МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

СТИСЛИЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ

з курсу «*Вища математика*»
для студентів І-го курсу хімічного факультету

Частина 2

Вибрані розділи математичного аналізу

Ужгород-2015

Вища математика. Стислий конспект лекцій з курсу «Вища математика» для студентів 1-го курсу хімічного факультету. Частина 2. Вибрані розділи математичного аналізу / Розробник: Н.Е. Кондрук – Ужгород: УжНУ, 2015. – 48 с.

Рекомендовано до друку кафедрою кібернетики і прикладної математики ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол №10 від 12 червня 2015 року.

Рекомендовано до друку методичною комісією математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол №7 від 31 серпня 2015 року.

Рекомендовано до друку вченою радою математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол №11 від 19, 26 червня 2015 року.

Розробник:

Кондрук Н.Е., к.т.н., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики (ДВНЗ "Ужгородський національний університет").

Рецензенти:

Лошак М.С., старший викладач кафедри кібернетики і прикладної математики, провідний спеціаліст навчального відділу (ДВНЗ "Ужгородський національний університет") ;

Ніколенко В.В., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики (ДВНЗ "Ужгородський національний університет").

ЗМІСТ

ВСТУП

Курс «Вища математика» служить теоретичним і практичним фундаментом при вивченні всіх природничих навчальних дисциплін, які викладаються у вищих навчальних закладах.

Програма даного курсу складена у відповідності до сучасних програм Міністерства науки і освіти, молоді та спорту України. Водночас слід відмітити, що порядок викладання окремих розділів такий, що враховує специфіку слухачів-студентів напрямів підготовки - 6.070301 - Хімія, 6.040106 – Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування.

Мета навчальної дисципліни «Вища математика»: засвоєння теоретичного та практичного матеріалу з курсу «Вища математика» з метою застосування одержаних знань при вивченні всіх навчальних дисциплін даних спеціальностей.

Курс «Вища математика» читається протягом трьох семестрів, з яких перший та другий семестри закінчуються екзаменом, а третій - заліком.

Вивчення дисципліни потребує використання знань студентів з математики, набутих в загальноосвітній середній школі.

Основними завданнями, що мають бути вирішені у процесі викладання дисципліни, є надання студентам знань з основних розділів вищої математики; вивчення означень, теорем, методів та алгоритмів; доведення основних теорем; формування умінь самостійного опрацювання математичної літератури; розвиток логічного і алгоритмічного мислення.

Конспект лекцій з курсу «Вища математика» спрямований на полегшення само-підготовки студентів 1-го курсу хімічного факультету напрямів підготовки 6.040101 – Хімія, 6.040106 – Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування до виконання модульних контрольних робіт та складання екзамену.

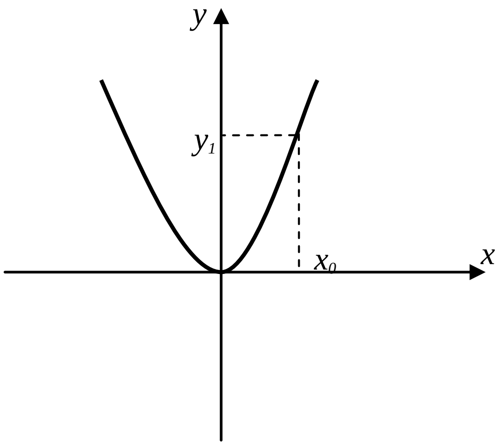
Структура курсу включає 6 змістових модулів. До даного конспекту лекцій включено основний теоретичний матеріал 2-го модуля 1-го семестру викладання: вибрані розділи математичного аналізу та робочу програму дисципліни.

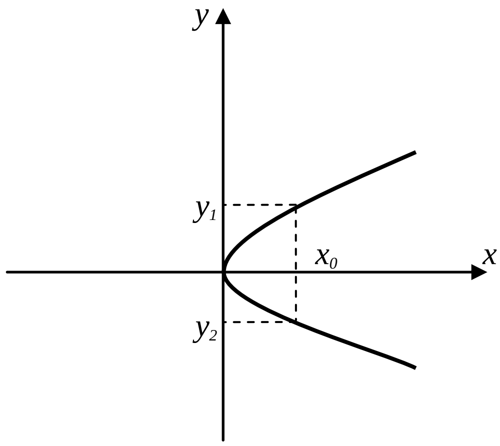
І. ВИБРАНІ РОЗДІЛИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1.1. Поняття функції

Область визначення функції

Змінна величина y називається функцією від змінної величини x, якщо будь-якому значенню x з деякої області ставиться у відповідність єдине значення y. Позначають $y = f(x)$, де x - аргумент або незалежна змінна, y - функція.





Т

Таким чином, згідно означення функції на рисунку зліва представлено графік функції, а на рисунку з права крива (бо існує точка x_0, якій відповідають два різні значення аргументів y_1 та y_2).

Множина всіх значень x, для яких функція існує називається областю визначення функції. Позначають $D(y)$.

Приклади. Знайти область визначення функцій:

1. $y = \dfrac{2x+9}{x^2-5x+6}$;

$D(y)$: $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Rightarrow D(y) = \{x \neq 2, x \neq 3\}$, *або* $D(y) = (-\infty,2) \cup (2,3) \cup (3,+\infty)$.

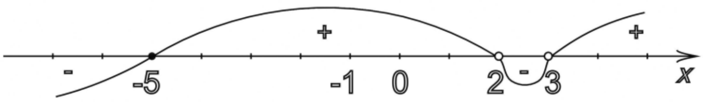
2. $y = \dfrac{2x+9}{x^2-5x+26}$;

Квадратний тричлен у знаменнику не має дійсних коренів, тобто не перетворюється в нуль, отже: $D(y) = (-\infty,+\infty)$.

3. $y = \sqrt{\dfrac{x+5}{x^2-5x+6}}$;

$D(y)$: $\dfrac{x+5}{x^2-5x+6} \geq 0$; Одержана нерівність рівносильна системі нерівностей:

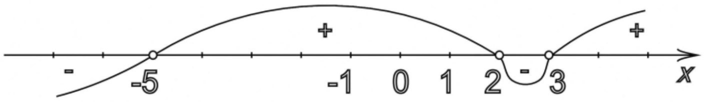
$$\begin{cases} (x+5)(x-2)(x-3) \geq 0, \\ x \neq 2, \\ x \neq 3. \end{cases}$$



Отже, область визначення: $D(y) = [-5;2) \cup (3;+\infty)$.

4. $y = \ln \dfrac{x+5}{x^2-5x+6}$;

$D(y): \dfrac{x+5}{x^2-5x+6} > 0$, звідки $(x+5)(x-2)(x-3) > 0$.



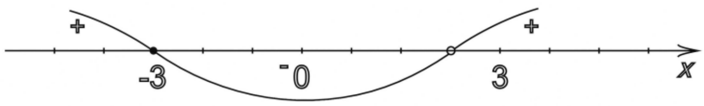
Отже, область визначення $D(y) = (-5;2) \cup (3;+\infty)$.

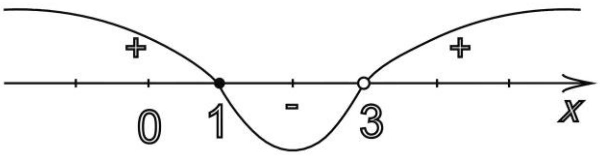
5. $y = \arcsin\dfrac{2x}{x-3}$;

Область визначення $D(y): \left|\dfrac{2x}{x-3}\right| \le 1$. Отримаємо систему: $\begin{cases} \dfrac{2x}{x-3} \le 1, \\ \dfrac{2x}{x-3} \ge -1 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{x-3} - 1 \le 0 \\ \dfrac{2x}{x-3} + 1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-x+3}{x-3} \le 0 \\ \dfrac{2x+x-3}{x-3} \ge 0 \end{cases}, \text{ або}$$

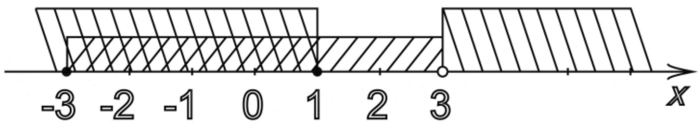
$$\begin{cases} \begin{cases} (x+3)(x-3) \le 0 \\ x \ne 3 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} 3(x-1)(x-3) \ge 0 \\ x \ne 3 \end{cases} \end{cases}$$





або

$$\begin{cases} -3 \le x < 3 \\ x \le 1 \\ x > 3 \end{cases}.$$



Таким чином, одержимо $D(y) = [-3;1)$

6. $y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-1}} + \arcsin\dfrac{2x}{x-3}$.

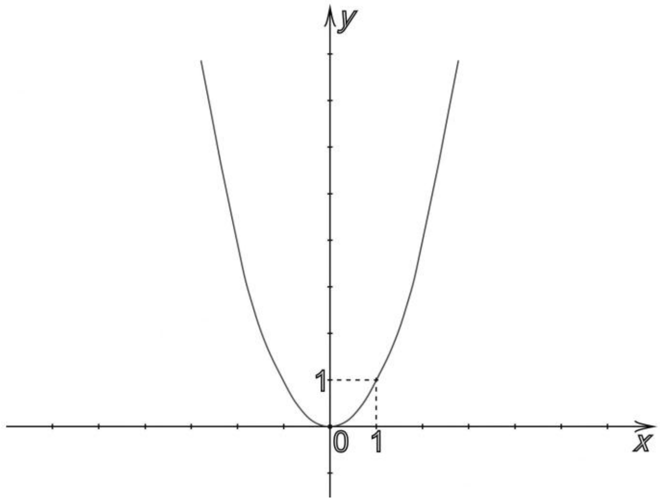
Із системи $\begin{cases} \dfrac{x+2}{x-1} \ge 0, \\ \left|\dfrac{2x}{x-3}\right| \le 1 \end{cases}$ та відповіді до попереднього прикладу отримаємо $D(y) = [-3;-2]$.

При знаходженні $D(y)$ потрібно враховувати:

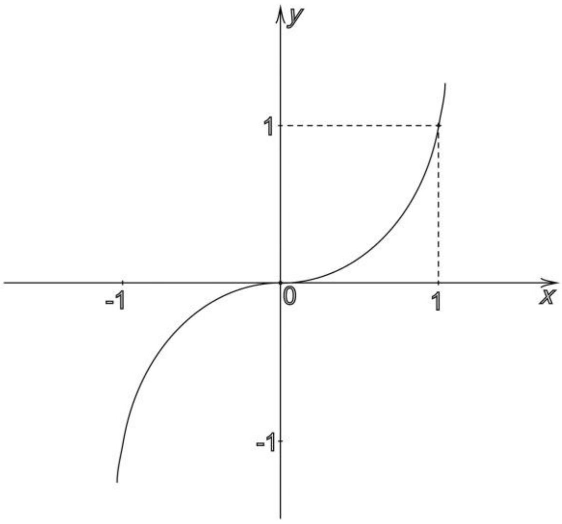
1) Знаменник функції не повинен дорівнювати нулю.
2) Підкореневий вираз (для кореня парного степеня) більший або рівний за нуль.
3) Вираз під знаком логарифма має бути більший за нуль.
4) Вираз під знаком $\arcsin$ *та* $\arccos$ за абсолютною величиною має бути менший або рівний за 1.
5) У випадку декількох доданків потрібно розв’язати систему із врахуванням попередніх зауважень.

