід” коаліції S у порівнянні з її власними можливостями. Ексцеси різних коаліцій порівнюються егалітарно. У першу чергу, розглядається мінімальний прибуток, який максимізується. Вектор ексцесів $e(\gamma)$ максимізує на множині розподілів x, $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$, егалітарну функцію колективної корисності при умові, що корисність кожної коаліції вимірюється її ексцесом:

$$\min_{S \subset N} \left(\sum_{i \in S} \gamma_i - v(S) \right) = \max_{x:\, \sum_{i \in N} x_i = v(N)} \left\{ \min_{S \subset N} \left(\sum_{i \in S} x_i - v(S) \right) \right\}. \qquad (18)$$

Далі серед розв’язків (18) N-ядро вибирає такий розподіл, при якому максимального значення досягає другий за мінімальністю коаліційний прибуток. У кінцевому результаті такий процес приводить до єдиного розподілу, яке і є N-ядром.

Відмітимо, що коли ядро гри (N, v) непорожнє, то всі розв’язки задачі (18) йому належать. Дійсно, якщо розподіл x належить ядру, то $\min_{S \subset N} e(x,S) \geq 0$. Тоді будь-який розв’язок (18) задовольняє цій нерівності, що і свідчить про належність його ядру.

Навіть для гри трьох осіб не так легко привести загальну формулу для N-ядра. „Геометрично” N-ядро займає „центральну” позицію всередині ядра гри.

Серйозним недоліком N-ядра є його немонотонність по відношенню до прибутку максимальної коаліції. Якщо деякі гравці страждають у результаті покращення загальної ситуації, то вони можуть відмовитись від участі у максимальній коаліції і тим самим зробити неможливим покращення ситуації (якщо при зростанні бюджету прибуток деяких членів суспільства падає, то вони будуть не зацікавлені в його зростанні, тобто покращенні добробуту всього суспільства у цілому).

Отже, використання принципу „справедливості" (егалітаризму) у розподілі благ приводить у результаті до „несправедливості" у їх отриманні.

VIII. МЕХАНІЗМИ КОЛЕКТИВНОГО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

При поділі витрат на виробництво неподільного суспільного продукту (наприклад, мосту) маються лише дані про загальні витрати на його будівництво й доходи, які кожен гравець має від експлуатації цього об'єкта. Іншою інтерпретацією моделі поділу витрат є розрахунок при банкротстві фірми. Кожен гравець має виражену у грошах претензію на її власність, але вся власність фірми виявляється меншою за суму претензій. Проблема полягає у тому, щоб поділити власність між кредиторами.

Задача поділу прибутку полягає у тому, що необхідно поділити виручку від неподільного кооперативного заходу, наприклад, футбольного матчу, між його учасниками – футболістами, тренерами, лікарями. Правило поділу повинно базуватись на оцінці „ринкової вартості” кожного гравця, що враховує його повні витрати (які дорівнюють, наприклад, його зарплаті). Нехай гонорар від матчу перевищує суму повних витрат. Як він повинен бути розподіленим між учасниками?

8.1. Модель поділу прибутку

Об'єднання з n гравців отримують від кооперації дохід $r > 0$. Повні витрати гравця i дорівнюють $c_i > 0$. Нехай кооперація прибуткова, тобто $\sum_{i=1}^{n} c_i < r$. Як поділити дохід r?

Перший принцип розподілу доходу r – індивідуальна раціональність. Кожен гравець повинен отримати не менше своїх повних витрат, інакше він не буде кооперуватись. Після цих виплат залишається прибуток $s = r - \sum_{i=1}^{n} c_i$, який потрібно поділити.

Оскільки прибуток отримується від кооперації гравців, то всі вони мають права на нього і чому б не вважати ці права рівними (ми не маємо інформації про внесок окремого гравця або коаліції гравців в отримання прибутку). Отже, при „егалітарному” розв’язку доля i-го гравця $y_i = c_i + s/n$.

