МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

Методичні рекомендації до вивчення курсу

«Системи та методи прийняття рішень» для студентів 4-го курсу

спеціальності "Прикладна математика" математичного факультету

УжНУ

Ужгород-2015

Методичні рекомендації до вивчення курсу «Системи та методи прийняття рішень» для студентів 4-го курсу спеціальності "Прикладна математика" математичного факультету УжНУ */ Розробник: Н.Е. Кондрук – Ужгород: УжНУ, 2015. – 48 с.*

Рекомендовано до друку кафедрою кібернетики і прикладної математики ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол №10 від 12 червня 2015 року.

Рекомендовано до друку методичною комісією математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол №7 від 31 серпня 2015 року.

Рекомендовано до друку вченою радою математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет", протокол №11 від 19, 26 червня 2015 року.

Розробник:

Кондрук Н.Е., к.т.н., доцент кафедри кібернетики і прикладної математики (ДВНЗ "Ужгородський національний університет").

Рецензенти:

Глебена М.І., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри системного аналізу та теорії оптимізації (ДВНЗ "Ужгородський національний університет");

Ніколенко В.В., к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедри кібернетики і прикладної математики (ДВНЗ "Ужгородський національний університет").

ЗМІСТ

ВСТУП

Проблема прийняття рішень, як і управління в цілому, природно привертають велику увагу як дослідників, котрі працюють у різних наукових напрямах, так і практиків-організаторів. Головним призначенням методології прийняття рішень є розробка методів, підходів, алгоритмів, моделей, що дають змогу обґрунтувати вибір найкращого рішення в різних складних процесах та ситуаціях.

Характерною рисою будь-якої ситуації, пов'язаної з прийняттям рішення, є наявність великої кількості варіантів дій, із яких необхідно вибрати найкращий. Рішення — це вибір відповідного курсу дій з можливих варіантів. Під рішенням розуміється і визначеність дій до об'єкта управління (план, інструкція, наказ тощо). Вибір найкращого варіанта є прийняттям рішення. Процес, який включає розробку альтернатив, є процесом прийняття рішень.

Наукове обґрунтування прийняття оптимального управлінського рішення є комплексною проблемою, що включає техніку, технологію, економіко-математичні методи, теорію інформації, логіку, економіку, психологію поведінки людей.

Дана методична розробка містить робочу програму, типові варіанти комплексних контрольних робіт і основні теоретичні відомості дисципліни «Системи та методи прийняття рішень» для студентів 4-го курсу напряму підготовки 6.040301 – Прикладна математика, кваліфікації – Бакалавр прикладної математики.

І. ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ ВИБРАНИХ РОЗДІЛІВ ТЕОРІЇ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

1.1. Загальна задача прийняття рішень

Тео́рія прийняття рі́шень — галузь досліджень, яка математичними методами досліджує закономірності вибору людьми найвигідніших із можливих альтернатив і має застосування в економіці, менеджменті, когнітивній психології, інформатиці та обчислювальній техніці.

Задача прийняття рішень(ЗПР) – це така задача, яка може бути сформульована в термінах цілі, засоби, результати.

Класифікація ЗПР здійснюється в двох аспектах:

1) Класифікація по опису засобів, результатів та зв`язків між ними.

2) Класифікація по опису цілі ЗПР.

Визначають наступні множини:

1. X - множина альтернатив, тобто засобів, що ми вибираємо.

2. S - множина станів зовнішнього середовища, яка характеризує прояв невизначеності в процесі прийняття рішення.

3. Z - множина наслідків, результат розв'язку ЗПР.

Відображення $X \times S \rightarrow Z$ - відображає зв'язок між засобами і рішеннями .

Типи звязків між даними множинами визначають різні види ЗПР.

---

1) Найпростіший тип зв'язку - детермінований , коли кожна альтернатива приводить до одного наслідку. В цьому випадку існує функціональна залежність між альтернативою x і наслідком z . Такі ЗПР називаються детермінованими.

2) Не детермінований тип, тобто кожній альтернативі відповідає не один і той самий наслідок. Якщо відомо з якою ймовірністю кожній альтернативі буде відповідати наслідок , тоді маємо статистичну залежність між x й z . В цьому випадку ЗПР називається задачею в умовах ризику або стохастичної невизначеності.

3) ЗПР проходить в умовах невизначеності, тобто відображення між множинами X та Z неоднозначне, але статистична залежність відсутня. Тут існують два випадки: - якщо S поводить себе пасивно до ОПР(є проявом стихії, природи), то маємо ЗПР в невизначених умовах. - якщо S поводить себе активно до ОПР, тобто бере участь інша особа, тварина і т.д. ЗПР в умовах конфлікту (гри).