Графіки деяких елементарних функцій

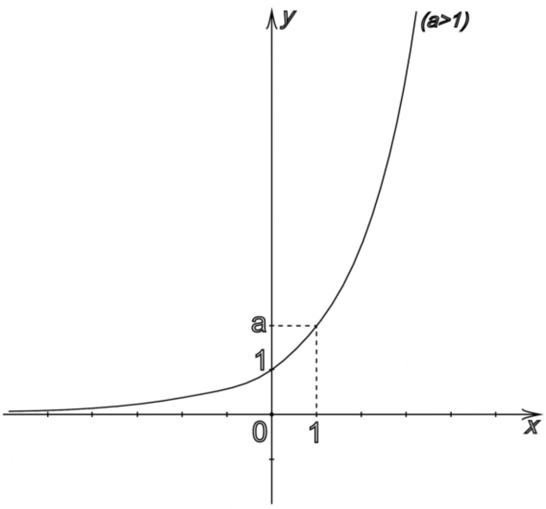
1) Степенева функція $y = x^2$

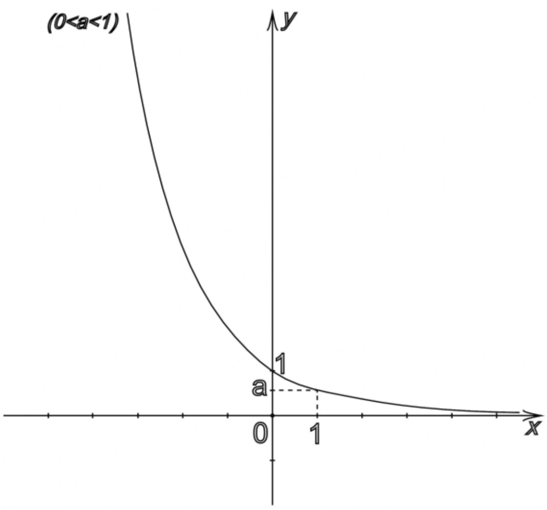


2) Степенева функція $y = x^3$

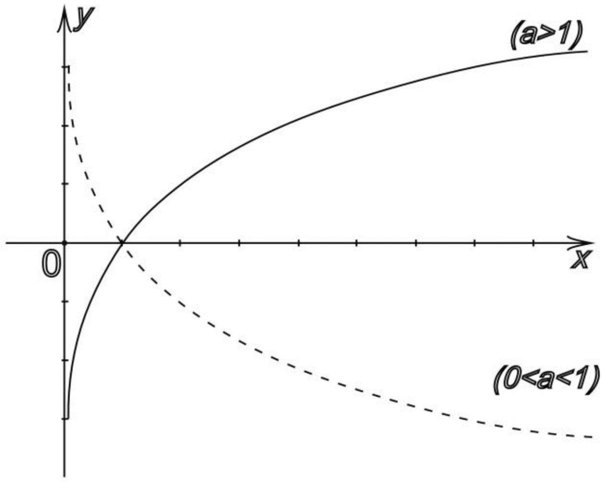


3) Показникова функція $y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$

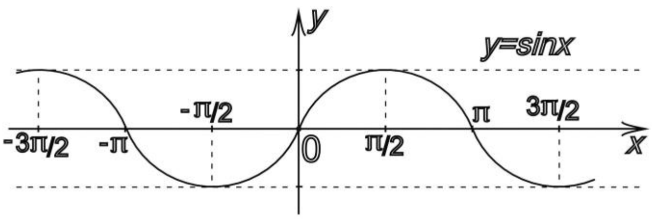


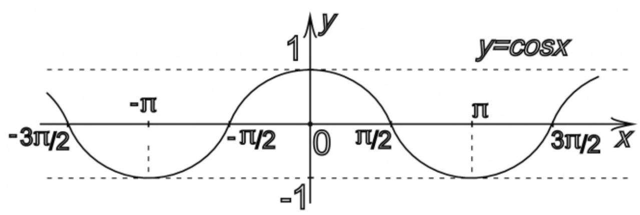


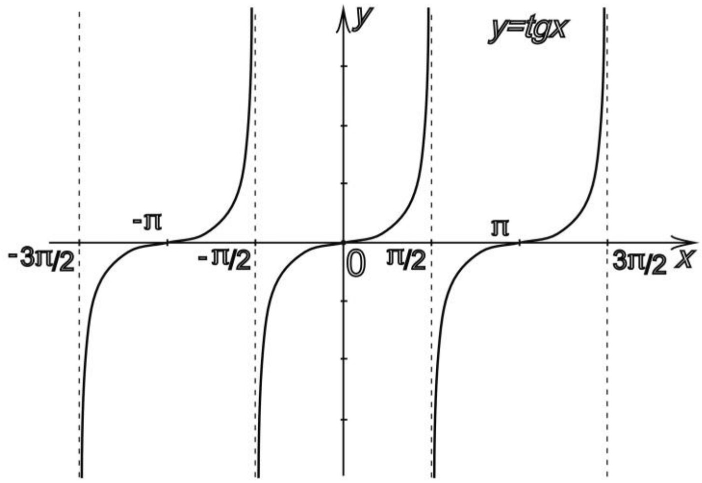
4) Логарифмічна функція $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$



5) Тригонометричні функції







1.2. Границя послідовності. Границя функції

Впорядкована сукупність чисел називається послідовністю, якщо кожен наступний її член шукається за певним законом.

Приклад. Записати послідовність, якщо її загальний член має вигляд $x_n = \dfrac{n+2}{3n^2+2}$.

$\frac{3}{5}; \frac{4}{14}; \frac{5}{29}; \ \ldots; \frac{n+2}{3n^2+2}; \ldots$

1. Число A називається **границею послідовності** x_n якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існує номер N, починаючи з якого виконується нерівність: $|x_n - A| < \varepsilon$. Даний факт записують наступним чином : $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)\ |\mathrm{x_n} - A| < \varepsilon.$

2. Число A називається **границею функції** $f(x)$**,** при прямуванні x до x_0, якщо для $\forall \varepsilon > 0$ існує таке додатне δ, що для всіх x, відмінних від x_0 і які задовольняють умову $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon.$

Коротко це записують наступним чином : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, причому

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\ \ 0 < |\mathrm{x} - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A,\ \ \textit{якщо}\,(\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta > 0)(\forall x)\ \ |x| > \Delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

Нескінченно малі та нескінченно великі величини

Нескінченно малою називається така змінна величина $\alpha(x)$, що границя її дорівнює нулю, при прямуванні x до x_0 або до ∞.

Якщо $\mathop{lim}\limits_{x\to x_0} \alpha(x) = 0,$то $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\ \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow\ |\alpha(x)| < \varepsilon$, або якщо

$\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0,$ то $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \Delta > 0)(\forall x)\ \ |x| > \Delta \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon.$

Функція $y = f(x)$ називається нескінченно великою, якщо її границя по модулю дорівнює нескінченності при прямуванні x до x_0 або до ∞. Якщо

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty,$ то $(\forall M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x)\ \ |\mathrm{x} - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M,$ або якщо

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty,$ то $(\forall M > 0)(\exists \Delta > 0)(\forall x)\ \ |x| > \Delta \Rightarrow |f(x)| > M.$

Теорема 1

Якщо функція $y = f(x)$ представлена у вигляді $y = b + \alpha(x)$, де b - деяке число, а $\alpha(x)$ - нескінченно мала величина, то $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} y = b.$ Обернене твердження також має місце,

тобто, якщо $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} y = b$, то $y = b + \alpha,$ де $\alpha -$ нескінченно мала.

Доведення.

З рівності $y = b + \alpha$ можна записати $|y - b| = |\alpha|$. Але для будь-якого $\varepsilon > 0$ всі значення α, починаючи з деякого, задовольняють нерівність $|\alpha| < \varepsilon$, отже, для всіх значень y, починаючи з деякого, буде виконуватись нерівність $|y - b| < \varepsilon.$ А це означає, що $\lim y = b$. Навпаки, якщо $\lim y = b$, то при довільному $\varepsilon > 0$ для всіх значень y, починаючи з деякого, буде виконуватися $|y - b| < \varepsilon.$ Якщо позначити $y - b = \alpha$, то $|\alpha| < \varepsilon.$ Це означає, що α є нескінченно малою.

Теорема 2

Якщо $\alpha(x)$ прямує до нуля при прямуванні x до x_0 (або до ∞) і не перетворюється в нуль, то $y = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ прямує до нескінченності, тобто є нескінченно великою величиною.

Обернена величина до нескінченно малої є нескінченно велика величина, і навпаки, обернена до нескінченно великої є нескінченно мала.

Теорема 3

Сума скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

Наслідок 1

Добуток скінченної кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

Наслідок 2

Добуток сталої на нескінченно малу є величина нескінченно мала.

Теорема 4

Границя відношення нескінченно малої до функції, границя якої відмінна від нуля, дорівнює нулю.

Основні теореми про границі

Теорема 1

Границя суми двох або декількох функцій дорівнює сумі границь цих функцій:
$\lim(U(x)+V(x)) = \lim U(x) + \lim V(x).$

Теорема 2

Границя добутку двох або декількох функцій дорівнює добутку границь цих функцій:
$\lim U(x)\cdot V(x) = \lim U(x)\cdot \lim V(x).$

Наслідок

Сталий множник можна винести за знак границі: $\lim cU(x) = c\lim U(x).$

Теорема 3

Границя відношення двох функцій дорівнює відношенню границь цих функцій, якщо границя знаменника відмінна від нуля:

$$\lim \frac{U(x)}{V(x)} = \frac{\lim U(x)}{\lim V(x)},\ \ \textit{при}\ \ \lim V(x) \neq 0.$$

При знаходженні границь інколи одержуються вирази, які називаються невизначеностями видів: $\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 0\cdot\infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$. Такі невизначеності розкриваються за допомогою деяких перетворень, застосуванням чудових границь або за правилом Лопіталя.

Чудові границі

1. Перша чудова границя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1,$

2. Друга чудова границя: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$ або в іншому вигляді: $\lim\limits_{\alpha\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$

Обчислення границь

Для того, щоб обчислити границю потрібно:

1) Підставити замість змінної її граничне значення;
2) На основі основних теорем про границі провести обчислення.

Приклади.

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+x+4}{2x^3+3} = \dfrac{3\cdot 4+2+4}{2\cdot 8+3} = \dfrac{18}{19}.$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^3+3}=\dfrac{4-10+6}{19}=0.$

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^3+3}{x^2-5x+6}=\left(\dfrac{19}{0}\right)=\infty.$

Зауважимо, що після підстановки граничного значення змінної у вираз, який стоїть під знаком границі, інколи отримується невизначеність. Розглянемо деякі випадки невизначеностей.

I. Границя відношення раціональних, або ірраціональних виразів при прямуванні x до ∞ дорівнює границі відношення старших членів цих виразів.

Приклади.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-7x^2+5x-4}{x^4+x^3+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4}{x^4}=5.$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)(x+2)(3x-1)}{x^4+x-11}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x\cdot x\cdot 3x}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{x}=0.$

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{15x+1\Big/x^3}{5x^2+1}-\dfrac{5x^2+1\Big/3x^2}{15x+1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{15x^4+x^3-15x^4-3x^2}{(5x^2+1)(15x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{5x^2\cdot 15x}=\dfrac{1}{75}.$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot\sqrt[3]{27n^3+n}+\sqrt[4]{16n^8+2n^4+3}}{(n+1)\sqrt{9n+2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\cdot 3n+2n^2}{n\cdot 3\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2}{3n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5\sqrt{n}}{3}=\infty.$

II. Для розкриття невизначеності типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ у випадку раціонального дробу при прямуванні x до x_0, потрібно розкласти чисельник і знаменник на множники з наступними скороченнями.

Приклад. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x-3}=\dfrac{4+4+4}{2-3}=-12.$

III. Для розкриття невизначеності типу $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ у випадку ірраціонального дробу при прямуванні x до x_0, потрібно позбутися від ірраціональності, там де вона є, з наступними скороченнями.

Приклади.

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(2x-8)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{1+2x}+3}=\dfrac{2(\sqrt{4}+2)}{\sqrt{1+8}+3}=\dfrac{2\cdot 4}{9}=\dfrac{8}{9}.$

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x+2}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{2x+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2(x-2)(x-\frac{1}{2})(\sqrt{2x+5}+3)}{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)(\sqrt{2x+5}+3)}{2x+5-9}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)(\sqrt{2x+5}+3)}{2x-4}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(2x-1)(\sqrt{2x+5}+3)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(2x-1)(\sqrt{2x+5}+3)}{2}=\dfrac{3\cdot(3+3)}{2}=9.$

Використання першої «чудової границі»

При знаходженні границь від тригонометричних виразів потрібно:

1) провести спрощення,
2) при потребі використати «чудову границю».

Приклади.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cdot\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\frac{x}{2}\cdot 2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{4}$. Тут враховано, що $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{tg7x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin 4x}{4x}\cdot 4x}{\frac{tg7x}{7x}\cdot 7x}=\dfrac{4}{7}$.

Застосування другої «чудової границі»

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ або $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha}=e$.

Приклади.

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{1}{3n}\right)^{-3n}\right]^{\frac{2n+1}{-3n}}=e^{-\frac{2}{3}}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{-3n}=-\dfrac{2}{3}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(2-\dfrac{1}{3n}\right)^{2n+1}=\infty$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3n}\right)^{2n+1}=0$

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4}{3x}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-5x)^{\frac{-1}{5x}}\right]^{-5x\frac{4}{3x}}=e^{-\frac{20}{3}}$

5) $\lim\limits_{x\to 0}(1-5x)^{\frac{4}{3x+5}}=1^{4/5}=1$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{\frac{2x+4}{5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{2x+4}{5}}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3}{3x-1}\right)^{\frac{3x-1}{3}}\right]^{\frac{3}{3x-1}\cdot\frac{2x+4}{5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x+4)}{5(3x-1)}}=e^{\frac{2}{5}}$.

7) $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3)(\ln(5n-1)-\ln(5n+4))=\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3)\ln\dfrac{5n-1}{5n+4}=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\dfrac{5n-1}{5n+4}\right)^{2n+3}=$

$=\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n-1}{5n+4}\right)^{2n+3}\right]=\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5n-1-5n-4}{5n+4}\right)^{2n+3}\right]=\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{5n+4}\right)^{2n+3}\right]=$

$=\ln\left[\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1-\dfrac{5}{5n+4}\right)^{-\frac{5n+4}{5}}\right]^{-\frac{5}{5n+4}(2n+3)}\right]=\ln e^{-2}=-2$.

1.3. Неперервність функції. Односторонні границі

Границя називається **лівосторонньою (**при прямуванні $x\to x_0$**)**, якщо змінна x залишається завжди зліва від x_0 і позначається $\lim\limits_{x\to x_0-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$.

Аналогічно дається означення правосторонньої границі : $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$.

Приростом змінної називається різниця між наступним і попереднім значенням змінної величини. Позначається:

$\Delta x = x_1 - x_0$

$\Delta y = y_1 - y_0$

Нехай дано функцію $y = f(x)$, яка визначена в т. $x = x_0$ та деякому околі цієї точки. Нехай змінній x надано приріст Δx ,тоді функція у набуде приросту Δy .

$f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta y$

$y + \Delta y = f(x+\Delta x)$

$f(x) + \Delta y = f(x+\Delta x)$

Нехай функція $y = f(x)$ визначена в деякій точці x_0 та її околі, тоді функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0 ,якщо нескінчено малому приросту змінної x_0 відповідає нескінчено малий приріст функції, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, звідки $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, або $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$, або $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$.

Теорема : Елементарні функції неперервні в кожній точці області визначення цих функцій.

Якщо функція $y = f(x)$ неперервна в кожній точці проміжку [a,b], то вона неперервна на цьому проміжку.

Класифікація точок розриву функцій

Означення неперервності функції можна записати у вигляді:

$y = f(x)$ є **неперервною в точці** x = x_0, якщо:

1. $\exists\ f(x_0)$
2. Існують скінчені лівостороння та правостороння границя цієї функції при $x \to x_0$:

$\exists \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x) = a$,

$\exists \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x) = b$.

3. Ці границі рівні між собою і дорівнюють значенню функцій в цій точці; тобто a = b= $f(x_0)$.

Якщо не виконується хоча б одна з цих умов, то кажуть, що функція в точці $x = x_0$ **має розрив,** а точка x = x_0 називається **точкою розриву.**

Якщо функція в точці x = x_0 є невизначеною, але існують скінчені лівобічна та правобічна границі функції, і вони рівні, то кажуть, що функція має *усувний розрив* (не виконується пункт 1).

Якщо існують скінчені лівостороння та правостороння границі функції, але вони не рівні, то функція має *точку розриву першого роду –скачок* (не виконується пункт 3).

Якщо або лівостороння, або правостороння, або обидві ці границі є нескінченими, то така точка є *точкою розриву другого роду,* функція має нескінчений розрив (не виконується пункт 2).

Приклади.