Звичайно, гравець, у якого повні витрати перевищують середній рівень, може не погодитись з такою аргументацією. Необхідно розглядати, скаже він, повні витрати як фактори процесу виробництва, у якому дохід є результатом. На одиницю повних витрат дістається $r/\sum_{i=1}^{n} c_i$ одиниць доходу і справедливим буде розподілити дохід пропорційно участі кожного, яка оцінюється індивідуальними витратами c_i. Тобто кожен отримує $y_i = c_i(r/\sum_{j=1}^{n} c_j)$, $i = \overline{1,n}$. Отже, маємо „пропорційний” розв’язок, який також є результатом застосування егалітарного принципу – віддача на одиницю індивідуальних витрат для всіх однакова. Але пропорційний поділ теж не позбавлений недоліків.

8.2. Модель поділу витрат

Колективний об’єкт (міст) коштує $c > 0$ й приносить дохід $b_i \geq 0$ кожному з його користувачів $i = \overline{1,n}$. Будівництво об’єкта ефективне: $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$.

Формально ця модель є симетричною попередній моделі поділу прибутку, якщо розглядати b_i як повні витрати гравця i, а $s = \sum_{i=1}^{n} b_i - c$ як спільний прибуток. Але змістовна інтерпретація моделі поділу прибутку дасть нам нові принципи прийняття рішень.

При пропорційному розв’язку кожен гравець платить $x_i = b_i(c\sum_{j=1}^{n} b_j)$,

$i=\overline{1,n}$. Відмітимо, що для $\forall i:\ 0 \le x_i \le b_i$ (ніхто не отримує субсидій й не платить більше за свій дохід).

Егалітарний принцип може застосовуватись двома способами: вирівнюванням частки витрат й вирівнюванням чистої економії на витратах. Розв'язок з „рівномірним розподілом витрат" приписує кожному гравцю витрати $x_i = c/n$, розв'язок з „рівним прибутком" (тобто $b_i - x_i = b_j - x_j = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right)/n$ для всіх i, j) приписує кожному гравцю витрати $x_i = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right)/n$. Очевидний недолік рівномірного розподілу витрат полягає у тому, що якийсь гравець, можливо, повинен буде заплатити більше за свій дохід (тобто $\exists k:\ x_k = \dfrac{c}{n} > b_k$). При вирівнюванні прибутку можлива ситуація, коли якийсь гравець отримує субсидію за споживання продукту (тобто $\exists k:\ x_k = b_k - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c\right)/n < 0$).

8.3. Оподаткування

Спробуємо модифікувати два останні принципи поділу, приймаючи нерівності $0 \le x_i \le b_i$, $i=\overline{1,n}$, у якості обмежень.

Означення. *Рівневий податок* – це (єдиний) розподіл витрат $(x_1,\ldots,x_n)$ у моделі розподілу витрат при $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$, що є розв'язком задачі:

$$(x_1,\ldots,x_n) \in A = \left\{ (y_1,\ldots,y_n) \middle| \sum_{i=1}^{n} y_i = c,\ 0 \le y_i \le b_i,\ \forall i \right\},$$

$$(b_1 - x_1,\ldots,b_n - x_n) LM (b_1 - y_1,\ldots,b_n - y_n),\ \forall y \in A,$$

де LM – лексимінний порядок на E^N.

Означення. *Подушний податок* – це (єдиний) розподіл витрат

$(x_1,\ldots,x_n) \in A$, що задовольняє умовам: $(x_1,\ldots,x_n) LM (y_1,\ldots,y_n)$, $\forall y \in A$.

Отже, рівневий податок вирівнює прибутки (чисті доходи) при обмеженнях $0 \le x_i \le b_i$, у той час, як подушний податок вирівнює витрати при тих же обмеженнях. Якщо частки витрат рівневого прибутку (рівномірний розподіл витрат) задовольняє цим обмеженням, то він співпадає з рівневим податком (подушним податком).

Єдиність обох розв'язків випливає з єдиності лексимінного оптимуму на опуклій множині $A \subset E^n$.