4) Якщо хоч одна з множин є нечіткою, чи нечітким є відображення $X \times S \rightarrow Z$ тоді кажуть, що ПР проходить в умовах нечіткої інформації .

У процесі розв'язку загальної задачі прийняття рішень, як правило, беруть участь три групи осіб: *особи, що приймають рішення* (ОПР), *експерти* (Е) та *консультанти* (К).

ОПР називають людину (або колективний орган такий як науковий заклад, Верховна рада тощо), що має (формує) ціль, котра служить мотивом постановки задачі та пошуку її розв'язання. ОПР визначає також, які засоби є допустимими (недопустимими) для досягнення мети.

Експерт – це спеціаліст у своїй галузі, що володіє інформацією про задачу, але не несе прямої відповідальності за результати її розв'язання. Експерти допомагають ОПР на всіх стадіях постановки та розв'язання ЗПР.

Аналітиками (консультантами, дослідниками) називають спеціалістів з теорії прийняття рішень. Вони розробляють модель (математичну, інформаційну і т.п.) задачі прийняття рішень (ЗПР), процедури прийняття рішень, організовують роботу ОПР і експертів.

1.2. Бінарні відношення

Апарат бінарних відношень у теорії прийняття рішень є теоретичним підґрунтям для оцінювання переваг альтернатив шляхом попарних порівнянь. Такий підхід достатньо поширений, оскільки він дає змогу виявляти переваги ОПР чи експертів «у чистому вигляді»: ОПР значно простіше порівняти дві альтернативи, ніж багато. Нехай задана множина альтернатив (об'єктів) Ω, принцип оптимальності безпосередньо у числовій формі не задано, але експерт для деяких пар об'єктів може вказати, який з об'єктів пари кращий (переважає) за іншого. У цьому випадку говоритимемо, що ці два об'єкти знаходяться у бінарному відношенні.

Бінарним відношенням R на множині Ω називається довільна підмножина R декартового добутку $\Omega\times\Omega$ (нагадаймо, що декартовим добутком двох множин A і B називається множина пар елементів (a,b), де $a\in A$, $b\in B$). Якщо пара елементів x і y знаходиться у бінарному відношенні R, то будемо позначати цей факт як $(x,y)\in R$ або xRy.

Крім безпосереднього задання всіх пар, для котрих виконується відношення R, існує три основних способи задання відношень: матрицею, графом, перетинами.

Нехай множина Ω містить n елементів: $\Omega=\{x_1,\dots,x_n\}$. Тоді матриця бінарного відношення $A(R)$ задається елементами a_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$: $a_{ij}(R)=1$, якщо x_iRx_j; $a_{ij}(R)=0$, якщо не виконується x_iRx_j. З іншого боку, якщо задана матриця A розміром $n\times n$ з нулів і одиниць та вибрано нумерацію елементів множини Ω, що складається з n елементів, то тим самим на Ω задається деяке відношення $R=R(A)$ таке, що x_iRx_j, виконано тоді і лише тоді, коли $a_{ij}(R)=1$.

Задання бінарного відношення R графом здійснюється наступним чином. Елементам скінченої множини $\Omega=\{x_1,\dots,x_n\}$ (при деякій нумерації) ставиться у взаємно-однозначну відповідність вершини графа G. Проведемо дугу від вершини x_i до вершини x_j тоді і лише тоді, коли виконується x_iRx_j (при $i=j$ дуга (x_i,x_j) перетворюється у петлю при вершині x_i).

Якщо задано довільний граф G з n вершинами і вибрано нумерацію на множині Ω, то тим самим на Ω задається деяке відношення $R=R(\Omega)$ таке, що x_iRx_j виконується тоді і лише тоді, коли у графі G є дуга (x_i,x_j). Граф є геометричним представленням відношення аналогічно тому, як графік є геометричним представленням функції. Геометрична мова корисна, якщо граф достатньо простий. Навпаки, вивчати й описувати складні графи з великою кількістю вершин часто зручно у термінах відношень.

Універсальним способом задання відношень (зокрема, на нескінченних областях) є задання за допомогою перетинів.

Верхнім перетином $R^{+}(x)$ називається множина елементів $y \in \Omega$ таких, що $(y,x) \in R$: $R^{+}(x) = \{y \in \Omega:\ (y,x) \in R\}$. Аналогічно задається *нижній перетин*: $R^{-}(x) = \{y \in \Omega:\ (x,y) \in R\}$.