1) Функція $y = \frac{\sin x}{x}$ в точці $x = 0$ має усувний розрив. Відомо, що $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, тобто $\lim\limits_{x \to 0-} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Якщо записати

$y = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, x \neq 0 \\ 1, x = 0 \end{cases}$, то ця функція вже буде неперервною в точці $x = 0$, тобто розрив усунуто.

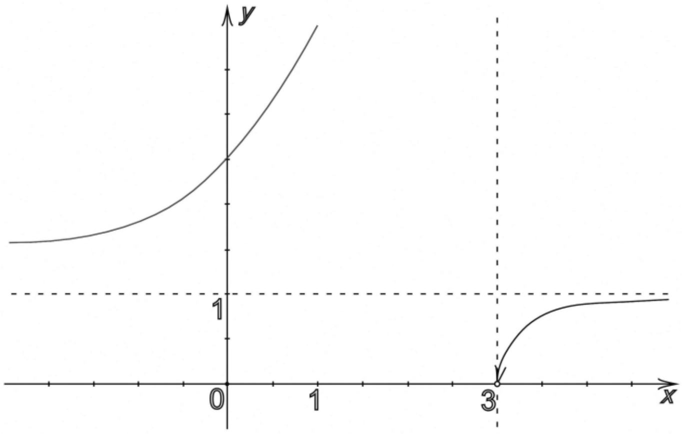
2) $y = 4^{\frac{2}{3-x}}$, $x = 3$ – точка розриву.

Дослідимо цю функцію на неперервність, для чого знайдемо односторонні границі:

$\lim\limits_{x \to 3-} 4^{\frac{2}{3-x}} = \infty$

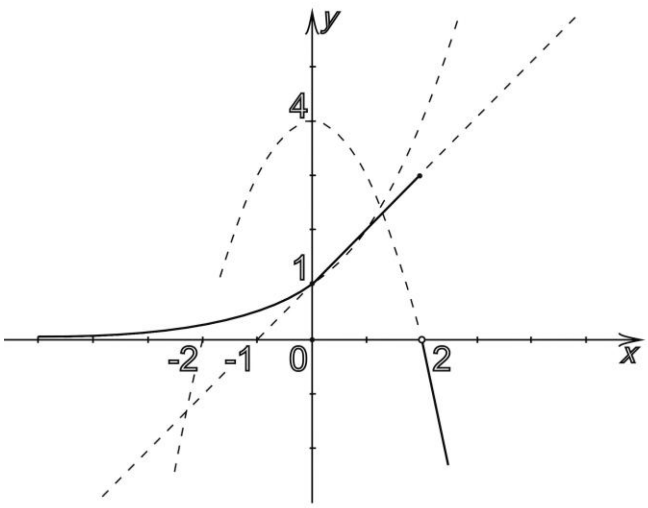
$\lim\limits_{x \to 3+} 4^{\frac{2}{3-x}} = 0$, бо „$4^{\frac{2}{-0}}$“=„$4^{-\infty}$“=„$\frac{1}{4^{\infty}}$“=„$\frac{1}{\infty}$“= 0

Отже $x = 3$ є точкою розриву другого роду. Щоб побудувати схематичний графік цієї функції, знайдемо границі $\lim\limits_{x \to \infty} 4^{\frac{2}{3-x}} = 1$, $\lim\limits_{x \to -\infty} 4^{\frac{2}{3-x}} = 1$.



3) Дослідити на неперервність функцію $y = \begin{cases} 2^x, x \le 0 \\ x+1, 0 < x \le 2 \\ 4 - x^2, x > 2 \end{cases}$.

Функція $y = 2^x$ є неперервною на всій числовій осі, отже і для $x \le 0$; $y = x+1$ теж є неперервна на проміжку (0;2), як і функція $y = 4 - x^2$ при $x > 0$. Дослідимо дану функцію на неперервність в точках стику $x = 0$ та $x = 2$. Для цього знайдемо $\lim\limits_{x \to 0-} 2^x = 1$, $\lim\limits_{x \to 0+} (x+1) = 1$. Одержимо $a = b = 1 = 2^0 = 1$, $a = b = f(0)$. Отже, в точці $x = 0$ функція є неперервною.

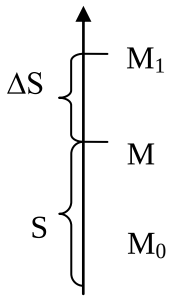


Знайдемо $\lim\limits_{x \to 2-} (x+1) = 3$, $\lim\limits_{x \to 2-} (4 - x^2) = 0$, бачимо, що a$\neq$ b, тому у точці розриву має місце розрив першого роду – скачок, величина скачка $\Delta = |0 - 3| = 3$.

1.4. Похідна функції

Фізичний зміст похідної функції

Розглянемо прямолінійний рух деякого твердого тіла, наприклад каменя, кинутого вертикально вгору, або рух поршня у циліндрі двигуна. Абстрагуючись від конкретних форм та розмірів тіла, будемо представляти це тіло у вигляді точки M .



Віддаль S точки, що рухається від початкового положення M_0 буде залежати від часу t, тобто S буде функцією від $t(S=S(t))$. Нехай в деякий момент часу t точка M знаходиться на відстані S від початкового положення M_0. А в деякий наступний момент $t+\Delta t$ вона виявиться у положенні M_1 на відстані $S+\Delta S$. Таким чином, за час Δt точка пройшла шлях ΔS. У цьому випадку кажуть, що за проміжок часу Δt величина S одержала приріст ΔS.

Відношення $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ дорівнює середній швидкості точки за час Δt. Через нерівномірність руху ця величина не може в усіх випадках охарактеризувати швидкість переміщення точки M в момент часу t, якщо спочатку точка рухалась досить швидко, а потім повільно. Для того, щоб точніше визначити істинну швидкість т. M, потрібно брати якомога менше значення Δt. Отже, найбільш повно швидкість(V) описується границею $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$.

$\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$; $V = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$.

Дамо означення похідної.

Нехай функція $y=f(x)$ є неперервною в деякій області.

Тоді, якщо існує границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, то ця границя називається ***похідною*** функції і позначається $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{y(x+\Delta x)-y(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Фізичний зміст похідної: $V = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$, $V = S'(t)$.

Швидкість – це похідна від шляху по часу.

Диференційованість функції

Якщо функція $y=f(x)$ в точці $x=x_0$ має похідну, то кажуть, що вона ***диференційована в точці*** x_0.

Якщо функція $y=f(x)$ має похідні в кожній точці інтервалу (a;b), то кажуть, що вона ***диференційована на інтервалі (a;b).***

Теорема: Якщо функція $y=f(x)$ є диференційованою в точці $x=x_0$, то вона є неперервною в цій точці.

Обернене твердження не є вірним.

Доведення: Якщо функція $y=f(x)$ є диференційованою в точці $x=x_0$, то існує границя $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'$. Тоді за теоремою 1 про границі одержимо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, де α - нескінченно мала величина , а $\Delta y = y'\cdot\Delta x + \alpha\cdot\Delta x$.Тоді $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(y'\Delta x + \alpha\cdot\Delta x) = 0$.

Якщо $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$, то функція є неперервною. Теорема доведена.

Для того, щоб довести, що обернене твердження не має місця, достатньо розв'язати наступні приклади.

1) $y=\begin{cases}2x, x\le 1\\ x+1, x>1\end{cases}$

В точці $x=1$функція є неперервною, але не є диференційованою. Доведемо це.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x<0)}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x<0)}}\frac{2(x+\Delta x)-2x}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x<0)}}\frac{2(1+\Delta x)-2\cdot 1}{\Delta x}=2$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x>0)}}\frac{1+\Delta x-1}{\Delta x}=1.\ \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x<0)}}\frac{\Delta y}{\Delta x}\neq\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\(\Delta x>0)}}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

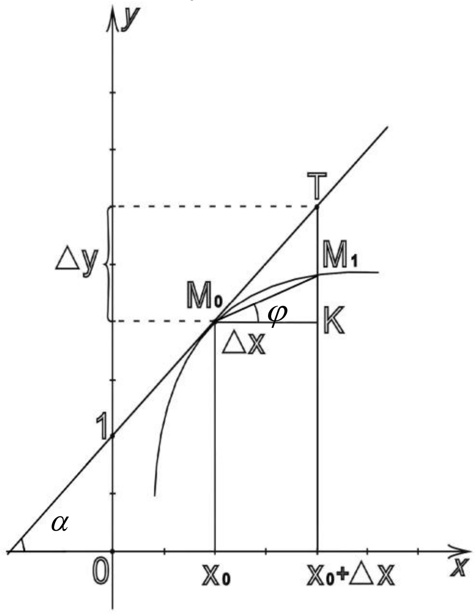
2) $y=\sqrt[3]{x}$, в точці $x_0=0$ функція є неперервною, але не має похідної , бо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+\Delta x}-\sqrt[3]{0}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\left(\frac{1}{0}\right)=\infty.$$

Геометричний зміст похідної

Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка є неперервною в деякій області, а в т. x_0 має похідну $y'(x_0)$.

$\exists\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)$. З ΔM_1M_0K: $tg\varphi=\frac{M_1K}{M_0K}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$.



Нехай $\Delta x\to 0$,тоді т. M_1 буде намагатись зайняти положення т. M_0, а хорда M_0M_1– положення дотичної M_0T . Отже, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{TK}{\Delta x}=tg\alpha$, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x_0)$, $y'(x_0)=tg\alpha$.

Тобто, значення похідної функції в точці дорівнює тангенсу кута, що утворює дотична, проведена до кривої в цій точці з додатнім напрямом осі *Ox*. Це і є геометричний зміст похідної.

Рівняння дотичної

Запишемо рівняння φдотичної, проведеної до кривої $y=f(x)$ в точці $x=x_0$. Скористаємось рівнянням $y-y_0=k(x-x_0)$, $tg\alpha=k=y'(x_0)$, тоді $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$.

Похідні деяких елементарних функцій

Доведемо, що якщо:

$y=\sin x$, то $(\sin x)'=\cos x$;

$y = \cos x$, то $(\cos x)' = -\sin x$;

$y = \log_a x$, то $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

$y = \ln x$, то $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Розглянемо функцію $y = \sin x$. Скористаємось означенням похідної, тобто

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2 \cdot \cos\frac{x + \Delta x + x}{2} \cdot \sin\frac{x + \Delta x - x}{2}}{\Delta x} =$$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{x + \Delta}{2}}{2 \cdot \frac{\Delta x}{2}} = \cos x$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$. Аналогічно можна довести, що $(\cos x)' = -\sin x$.

Ми скористались першою «чудовою границею».

Нехай $y = \ln x$. Доведемо, що $y' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{ln(x + \Delta x) - ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot ln\frac{x + \Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} =$$

$$= ln \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{1/x} = ln\, e^{1/x} = \frac{1}{x}.$$

Нехай $y = \log_a x$, тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{log_a(x + \Delta x) - log_a(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right)^{1/\Delta x} =$$

$$= log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right]^{1/x} = log_a e^{-1/x} = \frac{1}{x} log_a e = \frac{1}{x\, ln\, a}.$$

Правила диференціювання

Доведемо, що

1. $(x)' = 1$. Скористаємось означенням похідної, тоді якщо $y = x$, то $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$

2. $(c)' = 0$

$y = c$, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c - c}{\Delta x} = 0$

3. $(cu)' = cu'$

$y = cu$, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c(u + \Delta u) - cu}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{cu + c\Delta u - cu}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{c\Delta u}{\Delta x} = c \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} = cu'$.

4.Похідна суми декількох функцій дорівнює сумі похідних цих функцій:

Нехай $y = u + v$, тоді за означенням $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u + \Delta v}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x} = u' + v'$. Отже $(u + v)' = u' + v'$.

5. Доведемо, що $(u \cdot v)' = u'v + v'u$

Нехай $y = u \cdot v$, тоді

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{uv + \Delta u v + u\Delta v + \Delta u \Delta v - uv}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta u}{\Delta x} v + \frac{\Delta v}{\Delta x} u + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v) = u'v + v'u$$

$\Delta v \to 0$**,** бо функція v є неперервною і диференційованою.

6. Доведемо, що $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Похідна дробу дорівнює відношенню різниці добутків похідної чисельника на знаменник і похідної знаменника на чисельник до квадрату знаменника

Якщо $y = \frac{u}{v}$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} v - \frac{u}{v}(v+\Delta v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{uv + v\Delta u - u\Delta v - uv}{v(v+\Delta v)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta x \cdot v(v+\Delta v)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{\Delta x \cdot v(v+\Delta v)} =$$
$$= \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

При останньому перетворені знаменника враховано, що $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

7. Знайдемо похідну функції $y = tgx$.

$y = tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$. Скористаємось формулою $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, тоді одержимо

$y' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, отже,

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Аналогічно доводиться і наступна формула: $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Похідна складної функції

Розглянемо функцію $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, x - незалежна змінна, u - проміжкові змінна.

Теорема: Якщо функція $\varphi(x)$ має похідну в деякій точці x, тобто існує $\varphi'(x)$, а функція $f(u)$ має похідну $f'(u)$ у відповідній точці, то складна функція $y = f(u)$ теж має похідну у цій точці, яка дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжковій змінній на похідну від проміжкової змінної по незалежній змінній, тобто: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Доведення: З умови теореми можна записати $\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u$. Звідси $\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha$, $\Delta y = y'_u \cdot \Delta u + \alpha \cdot \Delta u$. Якщо $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$. Поділимо ліву і праву частину рівності на Δx, тоді одержимо $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$ і перейшовши в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$, та врахувавши, що α - нескінченно мала($\alpha \to 0$), одержимо: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Зауваження: якщо складна функція містить кілька проміжкових змінних ($y = f(u), u = \varphi(x)$, $x = \psi(t)$)**,** тоді $y'_t = y'_u \cdot u'_x \cdot x'_t$.

Приклади

1. $y = \ln(\sin x)$,

$y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx$**.**

2. $y = \ln(\sin 2x)$,

$$y' = \frac{1}{\sin 2x}(\sin 2x)' = 2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} = 2ctg2x.$$

Похідні степеневої та показникової функцій

Розглянемо степеневу функцію виду: $y = x^{\alpha}$.

Прологарифмуємо ліву і праву частини рівності, одержимо: $\ln y = \alpha \ln x$.