„Податкова" термінологія належить Янгу [1987], котрий інтерпретував неподільний суспільний продукт як послуги, що надаються збирачем податків. Дохід гравця i до сплати податків дорівнює b_i, а його дохід після сплати податків дорівнює $b_i - x_i$. Таким чином, c – необхідна загальна сума податків (бюджет збирача податків).

Рівневий й подушний податки можна легко обчислити за допомогою наступного параметричного представлення.

Теорема. Для задачі розподілу витрат $(b_1,\ldots,b_n;c)$, $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$, подушний податок обчислюється із розв'язку наступного рівняння відносно параметра $\lambda \ge 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = c \;\Rightarrow\; x_i = \min\{\lambda, b_i\}. \tag{19}$$

Рівневий податок обчислюється із розв'язку наступного рівняння відносно $\lambda \ge 0$: $\sum_{i=1}^{n} \min\{\lambda, b_i\} = \sum_{i=1}^{n} b_i - c \;\Rightarrow\; x_i = b_i - \min\{\lambda, b_i\}$.

Знайдемо явний вираз для подушного й рівневого податку при $n = 2$. Нехай $b_1 < b_2$, розглянемо три випадки: 1) $\lambda \le b_1$; 2) $b_1 < \lambda \le b_2$ й 3) $b_2 < \lambda$.

За формулою (19) для першого випадку маємо: $\lambda + \lambda = c \;\Rightarrow$

$\lambda = c/2 \le b_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = c/2$ при $0 \le c \le 2b_1$; для другого: $b_1 + \lambda = c \Rightarrow b_1 < \lambda = c - b_1 \le b_2 \Rightarrow x_1 = b_1$, $x_2 = c - b_2$, при $2b_1 < c < b_1 + b_2$;

Для третього: $b_1 + b_2 = c$, що суперечить умові задачі.

Аналогічно отримуємо для рівневого податку:

$\lambda = b_2 - c$, $x_1 = 0$, $x_2 = c$, при $0 \le c \le b_2 - b_1$;

$\lambda = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - c)$, $b_1 - x_1 = b_2 - x_2 = \frac{1}{2}(b_1 + b_2 - c)$, при $b_2 - b_1 \le c < b_1 + b_2$.

Бачимо, що подушний податок співпадає з рівномірним розподілом витрат для малих значень c, а рівневий податок співпадає з рівним прибутком для великих значень c. Ця властивість зберігається і для довільного n. Якщо кожне b_i додатне та $c/n \le \min\{b_j\}$, то подушний податок $x_i = c/n$, $i = \overline{1,n}$.

В той же час, якщо $\sum_{j=1}^{n} b_j - n \cdot \min\{b_j\} \le c \le \sum_{j=1}^{n} b_j$, то рівневий податок $x_i = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} b_j - c \right) / n$, $i = \overline{1,n}$.

Необхідність верхньої й нижньої границі на частки витрат ($0 \le x_i \le b_i$, $i = \overline{1,n}$) відповідають поняттю ядра у кооперативній грі, що описує повні витрати коаліцій наступним чином:

$$v(S) = \max\left(\sum_{i \in S} b_i - c, 0 \right), \tag{20}$$

тобто коаліція S може отримати прибуток за рахунок будівництва об'єкта й покриття повних витрат на нього (зокрема $v(S) = 0$, якщо $\sum_{i \in S} b_i \le c$).

Нехай $\sum_{i=1}^{n} b_i > c$. Вектор витрат $x = (x_i)_{i=\overline{1,n}}$ задовольняє принципу відокремлення для даної кооперативної гри тоді й лише тоді, коли вектор прибутків $y=(b_1-x_1,\ldots,b_n-x_n)$ належить ядру гри, тобто: $\sum_{i=1}^{n}x_i=c$, для $\forall S\subseteq N$: $\sum_{i\in S}(b_i-x_i)\ge v(S)\;\Leftrightarrow\;\sum_{i\in S}(b_i-x_i)\ge\max\left(\sum_{i\in S}b_i-c,0\right)=\sum_{i\in S}b_i-c\;\Leftrightarrow$ $\sum_{i\in S}x_i\le c$ і, враховуючи, що $\sum_{i\in S}x_i\le\sum_{i\in S}b_i\;\Leftrightarrow\;\sum_{i\in S}x_i\le\min\left(c,\sum_{i\in S}b_i\right)$.