Види стандартних бінарних відношень

♦ Відношення називається *порожнім* і позначається $\varnothing$, якщо воно не виконується ні для однієї пари $(x,y) \in \Omega^2 \equiv \Omega \times \Omega$.

Відношення *U* називається *повним,* якщо $U = \Omega^2$ (воно виконується для всіх пар $(x,y) \in \Omega^2$).

Відношення *E* називається *діагональним* (або відношенням рівності або одиничним відношенням), якщо *xEy* тоді і лише тоді, коли *x*=*y* (позначатимемо: *xEy* $\Leftrightarrow$ *x*=*y*).

Відношення $\bar{E}$ називається *антидіагональним*, якщо $x\bar{E}y \Leftrightarrow x \neq y$.

Основні операції над бінарними відношеннями

- Відношення R_1 і R_2 *рівні* ($R_1 = R_2$), якщо $xR_1y \Leftrightarrow xR_2y$, $\forall\ (x,y) \in R_1, R_2$.
- Відношення R_1 *вкладається* у відношення R_2 (позначається $R_1 \subseteq R_2$), якщо з xR_1y випливає xR_2y.
- Відношення R_1 *строго вкладається* у відношення R_2 ($R_1 \subset R_2$), якщо $R_1 \subseteq R_2$ і $R_1 \neq R_2$.
- Відношення $\bar{R}$ називається *доповненням* до відношення *R*, якщо $\bar{R} = \Omega^2 \setminus R$, тобто воно виконується для тих і лише тих пар, для яких не виконується відношення *R*.

  Легко бачити, що $\bar{\varnothing} = U$, $\bar{U} = \varnothing$, антидіагональне відношення $\bar{E}$ є доповненням діагонального відношення *E*.

  В загальному випадку $\bar{\bar{R}} = \Omega^2 \setminus (\Omega^2 \setminus R) = R$.

- *Перетином* відношень R_1 і R_2 (позначається $R_1 \cap R_2$) називається відношення, що визначається перетином відповідних підмножин з Ω^2.

- *Оберненим* до відношення R називається відношення R^{-1}, що визначається умовою: $xR^{-1}y \Leftrightarrow yRx$.
- *Двоїстим* до R називається відношення $R^d = \left(\overline{R^{-1}}\right)$ або, у силу попереднього, $R^d = \left(\overline{R}\right)^{-1}$.
- *Добутком* відношень R_1 і R_2 називається відношення $R = R_1 \cdot R_2$, що визначається наступним чином: існує $z \in \Omega$ таке, що xR_1z і zR_2y. Для добутку відношень виконується асоціативний закон: $(R_1 \cdot R_2) \cdot R_3 = R_1 \cdot (R_2 \cdot R_3)$, тобто добуток $R_1 \cdot R_2 \cdot R_3$ визначається однозначно. Зокрема, $R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_n = R^n$. Легко показати, що матриця добутку відношень $A(R_1 \cdot R_2) = A(R_1) \cdot A(R_2)$, де добуток матриць $A^1 = A(R_1)$ і $A^2 = A(R_2)$ визначається формулою: $a_{ik} = \bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{ij}^1 \wedge a_{jk}^2\right)$.

Основні властивості бінарних відношень

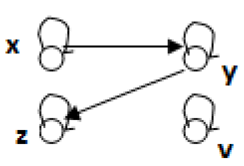
Рефлексивність. Відношення *R* називається рефлексивним, якщо для $\forall x$, *xRx*.

Критерій рефлективності: *R* – рефлексивне $\Leftrightarrow$ $E \subseteq R$, де *E* – діагональне відношення.

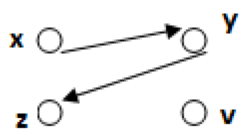
У матриці *A(R)* рефлексивного відношення на головній діагоналі стоять одиниці; у графі *G(R)* при кожній вершині мається петля; $x \in R^+(x)$, $x \in R^-(x)$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Антирефлексивність (іррефлексивність). Відношення *R* називається антирефлексивним, якщо з *xRy* випливає $x \neq y$.

Критерій антирефлективності: *R* – антирефлексивне $\Leftrightarrow$ $R \subseteq \overline{E}$.



рефлексивність



іррефлексивність

У матриці *A(R)* антирефлексивного відношення на головній діагоналі стоять нулі; у графі *G(R)* відсутні петлі; $x \notin R^+(x)$, $x \notin R^-(x)$ для $\forall\ x \in \Omega$.