Знайдемо y', як похідну неявної функції. Одержимо $\frac{1}{y}y' = \alpha\frac{1}{x}$, звідки $y' = \alpha\frac{1}{x}y = \alpha\frac{1}{x}x^{\alpha} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Таким чином, похідна степеневої функції обчислюється за формулою $(x^{a})' = a \cdot x^{a-1}$. Аналогічно знайдемо похідну показникової функт: $y = a^{x}$ $(a > 0, a \neq 1)$.

1. Логарифмуємо: $\ln y = x\ln a$.
2. Диференціюємо: $\frac{1}{y}y' = \ln a$, звідки $y' = y\ln a = a^{x}\ln a$.

Отже, похідна показникової функції обчислюється за формулою $(a^{x})' = a^{x}\ln a$

Зауважимо, що $(e^{x})' = e^{x}$, оскільки $\ln e = 1$.

Приклади.

Знайти похідні функції:

1) $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$,

$$y' = \frac{1}{2}x^{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$, отже $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

2) $y = \sqrt[3]{\sin^{2} 2x} = (\sin 2x)^{2/3}$,

$$y' = \frac{2}{3}(\sin 2x)^{\frac{2}{3}-1}(\sin 2x)' = \frac{2}{3}(\sin 2x)^{-\frac{1}{3}} \cdot \cos 2x \cdot 2 = \frac{4\cos 2x}{3\sqrt[3]{\sin 2x}}.$$

Похідна складної степенево-показникової функції

Розглянемо функцію $y = u^{v}$, де u і v є функції від x.

1. Прологарифмуємо ліву і праву частину рівності.

1. $\ln y = v\ln u$,

2. Продиференціюємо по x ліву і праву частину одержаної рівності

2. $\frac{1}{y}y' = v'\ln u + v\frac{1}{u}u'$,

3. Знайдемо y' з рівняння, як невідоме.

3. $y' = (v'\ln u + v\frac{1}{u}u')y = (v'\ln u + v\frac{1}{u}u')u^{v} = u^{v}\ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}u'$. Одержимо $(u^{v})' = u^{v}\ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1}u'$.

Наприклад: $y = x^{\sin x}$

1. $\ln y = \sin x \ln x$, 2. $\frac{1}{y}y' = \cos x\ln x + \sin x\frac{1}{x}$,

3. $y' = (\cos x\ln x + \sin x\frac{1}{x}) \cdot x^{\sin x}$.

Такий метод диференціювання використовують і у випадках, де є більше, ніж два співмножники у записі функції. Наприклад:

$y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2 e^{2x} \sin x}{(x+2)\sqrt{x+3}}}$,

1. $\ln y = \dfrac{1}{3}[2\ln x + 2x + \ln(\sin x) - \ln(x+2) - \dfrac{1}{2}\ln(x+3)]$.

2. $\dfrac{1}{y}\cdot y' = \dfrac{1}{3}[2\dfrac{1}{x} + 2 + \dfrac{1}{\sin x}\cos x - \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x+3}]$.

3. $y' = \dfrac{1}{3}(2\dfrac{x+1}{x} + ctgx - \dfrac{3x+4}{2(x-2)(x+3)})\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x^2 e^{2x}\sin x}{(x+2)\sqrt{x+3}}}$.

Обернена функція та її диференціювання

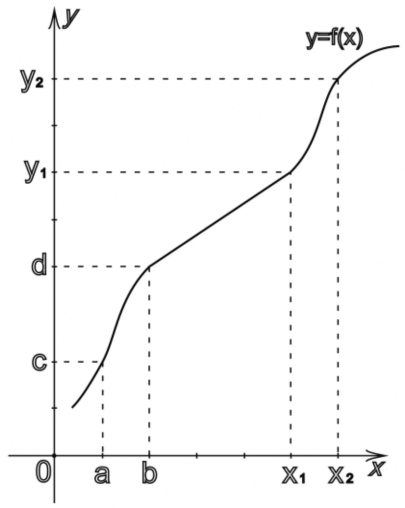
Нехай нам задано зростаючу або спадну функцію $y = f(x)$ на проміжку [a,b], $f(a) = c$, $f(b) = d$.

Розглянемо зростаючу функцію $y = f(x)$.

Нехай $f(a) = c$; $f(b) = d$.

Якщо функція $y = f(x)$ є зростаючою на проміжку [a,b], то вона має обернену функцію $x = \varphi(y)$ на проміжку [c,d].

Якщо функція не є ні спадною ні зростаючою, то вона може мати декілька обернених. Графіком функції $x = \varphi(y)$ буде той самий графік, що й для $y = f(x)$.



Якщо ж перепозначити x та y в оберненій функції, тобто розглянути функцію $y = \varphi(x)$, то графіки функцій $y = f(x)$ та $y = \varphi(x)$ будуть симетричні відносно бісектриси першого і третього координатних кутів.

Теорема: Якщо для функції $y = f(x)$ існує обернена функція $x = \varphi(y)$,яка має похідну $\varphi'(y) \neq 0$, то у відповідній точці функція $y = f(x)$ теж має похідну: $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Доведення: З умови теореми $x = \varphi(y)$ є диференційованою, тобто є неперервною, а це означає, що якщо $\Delta y \to 0$, то і $\Delta x \to 0$. Розглянемо $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\Delta x / \Delta y}$; звідки

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{1}{\Delta x / \Delta y}$; Отже

$f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Розглянемо обернені тригонометричні функції.

1. $y=\arcsin x$, $x\in[-1;1]$. Оберненою функцією до даної є $x=\sin y$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

Скористаємось теоремою про диференціювання обернених функцій, тобто $y'_x=\frac{1}{\varphi'_y}$, тоді

$y'=(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Аналогічно, якщо:

2. $y=\arccos x$, $x\in[-1;1]$, тоді

$x=\cos y$, $y\in[0;\pi)$

$$y'=(\arccos x)'=\frac{1}{(\cos y)'}=\frac{1}{-\sin y}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $y=arctgx$, $x\in[-\infty;\infty]$

$x=tgy$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

$$y'=(arctgx)'=\frac{1}{(tgy)'}=\frac{1}{1/\cos^2 y}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}=\frac{1}{1+x^2},$$

$\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}$, бо $1+tg^2 y=\frac{1}{\cos^2 y}$.

4. $y=arcctgx$, $x\in(-\infty;\infty)$, тоді

$x=ctgy$, $y\in(0;\pi)$.

$$y'=(arcctgx)'=\frac{1}{(ctgy)'}=-\frac{1}{1/\sin^2 y}=-\sin^2 y=-\frac{1}{1+ctg^2 y}=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Таблиця похідних

1. $(u^a)'=a\cdot u^{a-1}\cdot u'$, $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$
2. $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$
3. $(e^u)'=e^u\cdot u'$
4. $(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}\cdot u'$
5. $(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$
6. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$
7. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$
8. $(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$
9. $(ctgu)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$
10. $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
11. $(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$
12. $(arctgu)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$

13. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$

Похідна складної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, обчислюється за формулою $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Наприклад: $y = e^{arctg^2 \sqrt{x}}$, $y' = e^{arctg^2 \sqrt{x}} \cdot 2arctg\sqrt{x} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{arctg\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} \cdot e^{arctg^2 \sqrt{x}}$.

Диференціал функції та його геометричний зміст

За означенням похідної маємо: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, звідки $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, де $y' \cdot \Delta x$ - головна лінійна частина приросту функції. Вона називається *диференціалом*, і позначається $dy = y'\Delta x$, тобто диференціал функції дорівнює добутку її похідної на приріст аргументу: $dy = d(f(x)) = y'\Delta x$.

Доведемо, що приріст незалежної змінної дорівнює диференціалу незалежної змінної.

Розглянемо функцію $y = x$. Знайдемо dx.

$dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x$. Тобто $\Delta x = dx$ і таким чином, диференціал функції дорівнює добутку похідної цієї функції на диференціал незалежної змінної: $dy = y'dx$.

Геометричний зміст диференціалу: диференціал дорівнює приросту ординати дотичної, проведеної до кривої в даній точці.

Параметрично задані функції та їх диференціювання

Функція y від x називається заданою параметрично, якщо вона задається у вигляді:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ t_1 < t < t_2. \end{cases}$$

Розглянемо деякі криві, задані в параметричному вигляді.

Коло

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ 0 \le t \le 2\pi. \end{cases}$$

Піднесемо ліві і праві частини рівностей до квадрату і додамо їх:

$$\begin{cases} x^2 = R^2\cos^2 t, \\ y^2 = R^2\sin^2 t, \\ 0 < t < 2\pi \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2(\sin^2 t + \cos^2 t) \Rightarrow x^2 + y^2 = R^2.$$

Еліпс

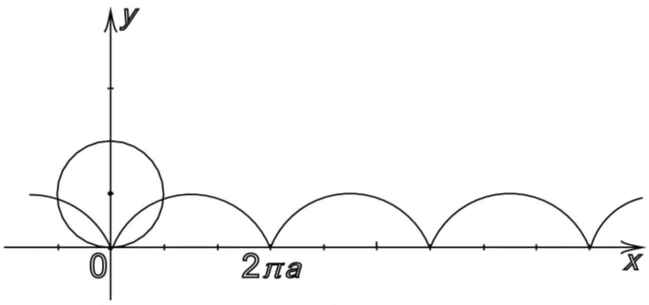
$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t \end{cases}$ при $0 \le t \le 2\pi.$ Доведемо це

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t \\ \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 t, \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Циклоїда

Це крива, яка описується точкою кола радіуса a, що котиться по прямій без ковзання.

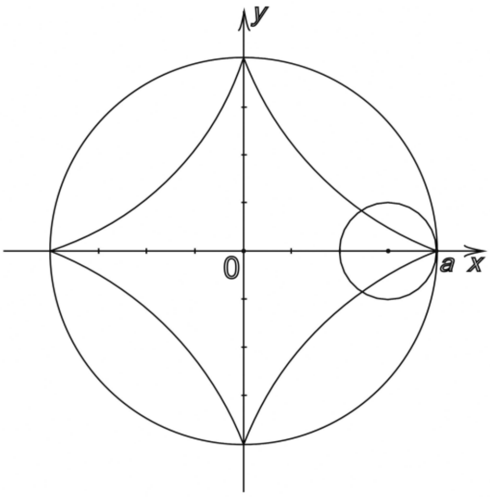
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$



Астроїда

Це крива, яка описується точкою кола радіуса $\frac{a}{4}$, що котиться по внутрішній стороні кола радіуса a без ковзання.

$$\begin{cases} x = a\,cos^3 t \\ y = a\,sin^3 t, 0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$



Похідна функції, заданої параметрично $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ t_1 < t < t_2 \end{cases}$ **рівна:** $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Приклад. Знайти похідну параметрично заданої функції:

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

$\begin{cases} x'_t = a(1 - \cos t) \\ y'_t = a(\sin t), \end{cases}$ отже, $\frac{dy}{dx} = \frac{a \cdot \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = ctg\,\frac{t}{2}$.

Похідні та диференціали вищих порядків

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка має почідну $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$. Очевидно, що ця похідна також є функцією від x. Якщо вона є диференційованою, то її похідна називається ***другою похідною від функції*** $y = f(x)$: $y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$. Аналогічно $y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}$ є похідною третього порядку і т. д., $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)} y}{dx^n}$.

Приклади.

Знайти похідні функцій:

1. Дано $y = x \cdot e^{-x}$. Знайти y'''

$y' = e^{-x} + x \cdot e^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x}$

$y'' = -e^{-x} + (1-x)e^{-x}(-1) = (x-2)e^{-x}$

$y''' = e^{-x} + (x-2) \cdot e^{-x}(-1) = (3-x)e^{-x}$

2. Знайти $y^{(n)}$, якщо

$y = \dfrac{1}{x-a}$

$y' = [(x-a)^{-1}]' = -(x-a)^{-2}$

$y'' = 2(x-a)^{-3}$

$y''' = 2 \cdot (-3)(x-a)^{-4}$

$y^{(4)} = 2 \cdot 3 \cdot 4(x-a)^{-5}$

$y^{(n)} = (-1)^n (x-a)^{-(n+1)} \cdot n!$

3. Знайти $y^{(n)}$, якщо

$y = \sin x$

$y' = \cos x = \sin(x + \dfrac{\pi}{2})$

$y'' = \cos(x + \dfrac{\pi}{2}) = \sin(x + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}) = \sin(x + \pi)$

$y''' = \cos(x + \dfrac{\pi}{2}) = \sin(x + \pi + \dfrac{\pi}{2}) = \sin(x + \dfrac{3\pi}{2})$

$y^{(n)} = \sin(x + n\dfrac{\pi}{2})$

Розглянемо рівність $y' = \dfrac{dy}{dx}$, тоді $dy = y' \cdot dx$.

Якщо $y'' = \dfrac{d^2 y}{dx^2}$, то $d^2 y = y'' \cdot dx^2$; аналогічно

$d^{(n)} y = y^{(n)} \cdot dx^n$.

Приклад. Знайти $d^2 y$, якщо

$y = \sin(x^2)$,

$y' = \cos(x^2) \cdot 2x$,

$y'' = 2\cos(x^2) + 2x(-\sin(x^2)) \cdot 2x = 2(\cos(x^2) - 2x^2 \cdot \sin(x^2))$,

$d^2 y = 2(\cos(x^2) - 2x^2 \sin(x^2)) dx^2$.

Використання диференціалів до наближених обчислень

Нехай нам дано функцію $y = f(x)$.

Відомо, що $\Delta f \approx df$, $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$, $df = f'(x) \cdot \Delta x$. Одержимо $f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x$ або $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$.

Приклади. Обчислити $\sqrt[5]{36}$.

$\sqrt[5]{36} = \sqrt[5]{32 + 4} = 2\sqrt[5]{1 + \dfrac{4}{32}} = 2\sqrt[5]{1 + \dfrac{1}{8}}$.