Якщо взяти $S=\{i\}$, то з останньої нерівності випливає, що $x_i\le b_i$, для $\forall i$. Якщо взяти $S=N\setminus\{i\}$, то $\sum_{j\in S}x_j\le c-x_i\le\min\left(c,\sum_{j\in S}b_j\right)$. Якщо $c\le\sum_{j\in N\setminus\{i\}}b_j$, то $c-x_i\le c\;\Rightarrow\;x_i\ge 0$, для $\forall i$. Якщо $c\ge\sum_{j\in N\setminus\{i\}}b_j$, то $c-x_i\le\sum_{j\in N\setminus\{i\}}b_j\;\Rightarrow\;x_i\ge c-\sum_{j\in N\setminus\{i\}}b_j\ge 0$. Отже, умова $\{0\le x_i\le b_i$ для $\forall i\}$, еквівалентна умові належності вектора витрат x, $\sum_{i=1}^{n}x_i=c$, ядру кооперативної гри (N,c) з функцією витрат (20). Тому, пропорційний розподіл, що є подушним або рівневим податком, належить ядру гри (N,c) (20).

Оскільки ми звели задачу розподілу витрат до кооперативної гри, логічно знайти значення останньої у вигляді N - ядра та вектора Шеплі.

Теорема (Ауман, Машлер [1985]). N - ядро гри (20) відповідає наступним долям витрат (λ – параметр):

1) Якщо $c\le\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}b_i$: $\sum_{i=1}^{n}\min\left\{\lambda,\frac{b_i}{2}\right\}=c\;\Rightarrow\;x_i=\min\left\{\lambda,\frac{b_i}{2}\right\}$, $i=\overline{1,n}$;

2) Якщо $c\ge\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}b_i$: $\sum_{i=1}^{n}\min\left\{\lambda,\frac{b_i}{2}\right\}=\sum_{i=1}^{n}b_i-c\;\Rightarrow\;x_i=b_i-\min\left\{\lambda,\frac{b_i}{2}\right\}$, $i=\overline{1,n}$.

Вектор Шеплі гри (20) не має такої простої формули як N-ядро. Однак його „податкова” інтерпретація дозволяє його легко обчислити. Гравці намагаються втекти від збирача податків. Він ловить їх одного за одним у випадковому порядку (усі порядки рівноймовірні). Спіймані гравці платять повну суму своїх доходів, поки витрати не будуть покриті. Нехай порядок спіймання співпадає з порядком $(1,2,\ldots,n)$, витрати покриваються тільки після спіймання гравця $k+1$: $\sum_{j=1}^{k} b_j < c \le \sum_{j=1}^{k+1} b_j$. Тоді перші k гравців платять b_i, гравець $k+1$ платить $c - \sum_{i=1}^{k} b_i$, інші гравці не платять нічого.

Розглянемо моделі розподілу витрат й прибутку з аксіоматичної точки зору. Ці питання почали вивчатися в останні два десятиріччя.

<u>*Означення.*</u> Для даної спільноти $N = \{1,2,\ldots,n\}$ *механізмом розподілу витрат* називається відображення *x*, що ставить у відповідність кожній задачі $(b_1,\ldots,b_n;c)$, $\sum_{i\in N} b_i \ge c$, вектор часток витрат $x(b,c) = (x_i(b_1,\ldots,b_n;c))_{i\in N}$, для котрого $\sum_{i\in N} x_i(b,c) = c$.