Симетричність. Відношення *R* називається симетричним, якщо з *xRy* випливає *yRx*.

Критерій симетричності: *R* – симетричне $\Leftrightarrow$ $R \subseteq R^{-1}$.

Матриця *A(R)* симетричного відношення *R* симетрична ($a_{ij}=a_{ji}$ для $\forall i,j$); у графі *G(R)* разом з кожною дугою (x,y) входить і дуга (y,x); $R^{+}(x)=R^{-}(x)$ для $\forall\, x\in\Omega$.

Асиметричність. Відношення *R* називається асиметричним, якщо з *xRy* випливає $y\overline{R}x$.

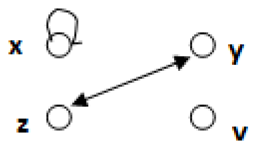
Критерій асиметричності: *R* – асиметричне $\Leftrightarrow$ $R\cap R^{-1}=\varnothing$.

У матриці *A(R)* асиметричного відношення $a_{ij}(R)\wedge a_{ji}(R)=0$ для $\forall i,j$; граф *G(R)* не може мати одночасно дуг (x,y) і (y,x); для $\forall\, x\in\Omega$ і $\forall\, y\in R^{-}(x)$, $x\notin R^{-}(y)$.

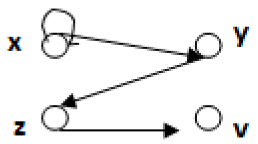
Антисиметричність. Відношення *R* називається антисиметричним, якщо з *xRy* і *yRx* випливає *x=y*.

Критерій антисиметричності: *R* – антисиметричне $\Leftrightarrow$ $R\cap R^{-1}\subseteq E$.

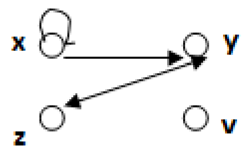
У матриці *A(R)* антисиметричного відношення для $i\neq j$, $a_{ij}(R)\wedge a_{ji}(R)=0$; граф *G(R)* не може містити одночасно дуги (x,y) і (y,x) при $x\neq y$; для $\forall\, x\in\Omega$ і $y\in R^{-}(x)$, $x\neq y$, $x\notin R^{-}(y)$.



симетричність

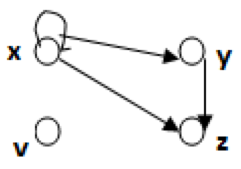


антисиметричність



асиметричність

Транзитивність. Відношення *R* називається транзитивним, якщо з *xRz* і *zRy* випливає *xRy*.



транзитивність

Критерій транзитивності: *R* – транзитивне $\Leftrightarrow$ $R^{2}\subseteq R$.

У матриці *A(R)* транзитивного відношення для $\forall i,\ k$ $\bigvee_{j=1}^{n}\left(a_{ij}(R)\wedge a_{ik}(R)\right)\le a_{ik}(R)$; у графі *G(R)* існує дуга (x,y), якщо існує шлях з *x* в *y*; для $\forall\, x\in\Omega$ і $y\in R^{+}(x)$ $R^{+}(y)\subseteq R^{+}(x)$.

Ациклічність. Відношення *R* називається ациклічним, якщо з xRz_1, $z_1Rz_2,\ldots,$ $z_{k-1}Ry$ випливає $x\neq y$.

Якщо точки *x* і *y* в графі ациклічного відношення з'єднані шляхом, то у ньому не має дуги (y,x); якщо $z_1\in R^{-}(x)$, $z_2\in R^{-}(z_1)$, …, $y\in R^{-}(z_{k-1})$, то $x\notin R^{-}(y)$ (аналогічні співвідношення виконуються для верхніх перерізів).

Негативна транзитивність. Відношення R називається негативно транзитивним, якщо його доповнення $\overline{R}$ транзитивне.

Сильна транзитивність. Відношення R називається сильно транзитивним, якщо воно одночасно транзитивне і негативно транзитивне.

Зв'язність. Відношення R називається зв'язним, якщо виконується $(xRy \vee yRx) \vee (xRy \wedge yRx)$, тобто між будь-якими вершинами x і y існують дуги (зокрема, петлі).

Використаємо розглянуті властивості для виділення відношень, важливих для теорії вибору та прийняття рішень (таблиця 1).