Розглянемо функцію

$y = 2\sqrt[5]{x}$,

тоді $2\sqrt[5]{x+\Delta x} \approx 2\sqrt[5]{x} + (2\sqrt[5]{x})' \cdot \Delta x$, Отже при $x = 1, \Delta x = \dfrac{1}{8}$ маємо

$$\sqrt[5]{36} = 2\sqrt[5]{1+\frac{1}{8}} \approx 2\sqrt[5]{1} + 2/5 \cdot 1^{-4/5} \cdot 1/8 = 2\sqrt[5]{1} + 1/20 = 2\frac{1}{20} = \frac{41}{20}.$$

Теореми Ролля, Лагранжа та Коші про диференційовані функції

Теорема Ролля: Якщо функція $y = f(x)$ є неперервною і диференційованою на проміжку [a;b], а на кінцях проміжку обертається в нуль, то всередині цього проміжку існує принаймні одна точка $x = c$, $a < c < b$, в якій похідна $f'(c) = 0$.

Теорема Лагранжа: Якщо функція $y = f(x)$ є неперервою і диференційованою на проміжку [a;b], то всередині цього проміжку існує принаймні одна точка $x = c$, $a < c < b$, що $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Теорема Коші: Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ є неперервними і диференційованими на проміжку [a;b], причому $g'(x) \neq 0$, то виконується рівність $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Правило Лопіталя: Якщо функції $y = f(x)$ і $y = g(x)$ на проміжку [a;b] задовольняють умовам теореми Коші, і якщо при $x = a$, $f(a) = g(a) = 0$, тоді, якщо існує $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує і $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, причому $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Зауважимо , що якщо $f'(a)$ та $g'(a)$ перетворюються в нуль, і задовольняють умовам теореми Коші, то для них також можна застосувати правило Лопіталя: для розкриття невизначеностей наступних типів: $"\frac{0}{0}", "\frac{\infty}{\infty}", "\infty - \infty", "0 \cdot \infty", "1^{\infty}", "0^0", "\infty^0"$.

Зауваження. Правило Лопіталя має місце і при $x \to \infty$.

Приклади.

Наведемо два приклада в яких не варто застосувати правило Лопіталя.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3 - 4x^2 + 9}{15x^3 + 8x + 7} = \dfrac{1}{3}$ – в таких випадках не застосовують правило Лопіталя.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3n - \sqrt[3]{2n^2})(\sqrt{4n^4 + 7n} - 5n)}{(9n^2 + 4n)\sqrt[3]{27n^3 + 3n + 1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n \cdot 2n^2}{9n^2 \cdot 3n} = \dfrac{2}{9}$

В наступних прикладах скористаємося правилом Лопіталя

3. $\lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{8x^3 - 1} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 1/2} \dfrac{4x - 3}{24x^2} = -\dfrac{1}{6}$.

4. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} = \dfrac{5}{3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - 1}{\ln(1+2x)} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{2x}}{2\dfrac{1}{1+2x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+2x) \cdot e^{2x} = 1$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x \cdot \sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right) = (\infty - \infty) \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^2 \cdot \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x} = \left(\dfrac{0}{0}\right) =$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2\sin x + 2x \cdot \cos x + x^2 \cdot \sin x - 2x \cdot \cos x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\sin x \cdot (2 + x^2)} = \dfrac{1}{2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\cos x\cdot\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}=\lim\limits_{x\to 2}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln(x-2)}{\ln(e^x-e^2)}=\left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)=\cos 2\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\dfrac{1}{x-2}}{\dfrac{e^x}{e^x-e^2}}=$

$=\cos 2\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{e^x(x-2)}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{\cos 2}{e^2}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x}{1}=\cos 2$.

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}x\cdot\ln x=(0\cdot(-\infty))=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/x}{-1/x^2}=-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$.

9. $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\cdot tg\dfrac{x}{2}=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\pi-x}{ctg\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-1}{-\dfrac{1}{\sin^2\dfrac{x}{2}}\cdot\dfrac{1}{2}}=\lim\limits_{x\to\pi}2\sin^2\dfrac{x}{2}=2$.

10. $\lim\limits_{x\to 3}(2-\dfrac{x}{3})^{tg\frac{\pi x}{6}}=e^{2/\pi}$, де $\lim\limits_{x\to 3}tg\dfrac{\pi x}{6}\ln(2-\dfrac{x}{3})=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2-\dfrac{x}{3})}{ctg\dfrac{\pi x}{6}}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi x}{6}}{\pi(2-\dfrac{x}{3})}=\dfrac{2}{\pi}$.

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x\cdot(e^{2x}-1)}{\sin 4x}=\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\sin 4x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot e^{2x}}{4\cos 4x}=\dfrac{1}{2}$.

1.5. Дослідження поведінки функції та побудова її графіка

Зростання та спадання функцій

Функція $y=f(x)$ називається ***зростаючою*** на проміжку [a,b], якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції: $\forall x_1,x_2$, таких що $x_1<x_2$ виконується $f(x_1)<f(x_2)$.

Функція $y=f(x)$ називається ***спадною*** на проміжку [a,b], якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції: $\forall x_1,x_2$, таких що $x_1<x_2$ виконується $f(x_1)>f(x_2)$.

Теорема:

1) Якщо функція $y=f(x)$ є диференційованою на проміжку [a;b], і зростає на цьому проміжку, то $f'(x)\ge 0$.

2) Якщо функція $y=f(x)$ є диференційованою на проміжку [a;b], а $f'(x)>0$ $\forall x\in[a,b]$, то вона є зростаючою на [a;b].

Доведення:

1. Розглянемо відношення $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Якщо Δx додатне, то для зростаючої функції чисельник $f(x+\Delta x)-f(x)$ теж додатний, і $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$>0;

якщо Δx від'ємне, то чисельник $f(x+\Delta x)-f(x)$ теж від'ємний, і $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$>0, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ge 0$, отже $f'(x)\ge 0$.

2. Нехай $f'(x)>0$ при $\forall x\in[a;b]$.Розглянемо два довільних значення x_1 і x_2, що належать проміжку $[a;b]$, і нехай $x_1<x_2$.

За теоремою Лагранжа запишемо

$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),\ x_1 < \xi < x_2$.

За умовою $f'(\xi) > 0$, отже $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто функція $f(x)$ є зростаючою.

Таким чином теорема доведена повністю.

Теорема:

1) Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою на проміжку [a;b], і спадає на цьому проміжку, то $f'(x) \le 0$.

2) Якщо функція $y = f(x)$ є диференційованою на проміжку [a;b], а $f'(x) < 0$ $\forall x \in [a,b]$, то вона є спадною на [a;b].

Доведення аналогічне попередньому.

Екстремум функції

Кажуть, що функція $y = f(x)$ в точці x_1 має максимум (скорочено $\max$), якщо $f(x_1) > f(x_1 + \Delta x)$ для будь-яких Δx (додатніх і відємних).

Функція $y = f(x)$ в точці x_2 має мінімум ($\min$), якщо $f(x_2) < f(x_2 + \Delta x)$ для будь-яких Δx.

Необхідна умова існування екстремуму

Теорема : якщо диференційована функція $y = f(x)$ в точці $x = x_1$ має екстремум, то її похідна в цій точці обертається в нуль: $f'(x_1) = 0$.

Доведення: нехай функція $y = f(x)$ у точці x має максимум.

Розглянемо відношення $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$.

Якщо $\Delta x > 0$, то і $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} < 0$, оскільки, за означенням максимуму функції, $f(x_1 + \Delta x) - f(x_1) < 0$ і таким чином,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \le 0, \text{ отже } f'(x_1) \le 0.$$

При $\Delta x < 0$ матимемо $\dfrac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} > 0$, а, отже,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \ge 0, \text{ тобто } f'(x_1) \ge 0.$$

Зауважимо, що в деяких випадках функція може мати екстремум, і в такій точці, де похідна не існує. Точки, в яких похідна не існує або перетворюється в нуль, називаються ***критичними точками першого роду.***

Достатні умови існування екстремуму:

1) якщо при переході через критичну точку похідна змінює знак з „+” на „-”, то в цій точці функція має $\max$, а якщо з „-” на „+” – то $\min$.

2) якщо в критичній точці $f''(x) > 0$, то в цій точці функція має $\min$, а якщо $f''(x) < 0$, то функція має $\max$.

Приклад.

1) Дослідити на екстремум функцію $y = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.

- $D(y)$: R;
- $y' = x^2 - 4x + 3$, $y'' = 2x - 4$,
- $y' = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$,
  $y''(1) = -2 < 0$, $y''(3) = 2 > 0$,

отже, $y_{\max}(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 1 = 2\frac{1}{3}$, $y_{\min}(3) = 9 - 18 + 9 + 1 = 1$.

2) Знайти екстремум функції та проміжки зростання і спадання функції $y = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}$:

- $D(y) = \{x \neq 0\}$,
- $y' = \frac{(2x-1)x^2 - 2x(x^2 - x - 2)}{x^4} = \frac{x+4}{x^3}$,
- $y' = 0$, $\frac{x+4}{x^3} = 0$, $x = -4$.

Складемо таблицю в якій визначимо інтервали знакосталості та критичні точки:

x	$(-\infty;-4)$	-4	(-4;0)	0	$(0;+\infty)$
y'	+	0	–	$\nexists$	+
y	$\nearrow$	max	$\searrow$	$\nexists$	$\nearrow$

$y_{\max}(-4) = \frac{9}{8}$.

Дана функція на проміжках $(-\infty;-4)$, $(0;+\infty)$ зростає, а на проміжку (-4;0) спадає.

Найбільше та найменше значення функції на проміжку

Неперервна на проміжку [a;b] функція приймає своє найбільше та найменше значення або в точках екстремуму або на кінцях проміжку.

Для того, щоб знайти найбільше та найменше значення функції, потрібно:

1) знайти критичні точки;
2) виключити з розгляду ті критичні точки, які не входять в заданий проміжок;
3) обчислити значення функції в критичних точках та на кінцях проміжку;
4) порівняти їх.

Приклад.

Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ на проміжку [0;2].

1. $y' = x^2 - 4x + 3$

   $y' = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$;

1. точка $x_1 = 3 \notin [0;2]$
2. $y(0) = 1$, $y(2) = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}$, $y(1) = \frac{7}{3}$ (згідно з даними попереднього прикладу 1 це екстремум);
3. $y_{нм} = y(0) = 1$, $y_{нб} = y(1) = \frac{7}{3}$.

Опуклість та увігнутість функції. Точки перегину

Неперервна функція $y = f(x)$, що має похідні до другого порядку включно, називається ***опуклою*** на [a;b] , якщо всі точки кривої на цьому проміжку знаходяться під дотичними, проведеними до цієї кривої в будь-якій точці цього проміжку.

Неперервна функція $y = f(x)$, що має похідні до другого порядку включно, називається ***увігнутою*** на [a;b] , якщо всі точки кривої знаходяться над дотичними, проведеними до цієї кривої в будь-якій точці цього проміжку.

Точки, при переході через які змінюється опуклість на увігнутість, називаються ***точками перегину.***

Теорема 1. Якщо неперервна функція $y = f(x)$ на [a;b] має похідну другого порядку, причому в усіх точках цього проміжку $f''(x) < 0$, то на цьому проміжку функція опукла.

Теорема 2. Якщо неперервна функція $y = f(x)$ на [a;b] має похідну другого порядку, причому в усіх точках цього проміжку $f''(x) > 0$, то на цьому проміжку функція увігнута.

Якщо функція $y = f(x)$ в точці $x = x_1$ має точку перегину, то в цій точці друга похідна або не існує, або дорівнює нулю (критичні точки 2-го роду).

Приклад. Дослідити на опуклість та увігнутість функцію $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2}$ та знайти точки перегину.

- $D(y) = \{x \neq 0\}$
- $y' = \dfrac{(2x-1)x^2 - 2x(x^2 - x - 2)}{x^4} = \dfrac{x+4}{x^3}$
- $y'' = \dfrac{x^3 - 3x^2(x+4)}{x^6} = -\dfrac{2(x+6)}{x^4}$

$x = -6$ - критична точка, 2-го роду.

Складемо таблицю:

x	$(-\infty;-6)$	-6	(-6;0)	0	$(0;+\infty)$
y''	+	0	–	$\nexists$	–
y		т.перег		$\nexists$	

Дана функція на проміжках $(-6;0)$, $(0;+\infty)$ є опуклою, а на проміжку $(-\infty;-6)$ - увігнутою, причому $y_{т.пер.}(-6) = \dfrac{7}{9}$.

Асимптоти функцій. Похилі асимптоти

1.Вертикальні асимптоти.

$x = a$ є вертикальною асимптотою функції $y = f(x)$, якщо в цій точці є розрив 2-го роду.

2. Рівняння похилих та горизонтальних асимптот шукаємо в виді:

$y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$,а $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx)$.

План повного дослідження функції . Побудова графіків функцій

1. Знайти область визначення функції.
2. Дослідити функцію на парність і непарність.
3. Визначити періодичність функції.
4. Дослідити функцію на неперервність, знайти точки розриву.
5. Знайти асимптоти.
6. Знайти нулі функції(точки перетину з осями координат).
7. Знайти екстремум, інтервали зростання та спадання функції.
8. Точки перегину, інтервали опуклості та ввігнутості.
9. Побудова графіку.

Приклад. Дослідити функції і побудувати їх графіки:

1. $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2}$

1) $D(y) = \{x \neq 0\}$.

2) $y(-x) = y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2}$ – функція ні парна, ні непарна.

3) Функція не періодична.

4) $x = 0$– точка розриву другого роду

$\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} = -\infty$.

5) $x = 0$– вертикальна асимптота. Похилі асимптоти шукаємо у вигляді $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} \cdot \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \dfrac{1}{\infty} = 0$;

$b = \lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty} [\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2} - 0] = 1$, отже $y = 1$– горизонтальна асимптота.

6) $y = 0$, $x^2 - x - 2 = 0, \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -1$ - нулі функції.

7) Запишемо функцію у виді: $y = 1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2}$, тоді

$y' = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} = \dfrac{x+4}{x^3}$.Тобто $y' = 0$, якщо $x + 4 = 0$

$x = -4$ – критична точка першого роду. Складемо таблицю.

x	$(-\infty;-4)$	-4	(-4;0)	0	(0;+∞)
y'	+	0	–	$\overline{\exists}$	+
y	↗	max	↘	$\overline{\exists}$	↗

$y_{\max}(-4) = \dfrac{9}{8}$.