<u>*Означення.*</u> Кажуть, що механізм розподілу витрат *децентралізується*, якщо частка $x_i(b,c)$ гравця $i \in N$ залежить від величини витрат *c*, його особистого доходу b_i і спільного доходу:

$$\sum_{i\in N} b_i : \; x_i(b,c) = t_i\left(b_i;\; \sum_{i\in N} b_i;\; c \right).$$

Отже, якщо механізм розподілу витрат децентралізується, то кожен гравець не повинен знати деталі розподілу витрат між партнерами. Необхідно знати лише повний (або середній) дохід.

Наслідком властивості децентралізованості є те, що для будь-якої коаліції *S* частка її витрат може бути обчислена за спільним доходом цієї коаліції та її доповненням: $\sum_{i\in S} x_i(b,c) = r_S\left(\sum_{i\in S} b_i;\; \sum_{j\in N\setminus S} b_j;\; c \right)$.

Теорема (Мулен [1985]). Нехай $n \ge 3$, тоді існує єдиний механізм розподілу витрат, який узгоджується з децентралізацією і належить до ядра ($0 \le x_i(b,c) \le b_i, \ \forall i, b, c$). Це пропорційний податок.

<u>*Означення*</u>. Механізм розподілу витрат задовольняє *аксіомі сумісності*, якщо для $\forall i, j, \ b, \ b', \ c, \ c'$ з умови $\{b_i = b_i', b_j = b_j'\}$ випливає $\{x_i(b,c) - x_i(b',c') - (x_j(b,c) - x_j(b',c')) \ge 0\}$. Тобто, якщо дохід двох гравців фіксований, а всі інші параметри задачі змінюються, то ці зміни повинні бути вигідними або невигідними одночасно для обох.

Усі розглянуті вище механізми розподілу витрат (пропорційний, подушний, рівневі податки та N - ядро) окрім вектора Шеплі, задовольняють аксіомі сумісності. Характеризацію цих методів (необхідні та достатні умови) одержимо приєднанням до аксіоми сумісності ще двох аксіом: анонімності (якщо поміняти індекс i на j, то частка x_i поміняється на x_j) та неперервності (частка витрат неперервне змінюється при зміні c).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

Список основної літератури

1. Волошин О. Ф. Теорія прийняття рішень: навч. посібн. / О. Ф. Волошин, С. О. Мащенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010. – 366 с.

2. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. – М.: Мир, 1985.-200 с.

3. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Методичні рекомендації до виконання практичних і лабораторних робіт з теорії прийняття рішень.- Київ: ВПЦ „Київський університет”,2001.-46с.

4. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: Аксиомы и модели. - М.: Мир. 1991.-464 с.

Список додаткової літератури

5. Макаров И.М., Виноградская Т.М и др. Теория выбора и принятия решений: Учебное пособие. -М.: Наука. 1982.-328 с.

6. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. – М.: Наука, 1978.-352 с.

7. Розен В.В. Цель – оптимальность – решение. – М.: Радио и связь, 1982. –168 с.

8. Мушик Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений. - М.: Мир. 1990.-206 с.

9. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений.- Москва:Логос,2000.-296с.

10. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето – оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука, 1982.-254 с.

11. Харшаньи Дж., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх. –СПб.: Экономическая школа, 2001.-424 с.

12. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. - М.: Наука, 1981.-206 с.

13. ArrowK. Social Choice and Individual Values,2nd ed.(1st ed.1951). New York:John Wiley.

14. Nash J.F. Equilibrium Points in n-Person Games//Proceedings of National Acadamy of Science (US).1950.N36.-P.48-49.

15. Михалевич В.С., Волкович В.Л. Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем.-Москва:Наука, 1982.-288с.

16. Воронин А.Н. и др. Векторная оптимизация динамических систем.-Київ: Техніка, 1999.-284с.

17. Хоменюк В.В. Элементы теории многоцелевой оптимизации.-Москва:Наука,1983.-125с.

18. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора.-Москва:Наука,1974.-256с.

19. Юдин Д.Б. Вычислительные методы теории принятия решений.-Москва:Наука,1989.-320с.

20. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами.-Моска:Наука,1976.-328с.