Таблиця 1

Властивість / Назва	Рефлексивність	Антирефлексив-ність	Симетричність	Асиметричність	Антисиметричн.	Транзитивність	Зв'язність
Перевага	*						
Подібність (толерантність)	*		*				
Еквівалентність	*		*			*	
Квазіпорядок	*					*	
Впорядкування	*					*	*
Частковий порядок	*				*	*	
Лінійний порядок	*				*	*	*
Строгий квазіпорядок		*				*	
Строгий порядок		*			*	*	

Відношення еквівалентності (еквівалентність). Відношення R називається відношенням еквівалентності, якщо воно рефлексивне, симетричне і транзитивне (позначення "$\cong$"). Нехай задано розбиття $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Введемо на Ω наступне відношення R: xRy тоді і лише тоді, коли існує підмножина Ω_i, що містить x і y. Легко перевірити, що задання еквівалентності на деякій підмножині Ω рівносильне розбиттю на класи еквівалентних один одному елементів. Навпаки, будь-яке розбиття Ω визначає відповідну йому еквівалентність.

Вибір кращого (кращих) елементів множини здійснюється за допомогою поняття R – оптимальності.

Елемент $x \in \Omega$ називається *максимумом за відношенням* R (R – максимумом), якщо xRy для $\forall\ y \in \Omega$. Аналогічно визначається R – мінімум x: yRx для $\forall\ y \in \Omega$.

R– максимуми і R– мінімуми можуть як існувати, так і не існувати, у випадку існування можуть бути не єдиними. Так, для відношення "більше або рівне" на множині дійсних чисел не існує ні максимуму ні мінімуму.

Мовою графів поняття максимального елемента відповідає наявності вершини, з'єднаної вихідними стрілками з усіма іншими вершинами графа. При цьому можуть бути присутні і будь-які інші додаткові сполучення.

Елемент $x \in \Omega$ називається *мажорантою за відношенням* R (R– мажорантою), якщо $y\overline{R}x$ для $\forall\ y \in \Omega$. Аналогічно визначається R– *міноранта* $x \in \Omega$: $x\overline{R}y$ для $\forall\ y \in \Omega$.

Позначимо через $\Omega^{+}(R)$ – множину R– максимумів, $\Omega_{+}(R)$ – R– мажорант, $\Omega^{-}(R)$ – R– мінімумів, $\Omega_{-}(R)$ – R– мінорант.

1.3. Функції вибору

Залежно від характеру системи переваг ОПР змінюються й альтернативи, обрані з пред’явлених для вибору в певній ситуації. Це зумовлено тим, що в одній і тій самій ситуації уявлення різних осіб про кращі альтернативи можуть суттєво різнитися. При цьому ОПР зазвичай раціонально обґрунтовують вибір. Отже, бінарне відношення порівняльності P, побудоване для конкретної ситуації, чинне лише для конкретного ОПР й лише для цієї ситуації. Це означає, що за відомим вибором у конкретній ситуації неможливо дійти певних висновків щодо причин, що спонукали вибрати саме ці альтернативи, а не інші.

Щоб вийти з цього положення, доцільно розглядати множину можливих альтернатив у, подібних ситуаціях прийняття рішень, і формалізувати поняття вибору для них. У конкретній ситуації розглядають певну підмножину Х множини можливих альтерна- тив *A* ($X \subseteq A$), і вибирають з альтернатив, що належать цій множині *X*. Для формалізації вибору у взаємозалежних (через множину можливих альтернатив *A*) ситуаціях використовують поняття функції вибору.

Нехай задано скінченну множину альтернатив $\Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ і ОПР, користуючись своїм особистим уявленням про кращі альтернативи, для кожної множини $X \subseteq \Omega$ вибирає підмножину кращих *C(X)*. Єдина вимога, яка накладається на вибір: $C(X) \subseteq X$ – кращі альтернативи можна вибирати з того, що пропонують, зокрема, $C(\varnothing) = \varnothing$.

Будемо називати *функцією вибору C*, задану на Ω, відображення, що зпівставляє кожній підмножині $X \subseteq \Omega$ її підмножину $C(X)$, тобто $C:\ 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$, $C(X) \subseteq X$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Вибір найпростіше здійснювати, порівнюючи дві альтернативи, тобто на Ω задавати деяке бінарне відношення *R*. Тоді розглядаючи звуження цього бінарного відношення на будь-яку підмножину $X \subseteq \Omega$ можна задати дві функції: $C^R(X) = \{x \in X |\ \forall y \in X\ \ y\bar{R}x\}$ – множина мажорант на множині *X*; $C_R(X) = \{x \in X |\ \forall y \in X\ \ xRy\}$ – множина максимумів на *X*. Функція вибору C^R називається *блокуванням*, C_R – *перевагою*.