8) Знайдемо y'', якщо $y' = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$, тоді

$y'' = -\dfrac{2}{x^3} - \dfrac{12}{x^4}$, або $y'' = \dfrac{-2(x+6)}{x^4}$

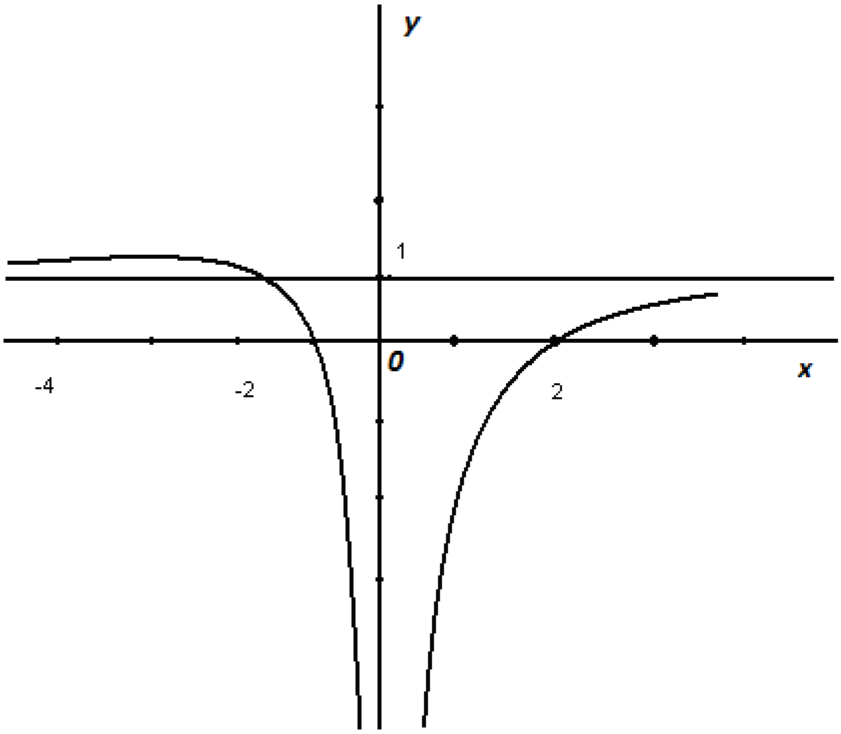
$y'' = 0$, якщо $x = -6$- критична точка другого роду. Складемо наступну таблицю.

x	$(-\infty;-6)$	-6	(-6;0)	0	(0;+∞)
y''	+	0	–	$\overline{\exists}$	–
y		т.перег		$\overline{\exists}$	

Функція увігнута на проміжку $(-\infty;-6)$ і опукла на $(-6;0) \cup (0;\infty)$.

$x = -6$- точка перегину $y_{т.пер.}(-6) = \dfrac{10}{9}$.

9. Побудуємо графік цієї функції.



2. $y = x^2 + \dfrac{4}{x^2}$

1) $D(y) = \{x \neq 0\}$

2) $y(-x) = y(x)$– функція парна, графік її симетричний відносно осі OY.

3) Функція неперіодична.

4) $x = 0$– точка розриву другого роду

$\lim\limits_{x \to 0}(x^2 + \dfrac{4}{x^2}) = \infty$.

5) $x = 0$– вертикальна асимптота. Похилі асимптоти:

$y = kx + b$, $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty}(x + \dfrac{4}{x^3}) = \infty$– похилих асимптот немає.

6) $y \neq 0$, бо $x^2 + \dfrac{4}{x^2} \neq 0$ (графік не перетинає вісь ox).

7) $y' = 2x - \dfrac{8}{x^3}$

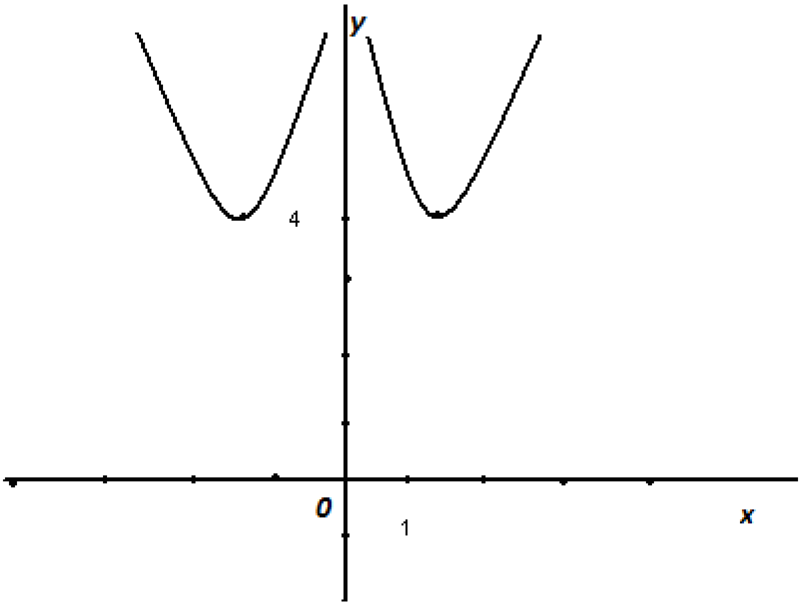
$2x - \dfrac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^4 - 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$,

$y_{\min}(\sqrt{2}) = 4$

x	$(0;\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2};+\infty)$
y'	–	0	+
y	↘	min	↗

8) $y'' = 2 + \dfrac{24}{x^4} > 0$– функція є ввігнутою на всій області визначення.

9) Побудова графіка



3. $y=\dfrac{x}{e^{x}}$

1) $D(y)=\mathrm{R}$

2) $y(-x)=\dfrac{-x}{e^{-x}}$ – функція ні парна, ні непарна.

3) Функція неперіодична.

4) Точок розриву нема.

5) Функція неперервна, вертикальних асимптот нема.

Знайдемо похилі асимптоти у виді $y=kx+b$

$k_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x\cdot e^{x}}=0$, $b_1=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=0$, отже $y=0$ - горизонтальна асимптота.

$k_2=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{xe^{x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{x}}=\infty$. При $x\to-\infty$ похилої асимптоти нема.

6) $y=\dfrac{x}{e^{x}}=0$, коли $x=0$ (нуль функції).

7) $y'=(x\cdot e^{-x})'=e^{-x}(1-x)$

$y'=0\Rightarrow x=1$,

x	$(-\infty;1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	+	0	–
y	↗	max	↘

$y_{\max}(1)=\dfrac{1}{e}$.

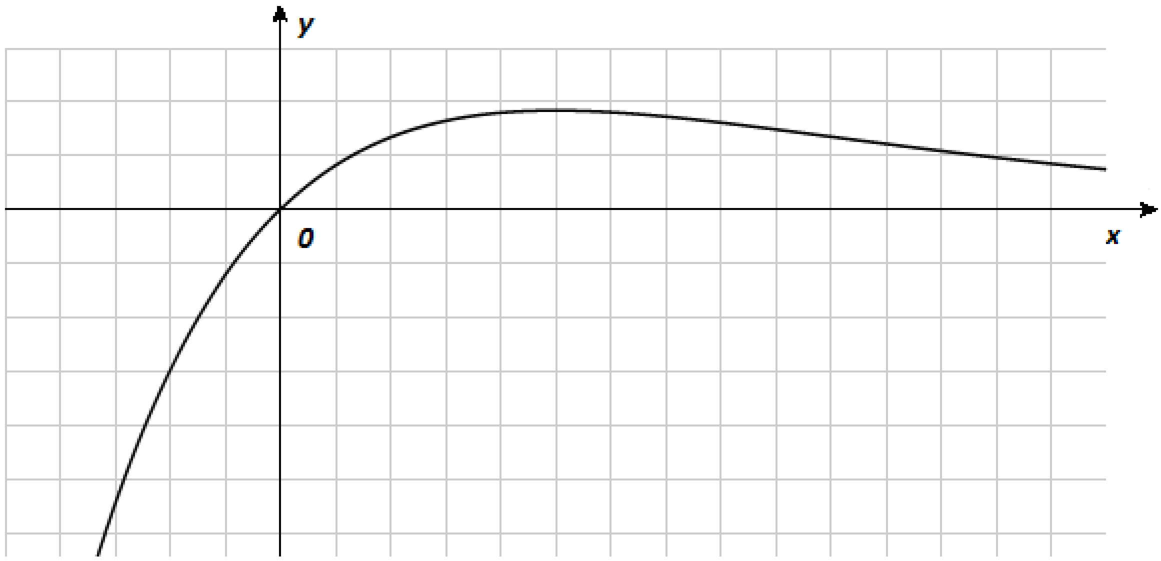
8) $y''=(e^{-x}(1-x))'=e^{-x}(x-2)$

$y''=0$, якщо $x=2$.

x	$(-\infty;1)$	2	$(1;+\infty)$
y''	–	0	+
y	⌒	т.перег.	⌣

$y_{т.перег.}(2)=\dfrac{2}{e^{2}}$.

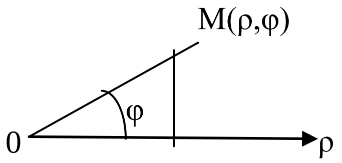
9. Схематична побудова графіку.



1.6. *Полярні координати*

Півпромінь, на якому задано одиницю відліку, називається *полярною віссю.*

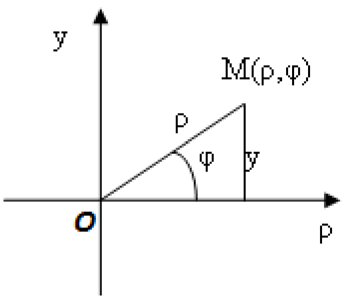
Будь-яка точка M визначається двома координатами: $M(\rho, \varphi)$, де $\rho = \left|\overline{OM}\right|$ – полярний



радіус, φ – полярний кут, т. O- полюс. Очевидно, кут може приймати безліч значень, які відрізняються на $\pm 2\pi k$.

Головне значення полярного кута міститься на проміжку $-\pi < \varphi \le \pi$.

Нехай нам дано декартову систему координат. Сумістимо полюс із початком координат, а полярну вісь направимо по осі OX . Запишемо перехід від полярних координат до декартових.



$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}, \text{ де } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Рівняння деяких кривих у полярних координатах

Будь-яка пряма, яка проходить через полюс, має рівняння $\varphi = \varphi_0$. Рівняння прямої, що співпадає з віссю $O\rho$, має вигляд $\varphi = 0$.

Будь-яке рівняння кола з центром у полюсі має вигляд $\rho = R$.

Доведення.

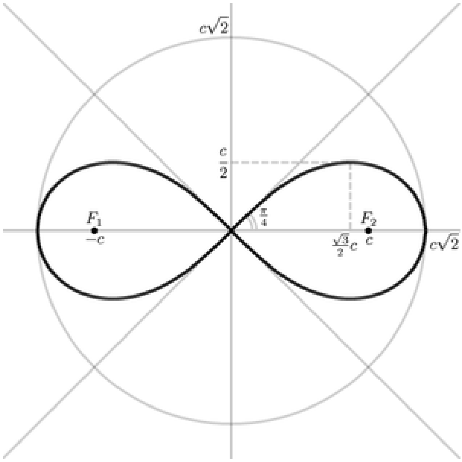
$\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi = R^2;$

$\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = R^2;$

$\rho^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R.$

Лемніската Бернулі

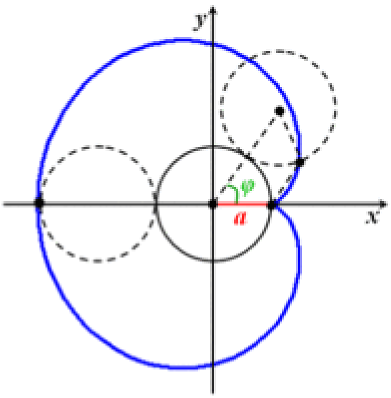
Лемніската Бернуллі — геометричне місце точок, добуток відстаней кожної з яких до двох заданих точок (фокусів) незмінна і дорівнює квадрату половини відстані між фокусами.



Назва походить з античного Риму, де «лемніскатою» називали бантик, з допомогою якого прикріпляли вінок до голови переможця на спортивних іграх. Цю лемніскату називають в честь швейцарського математика Якоба Бернуллі, який поклав початок її вивченню.

Рівняння лемніскати в полярних координатах: $\rho^2 = 2c^2 \cos 2\varphi$.

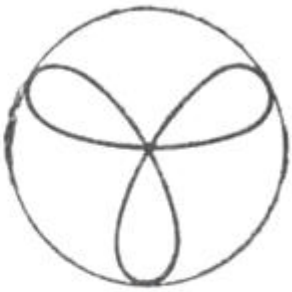
Кардіоїди



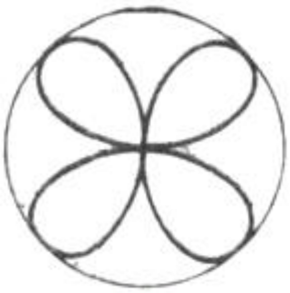
Кардіоїда (грец. καρδία - серце, грец. εἶδος - вид) - плоска лінія, яка описується фіксованою точкою кола, що котиться по нерухомому колі з таким же радіусом. Отримала свою назву через схожість своїх обрисів зі стилізованим зображенням серця.

Рівняння кардіоїди в полярних координатах: $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$.

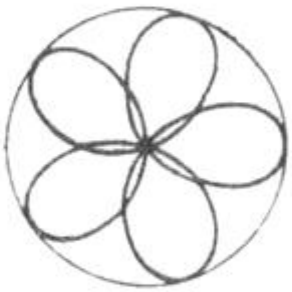
Полярні троянди



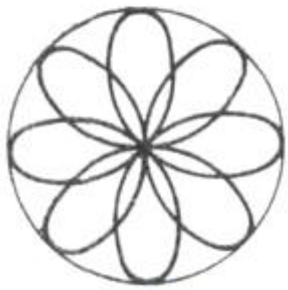
k=3



k=2



k=5/3



k=4/3

Троянда – плоска крива, що нагадує символічне зображення квітки. Дана крива описується рівнянням в полярній системі координат у вигляді $\rho = a \sin k\varphi$. Тут a і k — сталі, що визначають розмір (a) і кількість пелюсток (k) даної троянди. Вся крива розташовується всередині кола радіуса a і в разі $k > 1$ складається з однакових за формою та розміром пелюсток.

Для цілого k число пелюсток рівне k , якщо k непарне і $2k$, — якщо парне.

Для дробового k виду $k = \dfrac{m}{n}$, де m і n взаємно прості, кількість пелюсток троянди рівне m , якщо обидва числа непарні і $2m$, якщо б хоча б одне — парне.

При k ірраціональному пелюсток нескінченно багато.

При значеннях $k > 1$ троянда є гіпотрохоїдою, а при $k < 1$ – епітрохоїдою.

Полярні рівняння чотирипелюсткових троянд: $\rho = a \sin 2\varphi$ і $\rho = a \cos 2\varphi$.

Полярні рівняння трипелюсткових троянд: $\rho = a \sin 3\varphi$ і $\rho = a \cos 3\varphi$.

II. РОБОЧА ПРОГРАМА ДИСЦИПЛІНИ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td colspan="2">денна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Кількість кредитів –8/7</td><td>Галузь знань
0401 – Природничі науки
(шифр і назва)</td><td colspan="2" rowspan="2">Нормативна</td></tr>
<tr><td>Напрям підготовки
<u>6.070301 Хімія, 6.040106 Екологія, охорона навколишнього середовища та збалансоване природокористування</u>
(шифр і назва)</td></tr>
<tr><td>Модулів – 4</td><td rowspan="5">Спеціальність (професійне спрямування):
________________</td><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 4</td><td colspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Індивідуальне науково-дослідне завдання
____
(назва)</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 240/210</td><td colspan="2">1,2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції
Хімія/Екологія</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Тижневих годин для денної форми навчання (Хімія / Екологія):
1 курс:
аудиторних – 4/4
самостійної роботи студента –2,5/2,5</td><td rowspan="9">Освітньо-кваліфікаційний рівень:
бакалавр</td><td>72 год.</td><td>72 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські
Хімія/Екологія</td></tr>
<tr><td>72год.</td><td>72 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота
Хімія/Екологія</td></tr>
<tr><td>96 год.</td><td>66 год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальні завдання: год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю:
1 семестр – екзамен
2 семестр – екзамен</td></tr>
</table>

Примітка. Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить (%):
для денної форми навчання – 150% (хімія), 218% (екологія).

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Мета вивчення дисципліни «Вища математика» оволодіння студентами необхідними теоретичними і практичними знаннями даного курсу, який є фундаментом при вивченні навчальних дисциплін, що потребують знання дисципліни «Вища математика», з метою високопрофесійної підготовки спеціалістів – хіміка, еколога відповідно до вимог ОПП.

Завдання курсу: ознайомлення з основними поняттями, результатами і методами досліджень у таких розділах вищої математики, як алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей та математична статистика; формування навичок застосування зазначеного математичного апарату для розв'язання практичних завдань.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен

знати: теоретичний і практичний матеріал курсу «Вища математика» наведений у програмі, затвердженій на засіданні кафедри кібернетики і прикладної математики та методичною комісією вузу;

вміти: застосовувати апарат вищої математики для формалізації та математичного опису задач, що виникають у сфері науки та виробництва.

3. Програма навчальної дисципліни

(І курс, І семестр)

Модуль 1. **ЛІНІЙНА ТА ВЕКТОРНА АЛГЕБРА**

Змістовий модуль №1. **ЛІНІЙНА АЛГЕБРА, ВЕКТОРНА АЛГЕБРА. АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОЩИНІ ТА У ПРОСТОРІ**

Тема 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Визначники 2-го, 3-го, 4-го порядків, їх властивості. Обчислення визначників 2-го, 3-го порядків та визначників вищих порядків. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Правило Крамера. Метод Гауса. Матриці, дії над ними. Обернена матриця. Матричні рівняння. Матричний спосіб розв'язання систем лінійних рівнянь.

Тема 2. Векторна алгебра.

n-мірний векторний простір. Лінійно незалежні та лінійно залежні вектори. Базис. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі. Геометричні вектори. Дії над ними. Проекції векторів на вісь. Їх властивості. Скалярний добуток двох векторів. Його властивості. Кут між векторами. Умова колінеарності та перпендикулярності двох векторів. Векторний добуток двох векторів. Властивості. Змішаний добуток трьох векторів. Його геометричний зміст. Умова компланарності трьох векторів.

Тема 3. Аналітична геометрія на площині.

Прямокутна система координат на площині. Віддаль між точками, поділ відрізка в даному відношенні. Площа трикутника. Рівняння лінії на площині. Загальне рівняння прямої. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Кут між двома прямими, умова паралельності та перпендикулярності двох прямих. Рівняння жмутка прямих. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки. Нормальне рівняння прямої. Віддаль від точки до прямої.

Криві другого порядку. Коло, еліпс. Гіпербола. Парабола. Перетворення координат. Полярні координати.

Модуль 2. **ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ**

Змістовий модуль №1. **ГРАНИЦІ. ФУНКЦІЇ. ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ ФУНКЦІЙ. ДОСЛІДЖЕННЯ І ПОБУДОВА ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ. ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ.**

Тема 1. Границі.

Сталі та змінні величини. Поняття функції, означення. Способи задання функцій. Класифікація функцій однієї змінної. Графіки основних елементарних функцій. Границя, означення. Границя послідовності, границя функції. Нескінченно малі та нескінченно великі величини. Основні теореми. Основні теореми про границі. Чудові границі. Однобічні границі. Приріст аргументу, приріст функції. Неперервність функції. Класифікація точок розриву функції.

Тема 2. Диференціальне числення.

Швидкість руху. Загальне означення похідної. Геометричний та фізичний зміст похідної. Рівняння дотичної до кривої. Основні правила диференціювання функцій. Похідна добутку. Похідна частки. Похідні від деяких простих функцій. Похідна складної функції. Похідна неявної функції. Логарифмічне диференціювання. Похідна показникової функції. Похідна степеневої функції. Обернені функції. Диференціювання обернених функцій. Похідні $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$. Похідні $y = \mathrm{arctg}\, x$; $y = \mathrm{arcctg}\, x$. Диференціал функції. Його геометричний зміст. Залежність між неперервністю та диференційованістю функцій. Параметрично задані функції. Диференціювання функцій, заданих параметрично. Похідні та диференціали вищих порядків. Деякі теореми про диференційовані функції. Поняття про правило Лопіталя.

Тема 3. Повне дослідження функцій.

Інтервали зростання, спадання функцій. Екстремум функції. Необхідна та достатня ознаки існування екстремуму. Дослідження на екстремум функції за другою похідною. Найбільше та найменше значення функції на проміжку. Інтервали опуклості, вгнутості функції, точки перетину. Асимптоти функції. Повне дослідження функцій. Побудова графіків функцій.

(І курс, ІІ семестр)

<u>Модуль 1.</u> ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

<u>Змістовий модуль №1.</u> НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. МЕТОД ІНТЕГРУВАННЯ.

Тема 1. Функції двох змінних.

Поняття функції багатьох змінних. Функція двох змінних. Область визначення. Деякі функції обертання. Частинні похідні функції двох змінних. Повний диференціал функції. Диференціювання складних функцій двох змінних. Частинні похідні та диференціали вищих порядків функції двох змінних. Похідна неявної функції. Екстремум функції двох змінних. Поверхні рівня. Частинна похідна по напрямку функції двох змінних. Градієнт функції.

Тема 2. Комплексні числа.

Комплексні числа. Дії з комплексними числами. Різні форми комплексних чисел. Методи розв'язання рівнянь вищих степенів.

Тема 3. Інтегральне числення.

Первісна функція. Невизначений інтеграл, означення, властивості. Основні властивості невизначеного інтегралу. Основні методи інтегрування невизначених інтегралів. Метод заміни змінної та інтегрування по частинах. Інтегрування найпростіших раціональних дробів. Інтегрування раціональних дробів. Інтегрування тригонометричних виразів. Тригонометричні підстановки при інтегруванні ірраціональних виразів.

<u>Модуль 2</u>. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

<u>Змістовий модуль №2.</u> ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ.

Тема1. Визначений інтеграл.

Визначений інтеграл, його геометричний зміст. Формула Ньютона-Лейбніца. Властивості визначених інтегралів. Інтегрування частинами у визначеному інтегралі. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Невласний інтеграл. Геометричні застосування визначених інтегралів. Обчислення площ плоских фігур. Обчислення довжини дуги за допомогою визначеного інтегралу.Обчислення об'ємів за допомогою визначеного інтегралу. Обчислення об'ємів тіл, утворених обертанням плоских фігур навколо осей Оx і Оy. Обчислення площ поверхонь, утворених обертанням кривих ліній навколо осей Оx і Оy *та* інші застосування визначених інтегралів.

Тема 2. Диференціальні рівняння.

Диференціальні рівняння. Постановка задачі. Означення. Диференціальні рівняння першого порядку, загальні поняття. Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку**.** Диференціальні рівняння, що зводяться до однорідних. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та диференціальні рівняння Бернуллі. Диференціальні рівняння вищих порядків. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку.Лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Означення та загальні властивості. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку. Означення та основні теореми. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами:

1) випадок дійсних різних коренів характеристичного рівняння;
2) випадок дійсних рівних коренів характеристичного рівняння;
3) випадок комплексних коренів характеристичного рівняння.

Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку з сталими коефіцієнтами, основна теорема. Метод невизначених коефіцієнтів розв'язання лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами. Метод варіації сталих. Розв'язання лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку з сталими коефіцієнтами

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	Хімія (дена форма)						Екологія (дена форма)					
	усього	у тому числі					усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	с.р.		л	п	лаб	інд	с.р.
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Семестр 1 Модуль 1												
Змістовий модуль 1. Лінійна алгебра, векторна алгебра. Аналітична геометрія на площині та у просторі												
Тема 1. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь.	24	8	8			8	24	8	8			8
Тема 2. Векторна алгебра.	18	5	5			8	18	5	5			8
Тема 3. Аналітична геометрія на площині.	18	5	5			8	18	5	5			8
Разом за змістовим модулем 1	*60*	*18*	*18*			*24*	*60*	*13*	*18*			*24*
Змістовий модуль 2. Границі. Функції. Диференціювання функцій. Дослідження і побудова графіків функцій. Функції багатьох змінних.												
Тема 1. Границі.	14	4	4			6	14	4	4			6
Тема 2. Диференціальне	22	7	7			8	22	7	7			8

числення.												
Тема 3. Повне дослідження функцій.	24	7	7			10	24	7	7			10
Разом за змістовим модулем 2	*60*	*18*	*18*			*24*	*60*	*18*	*18*			*24*
Усього годин	120	36	36			48	120	36	36			48
Модуль 2												
Змістовий модуль 1. Невизначений інтеграл. Методи інтегрування.												
Тема 1. Функції двох змінних.	12	4	4			4	9	4	4			1
Тема 2. Комплексні числа.	8	2	2			4	5	2	2			1
Тема 3. Інтегральне числення.	40	12	12			16	31	12	12			7
Разом за змістовим модулем 1	*60*	*18*	*18*			*24*	*45*	*18*	*18*			*9*
Змістовий модуль 2. Визначений інтеграл. Застосування визначених інтегралів. Диференціальні рівняння.												
Тема1. Визначений інтеграл.	20	6	6			8	14	6	6			2
Тема 2. Диференціальні рівняння.	40	12	12			16	31	12	12			7
Разом за змістовим модулем 2	60	18	18			24	45	18	18			9
Усього годин	120	36	36			48	90	36	36			18
Усього годин за 1 семестр	**240**	**72**	**72**			**96**	**210**	**72**	**72**			**66**

4. Теми практичних занять

№ практ. заняття	Тема заняття	Кількість годин «Хімія» / «Екологія»
І семестр		
Модуль 1		
1.	Обчислення визначників	2/2
2.	Системи лінійних рівнянь. Правило Крамера. Матриці, дії над ними.	2/2
3.	Метод Гауса. Загальний розв’язок.	2/2
4.	Матричний спосіб розв’язання СЛАР.	2/2
5.	Вектори. Лінійно залежні та незалежні системи векторів. Розклад векторів по базису.	2/2

6.	Вектори. Дії над ними. Скалярний добуток. Векторний та змішаний добуток векторів.	3/3
7.	Система координат на площині. Пряма лінія	3/3
8.	Криві другого порядку, коло, еліпс, гіпербола. Парабола.	2/2
Модуль 2.		
9.	Границя послідовності. Границя функції. Обчислення границі.	2/2
10.	Чудові границі.	2/2
11.	Область визначення функцій. Неперервність функції.	2/2
12.	Похідні. Означення. Властивості. Таблиця похідних. Похідна складних функцій.	2/2
13.	Похідна степенево-показникової функції. Диференціал.	1/1
14.	Похідні та диференціали вищих порядків.	1/1
15.	Застосування похідних. Правило Лопіталя.	1/1
16.	Дослідження на екстремум функції.	2/2
17.	Інтервали опуклості, вгнутості функції. Асимптоти.	2/2
18.	Повне дослідження функцій. Побудова графіків функцій.	3/3
ІІ семестр		
Модуль 1		
1.	Функції багатьох змінних. Частинні похідні. Похідні та диференціали вищих порядків.	2/2
2.	Екстремум функції двох змінних. Похідна по напрямку. Градієнт.	2/2
3.	Комплексні числа та дії над ними. Розв’язання рівнянь вищих степенів.	2/2
4.	Первісна функція. Невизначений інтеграл. Таблиця інтегралів.	2/2
5.	Методи інтегрування. Метод заміни змінної	2/2
6.	Метод інтегрування по частинах	2/2
7.	Інтегрування раціональних дробів.	2/2
8.	Інтегрування тригонометричних виразів.	2/2
9.	Інтегрування ірраціональних виразів.	2/2
Модуль 2.		
10.	Визначений інтеграл. Методи інтегрування.	2/2
11.	Обчислення площ плоских фігур. Довжина дуги.	2/2
12.	Обчислення об’ємів. Об’єми тіл обертання. Обчислення площ поверхонь обертання та інші застосування визначених інтегралів.	2/2
13.	Диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння з	2/2

	відокремлюваними змінними та однорідні.	
14.	Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння Бернуллі.	2/2
15.	Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку.	2/2
16.	Лінійні однорідні диференціальні рівняння 2-го порядку з сталими коефіцієнтами.	2/2
17.	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння 2-го порядку з сталими коефіцієнтами.	2/2
18.	Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння вищих порядків із сталими коефіцієнтами.	2/2

6. Самостійна робота
З КУРСУ «ВИЩА МАТЕМАТИКА»

№	Назва теми	Кількість годин	
		хімія	екологія
	І семестр		
1	Розв’язування систем лінійних рівнянь за правилом Крамера, методом Гауса, матричним способом.	8	8
2	Задачі на дії з векторами.	8	8
3	Розв’язування задач на пряму.	4	4
4	Побудова кривих другого порядку.	4	4
5	Обчислення границь.	6	6
6	Диференціювання функцій.	6	6
7	Застосування похідних до знаходження границь.	2	2
8	Повне дослідження функцій та побудова їх графіків.	10	10
	ІІ семестр		
1	Диференціювання функцій багатьох змінних.	2	0
2	Дослідження функцій двох змінних на екстремум.	2	1
3	Методи знаходження невизначених інтегралів для різних класів функцій.	16	7

4	Визначений інтеграл.	4	1
5	Застосування визначених інтегралів.	4	1
6	Розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку: з відокремлюваними змінними, однорідних, що зводяться до однорідних, лінійних, Бернуллі та в повних диференціалах.	12	5
8	Дії з комплексними числами.	4	1
9	Розв'язування лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами.	4	2

7. Методи навчання

Видами навчальних занять згідно з навчальним планом є: а) лекції, б) практичні заняття, в) самостійна робота студентів.