Функція вибору має задовольняти умову $(\forall Z \subseteq X): x \in C(X) \cap Z \Rightarrow x \in C(Z).$ Ця умова відповідає вибору «серед кращих» альтернатив. Інакше кажучи, вибір в конкретній ситуації кращих альтернатив із підмножини *Z* множини X, для якої задано функцію вибору, дасть у результаті підмножину кращих у множині X альтернатив *C(X)* ∩ *Z*, які водночас належать підмножині Z (рис. 3.1). Якщо *C(Z)* - порожня, то формально можна вважати, що виникає ситуація відмови від вибору. Функцію вибору можна поставити у відповідність кожному бінарному відношенню R із носієм A. Нехай для вибору пред’явлено довільну підмножину *X* ⊆ *A*. Відношення R звужується на множину X і функцію вибору можна визначити двома способами. З одного боку, це всі елементи *x* ∈ *X*, з якими не перебуває у відношенні R жоден еле- мент *y* ∈ *X*, тобто мажоранти множини X за звуженням відношення R на X. З іншого боку, це ті елементи *x* ∈ *X*, для яких *xRy* для всіх y ∈ X, тобто максимуми множини X за звуженням відношення R на X.

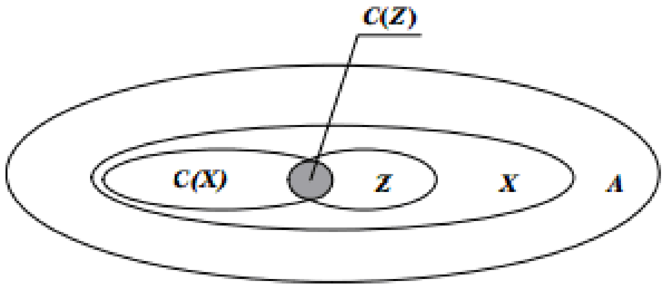


Рис. 3.1. Графічна інтерпретація вибору

З властивостей бінарних відношень безпосередньо випливає

Теорема 3.1. Функції вибору C^R *і* C_R *зв'язані співвідношеннями* $C^R = C_{R^d}$, $C_R = C^{R^d}$, *де* R^d *– двоїсте до R.*

Таким чином, з двох функцій вибору, що породжуються заданим бінарним відношенням *R*, досить розглядати одну. Далі будемо співставляти бінарному відношенню *R* функцію блокування C^R і називати її "функцією вибору, породжену бінарним відношенням *R*". Такі функції називаються *нормальними*. Довільна функція вибору *C* не обов'язково є нормальною.

Для формального описання класу нормальних функцій вибору визначимо для $X \subseteq \Omega$ покриваюче сімейство $\{X_i\}$, $X_i \subseteq \Omega$, $i \in J$, таке, що $X \subseteq \bigcup_{i \in J} X_i$.

Зручним апаратом для представлення функцій вибору є булеві функції.

Будь-якій підмножині $X \subseteq \Omega = \{x_1, ..., x_n\}$ співставимо вектор:

$\beta(X) = (\beta_i(X))_{i=\overline{1,n}}$, де $\beta_i(X) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_i \in X, \\ 0, & \text{якщо } x_i \notin X. \end{cases}$

Множині Ω відповідає, зокрема, вектор $\beta(\Omega) = (1, ..., 1)$ (*n* одиниць), множині $\varnothing$ – вектор $\beta(\varnothing) = (0, ..., 0)$ (*n* нулів).

Нехай на Ω задано функцію вибору *C*. Розглянемо сімейство з *n* бульових функцій від *n-1* змінної $f_i(\gamma_1, ..., \gamma_{n-1}), i = \overline{1,n}$, побудованих за правилом:

$$\beta_i(X) \wedge f_i(\beta(X)) = 1 \Leftrightarrow x_i \in C(X), \tag{3.1}$$

де $f_i(\beta) = f_i(\beta_1, ..., \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, ..., \beta_n)$, $i \neq 1$, $i \neq n$, $f_1(\beta) = f_1(\beta_2, ..., \beta_n)$, $f_n(\beta) = f_n(\beta_1, ..., \beta_{n-1})$.

Логічною формою функції вибору С (ЛФФВ(С)) називається сімейство функцій $\langle f_1, ..., f_n \rangle$ від *n-1* змінної, побудованих за формулою (3.1).

Навпаки, якщо задане довільне сімейство бульових функцій $\langle f_1,..., f_n\rangle$ від *n-1* змінної, то співвідношення (3.1) однозначно визначає функцію вибору *С*. Отже, задання функції вибору є еквівалентним заданню ЛФФВ(С).