8. Індивідуальні завдання

Завдання для модульних контрольних робіт

1. Розв'язати матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Серед векторів $\overline{a_i}$ знайти базис $\overline{a_1} = (-3,2,-1,3)$, $\overline{a_2} = (3,-1,2,-1)$, $\overline{a_3} = (0,1,1,2)$,
$\overline{a_4} = (0,-3,0,-2)$,
$\overline{a_5} = (1,2,-1,-3)$.

3. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

4. Обчислити $-2\overline{a} \cdot 5\overline{b}$, $\overline{a}(-1,2,3)$, $\overline{b}(2,3,-4)$.

5. Знайти вектор $\overline{b}$ колінеарний вектору $\overline{a} = (1,-3,5)$, якщо $|\overline{b}| = 2\sqrt{35}$.

Знайти висоту тетраедра побудованого на векторах $\overline{a} = (2,-1,3)$, $\overline{b} = (-4,2,-2)$, $\overline{c} = (3,-4,2)$.

6. Знайти $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\cos\dfrac{\pi x}{2}\ln(1-x)}$.

7. Знайти y', якщо $y = \ln \dfrac{\ln x}{\sin\dfrac{1}{x}}$.

8. Знайти dy, якщо $y = 2^x + 2^{-y}$.

9. Дослідити функцію на неперервність: $y = \dfrac{x^2+1}{2x^2+4x}$.

10. Дослідити функцію на екстремуми та проміжки монотонності: $y = x - \ln(x+1)$.

9. Методи контролю

1. Поточний контроль – фронтальне опитування, виконання практичних завдань.
2. Модульний контроль – колоквіум, виконання комплексних контрольних робіт та тестових завдань.
3. Підсумковий контроль – екзаменаційні білети, виконання тестових і практичних завдань.

Оцінка успішності студента з вищої математики є рейтинговою і виставляється за стобальною шкалою з урахуванням оцінок засвоєння окремих модулів.

10. Розподіл балів, які отримують студенти

<table>
<tr><td colspan="6">Поточне тестування та самостійна робота</td><td>Підсумковий тест (екзамен)</td><td>Сума</td></tr>
<tr><td colspan="6">1-й семестр</td><td rowspan="12">100</td><td rowspan="12">100</td></tr>
<tr><td colspan="3">Модуль №1</td><td colspan="3">Модуль №2</td></tr>
<tr><td colspan="3">ЗМ 1</td><td colspan="3">ЗМ 2</td></tr>
<tr><td>Т 1</td><td>Т 2</td><td>Т 3</td><td>Т 1</td><td>Т2</td><td>Т3</td></tr>
<tr><td>20</td><td>10</td><td>20</td><td>10</td><td>20</td><td>20</td></tr>
<tr><td colspan="6">2-й семестр</td></tr>
<tr><td colspan="3">Модуль №1</td><td colspan="3">Модуль №2</td></tr>
<tr><td colspan="3">ЗМ 1</td><td colspan="3">ЗМ 2</td></tr>
<tr><td>Т1</td><td>Т2</td><td>Т3</td><td colspan="2">Т1</td><td>Т2</td></tr>
<tr><td>10</td><td>5</td><td>35</td><td colspan="2">25</td><td>25</td></tr>
</table>

Шкала оцінювання: національна та ECTS

<table>
<tr><td rowspan="2">Сума балів за всі види навчальної діяльності</td><td rowspan="2">Оцінка ECTS</td><td colspan="2">Оцінка за національною шкалою</td></tr>
<tr><td>для екзамену, курсового проекту (роботи), практики</td><td>для заліку</td></tr>
<tr><td>90 – 100</td><td>A</td><td>відмінно</td><td rowspan="5">зараховано</td></tr>
<tr><td>82-89</td><td>B</td><td rowspan="2">добре</td></tr>
<tr><td>74-81</td><td>C</td></tr>
<tr><td>64-73</td><td>D</td><td rowspan="2">задовільно</td></tr>
<tr><td>60-63</td><td>E</td></tr>
<tr><td>35-59</td><td>FX</td><td>незадовільно з можливістю повторного складання</td><td>не зараховано з можливістю повторного складання</td></tr>
<tr><td>0-34</td><td>F</td><td>незадовільно з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td><td>не зараховано з обов’язковим повторним вивченням дисципліни</td></tr>
</table>

Критерій оцінювання з дисципліни

— **“відмінно"** (90 та вище балів) заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну і ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв'язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— **“добре"** (82-89 балів) заслуговує студент, який виявив повне знання програмного матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисциплін і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— **"добре"** (74-81 балів) заслуговує студент, що виявив не цілком повне знання програмного матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисциплін і не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— **"задовільно"** (64-73 балів) заслуговує студент, що виявив знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка “задовільно” виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача;

— **" задовільно "** (60-63 балів) заслуговує студент, що виявив часткове знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка “достатньо" виставляється студентам, що допустили грубі помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача.

— **"незадовільно"** (35-59 балів) виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмового матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

— **" незадовільно "** (0-34 балів) виставляється студенту коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

11. Методичне забезпечення

1. *Кондрук Н.Е., Маляр М.М., Смочкова Т.М. Стислий конспект лекцій з курсу «Вища математика» для студентів 1-го курсу хімічного факультету. Алгебра. Аналітична*

геометрія / Розробники: Н.Е. Кондрук, М.М. Маляр, Т.М. Смочкова – Ужгород, Вид-во УжНУ «Говерла» , 2012. – 48 с.
2. *Кондрук Н.Е. Конспект лекцій з курсу «Вища математика» для студентів 1-го курсу хімічного факультету. Вибрані розділи математичного аналізу / Розробники: Н.Е. Кондрук – Ужгород, Вид-во УжНУ «Говерла» , 2015. – 48 с.*

Орієнтований перелік питань, що виносяться на екзамен

(I курс, I семестр)

1. Визначники 2, 3, 4 порядків та їх властивості.
2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Теорема Крамера.
3. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод Гауса.
4. Матриці. Дії з матрицями.
5. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Метод оберненої матриці.
6. n-вимірний векторний простір. Базис. Розклад вектора по базису.
7. Вектори. Лінійно залежні та лінійно незалежні системи векторів.
8. Ранг матриці. Теорема Кронекера-Капеллі.
9. Геометричні вектори. Дії над векторами.
10. Довжина вектора. Орт вектора. Колінеарність векторів.
11. Скалярний добуток двох векторів. Властивості скалярного добутку. Умова перпендикулярності векторів.
12. Скалярний добуток двох векторів. Формули обчислення.
13. Векторний добуток. Умова колінеарності векторів. Компланарність векторів.
14. Множення ортів. Векторний добуток. Формули обчислення.
15. Мішаний добуток векторів. Формула обчислення в координатах. Геометричний зміст мішаного добутку.
16. Рівняння прямої на площині. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
17. Загальне рівняння прямої на площині. Взаємне розташування прямих.
18. Рівняння прямої на площині, що проходить через дві точки. Рівняння жмутка прямих.
19. Прямокутна декартова система координат на площині. Віддаль між точками.
20. Прямокутна декартова система координат на площині. Поділ відрізка в заданому відношенні.
21. Прямокутна декартова система координат на площині. Площа трикутника.
22. Нормальне рівняння прямої на площині. Віддаль від точки до прямої.
23. Криві 2-го порядку. Загальне рівняння кола та еліпса.
24. Загальне рівняння гіперболи та параболи.
25. Перетворення координат. Паралельний переніс.
26. Елементарні функції та їх графіки. Область визначення функцій.
27. Границя послідовності. Границя функції.
28. Нескінченно малі та великі величини. Теореми.
29. Основні теореми про границі. Правила обчислення границь.
30. Неперервність функції. Односторонні границі. Класифікація точок розриву.
31. Похідна та диференційованість функції. Геометричний зміст похідної рівняння дотичної.
32. Похідна деяких елементарних функцій: $y = \sin x$.
33. Похідна деяких елементарних функцій: $y = \ln x$.
34. Похідна деяких елементарних функцій: $y = \log_a x$.
35. Похідна деяких елементарних функцій: $y = \cos x$.
36. Правила диференціювання. Похідна $y = c, \quad y = ctgx$.
37. Правила диференціювання. Похідна $y = x, \quad y = tgx$.

38. Похідна складної функції. Похідна степеневої функції.
39. Похідна складної функції. Похідна показникової функції.
40. Похідна складної степенево-показникової функції.
41. Обернена функція та її диференціювання. Похідна $y = \arcsin x$.
42. Обернена функція та її диференціювання. Похідна $y = \arccos x$.
43. Обернена функція та її диференціювання. Похідна $y = arctgx$.
44. Обернена функція та її диференціювання. Похідна $y = arcctgx$.
45. Диференціал функції. Похідна та диференціали вищих порядків.
46. Параметрично задані функції та їх диференціювання. Правило Лопіталля.
47. Дослідження функції: проміжки зростання та спадання функції, екстремуми функції.
48. Дослідження функції: найбільше та найменше значення функції на проміжку, асимптоти.
49. Дослідження функції: проміжки опуклості та ввігнутості, точки перегину.

(I курс, II семестр)

1. Функції багатьох змінних. Лінії рівня. Деякі функції обертання.
2. Функції багатьох змінних. Частинні похідні та повний диференціал.
3. Функції багатьох змінних. Частинні похідні вищих порядків. Похідна неявної функції.
4. Похідна складних функцій декількох змінних.
5. Екстремум функції двох змінних.
6. Функції багатьох змінних. Градієнт функції.
7. Комплексні числа. Дії з комплексними числами.
8. Розв'язання рівнянь вищих степенів.
9. Первісна функція. Невизначений інтеграл та його властивості.
10. Методи інтегрування невизначених інтегралів. Метод заміни змінної.
11. Методи інтегрування невизначених інтегралів. Метод інтегрування частинами.
12. Невизначений інтеграл. Інтегрування дробово-раціональних виразів.
13. Невизначений інтеграл. Інтегрування найпростіших ірраціональних виразів.
14. Невизначений інтеграл. Інтегрування тригонометричних виразів.
15. Невизначений інтеграл. Тригонометричні підстановки при інтегруванні деяких ірраціональних виразів.
16. Визначений інтеграл. Формула Нютона-Лейбніца.
17. Геометричний зміст визначеного інтегралу.
18. Визначений інтеграл. Метод інтегрування частинами.
19. Визначений інтеграл. Метод заміни змінної.
20. Невласний інтеграл.
21. Застосування визначених інтегралів. Знаходження площ.
22. Застосування визначених інтегралів. Знаходження довжини дуги.
23. Застосування визначених інтегралів. Знаходження об'ємів тіл за площею поперечного перерізу.
24. Застосування визначених інтегралів. Знаходження об'ємів тіл обертання.
25. Застосування визначених інтегралів. Обчислення площ поверхонь тіл обертання.
26. Диференціальні рівняння. Загальні поняття.
27. Диференціальні рівняння першого порядку з відокремленими та відокремлюваними змінними.
28. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.
29. Рівняння, що зводяться до однорідних диференціальних рівнянь першого порядку.
30. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.
31. Рівняння Бернуллі.
32. Диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння виду: $f\left(x, y^{(n)}\right) = 0$.
33. Диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння виду: $f\left(y^{(n-1)}, y^{(n)}\right) = 0$.

34. Диференціальні рівняння вищих порядків. Рівняння виду: $f\left(y, y', y''\right) = 0$.
35. Однорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.
36. Однорідні лінійні диференціальні рівняння вищих порядків із сталими коефіцієнтами.
37. Знаходження частинного розв'язку лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами.
38. Метод варіації довільних сталих при розв'язанні лінійних неоднорідних рівнянь другого порядку із сталими коефіцієнтами.
39. Метод варіації довільних сталих при розв'язанні лінійних неоднорідних рівнянь вищих порядків із сталими коефіцієнтами.

ЛІТЕРАТУРА

Базова

1. Дубовик ВП. Юрик І.І. Вища математика: Навч. посіб. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.
2. Литвин І.І., Конопчук О.М., Желізняк Г.О. Вища математика. Навч. посіб. – К.: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с.
3. Вища математика. / за ред.. Шинкарика М.І./ Підручник. – Тернопіль, 2003. – 480 с.
4. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. Навч.посіб. – К.: Центр навчальної літератури, – 2009. – 590 с.
5. Архіпова О.С., Протопопова В.П., Пахомова Є.С. Посібник для розв'язання типових задач з курсу вищої математики. – Харків: ХНАМГ. – 2008. – 210 с.
6. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. -М.: Наука, 1986.

Допоміжна

1. Кострикин А. И. Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977.
2. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.
3. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1, 2. – М.: Гостехиздат, 1951. – 654 с.