Представлення функцій вибору (ФВ) їх логічними формами створює єдину основу для дослідження всіх властивостей функцій вибору, їх класифікації та декомпозиції на більш прості.

Операції над функціями вибору

Функція вибору C_1 *вкладається* у функцію вибору $C_2\,(C_1 \subseteq C_2)$, якщо $C_1(X) \subseteq C_2(X)$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Об'єднанням ФВ C_1 і C_2 називається функція вибору $C = C_1 \cup C_2$, що визначається : $C(X) = C_1(X) \cup C_2(X)$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Перетин визначається : $C(X) = C_1(X) \cap C_2(X)$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Доповненням до ФВ *С* називається функція $\overline{C}$, для якої: $\overline{C}(X) = X \setminus C(X)$, $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Теорема 3.4. Нехай 1) $C_1 \subseteq C_2$; *2)* $C = C_1 \cup C_2$; *3)* $C = C_1 \cap C_2$; *4) задано* $\overline{C}$. *Тоді для* $\forall\ i = \overline{1,n}$ *:1)* $f_i^{C_1} \le f_i^{C_2}$; *2)* $f_i^{C} = f_i^{C_1} \vee f_i^{C_2}$; *3)* $f_i^{C} = f_i^{C_1} \wedge f_i^{C_2}$; *4)* $f_i^{\overline{C}} = \bar{f}_i^{C}$.

Композицією функцій вибору C_1 і C_2 називається функція вибору $C = C_1 \cdot C_2$, що визначається рівністю: $C(X) = C_2(C_1(X))$ для $\forall\ X \subseteq \Omega$.

Теорема 3.5. Нехай $C = C_1 \cdot C_2$. *Тоді*

$$f_i^{C} = f_i^{C_1}(\beta_1,...,\beta_{i-1},\beta_{i+1},...,\beta_n) \wedge\ f_i^{C_2}(\beta_1 \wedge f_i^{C_1}(\beta_2,...,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},...,\beta_n), \ldots,$$

$$\beta_{i-1} \wedge f_{i-1}^{C_1}(\beta_1,...,\beta_{i-2},1,\beta_i,...,\beta_n),\ \beta_{i+1} \wedge f_{i+1}^{C_1}(\beta_2,...,\beta_{i-1},1,\beta_{i+2},...,\beta_n),$$

$$,\ldots, \beta_n \wedge f_n^{C_1}(\beta_2,...,\beta_{i-1},1,\beta_{i+1},...,\beta_{n-1}))\ .$$

Найбільш уживані в теорії вибору властивості та відповідні їм класи функцій вибору.

1.Умова *спадковості* (СП): $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow X_1 \cap C(X_2) \subseteq C(X_1)$.

2.Умова *незалежності від відкинутих альтернатив* (умова Неша – Н): $C(X_2) \subseteq X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow C(X_1) = C(X_2)$.

3.Умова *згоди* (З): $\bigcap\limits_k C(X_k) \subseteq C\left(\bigcup\limits_k X_k\right)$.

4.Умова *незалежності вибору від шляху* (умова Плотта – П (квазісуматорність)): $C\left(\bigcup_k X_k\right)=C\left(\bigcup_k C(X_k)\right)$.

5.Умова *суматорності* (СМ): $C\left(\bigcup_k X_k\right)=\bigcup_k C(X_k)$.

6.Умова *мультиплікаторності* (МП): $C\left(\bigcap_k X_k\right)=\bigcap_k C(X_k)$.

7.Умова *монотонності* (М): $X_1 \subseteq X_2 \Rightarrow C(X_1) \subseteq C(X_2)$.

Ці умови відображаються й у логічній формі функції вибору, що використовується для доведення деяких тверджень. Отже, за допомогою поняття функції вибору, вдається сформулювати низку умов, які мають виконуватися для забезпечення процедури раціонального вибору – вибору з «кращих» у певному сенсі альтернатив. Апарат функцій вибору зручний для формулювання змістовних властивостей, за виконання яких вибір можна вважати «розумним», «несуперечливим», «раціональним», а також дослідження та формалізації різноманітних механізмів і принципів вибору

1.4. Експертні процедури для прийняття рішень

Загальна схема експертизи [1]

Аналіз існуючих експертиз показує, що у процесі їх побудови можна виділити наступну послідовність дій.

1. Дослідник (консультант) знаходить множину "можливих" оцінок Ω, у якій знаходиться шукана оцінка.

2. Дослідник (консультант) визначає множину допустимих оцінок $\tilde{\Omega}$, з котрої здійснюють вибір експерти.

3. Кожен експерт вибирає свою оцінку $a_i = C_i(\tilde{\Omega}) \in \tilde{\Omega}$, $i=\overline{1,n}$, тобто розв'язує задачу вибору найкращої оцінки з $\tilde{\Omega}$.

4. Дослідник (аналітик) проводить обробку отриманої від експертів інформації й знаходить результуючу (інтегральну, колективну) оцінку з $\tilde{\Omega}$, котра приймається за розв'язок початкової задачі оцінювання.

5. Якщо отриманий розв'язок не задовольняє дослідника, він може організувати "обернений зв'язок", після чого експерти знову розв'язують відповідні задачі вибору.

На рис. 4.1. представлено блок-схему експертизи. Її параметри:

Ω – множина можливих оцінок; $\tilde{\Omega}$ – множина допустимих оцінок;

L – взаємодія між експертами; Q – обернений зв'язок; φ – обробка (відображення $\tilde{\Omega}^n \to \Omega$).

Назвемо *схемою* експертизи п'ятірку параметрів, що представлені на блок-схемі. Під підготовкою експертизи будемо розуміти попередню розробку схеми експертизи та підбір експертів, під реалізацією експертизи – отримання інформації та її обробку.

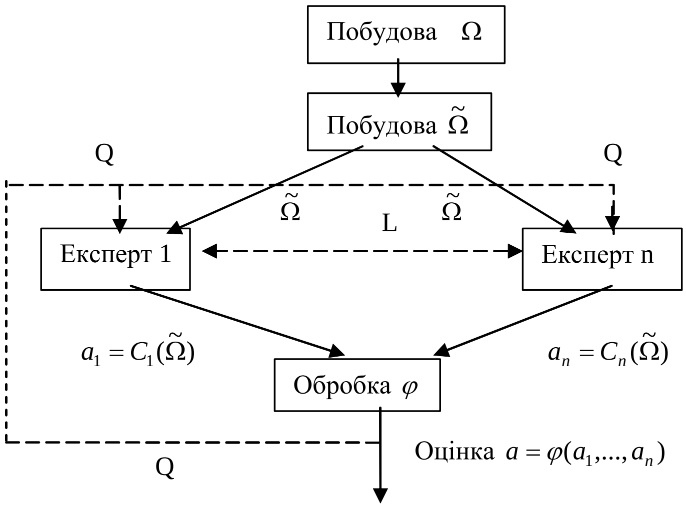


Рис.4.1. Блок-схема експертизи

Види задач експертного оцінювання

1) *Задача попарного порівняння* полягає у знаходженні кращого з двох об'єктів A і B. При цьому $\Omega = \{0,1\}$, $C(\Omega) = \{1 | A$ краще за $B; 0 |$ інакше$\}$.

2) *Задача ранжування* полягає у впорядкуванні об'єктів за спаданням (зростанням) значення деякої ознаки.– множина перестановок натуральних чисел від 1 до n. При цьому $C(\Omega) = (s_1,..., s_n)$, де s_i – номер і – го об'єкта, $\Omega = \{(i_1,..., i_n)\}$.

3) *Задача класифікації* полягає у віднесенні елемента $x \in S$ до однієї з l підмножин $S_1,\dots,S_l$. При цьому $C(\Omega)=i$, якщо $x \in S_i$, $\Omega=\{1,\dots,l\}$.

4) *Задача чисельної оцінки* полягає у співставленні системі одного чи декількох чисел. При цьому $C(\Omega)=a$, якщо оцінкою системи є вектор $a \in E^m$, а $\Omega = E^m$.

В деяких випадках при підборі експертів використовують числові оцінки, що характеризують їх якості. Такі оцінки носять або статистичний характер, або ґрунтуються на результатах психології та соціоніки.

Степінь компетентності експертів, як правило, визначають на основі статистичного аналізу участі експерта у попередніх експертизах, отримуючи так звані ваги експертів α_i, $i=\overline{1,n}$. Нехай $a_{\Phi j}$ – фактична оцінка у j – й експертизі, a_{ij} – оцінка i -го експерта. Тоді відносна похибка i – го експерта у j – й експертизі $\varepsilon_{ij}=\left|a_{\Phi j}-a_{ij}\right| / a_{\Phi j}$, а його вага

$$\alpha_i=\left(\left(\sum_{s=1}^{k_i}\varepsilon_{is}\right)\Big/ k_i\right)\Bigg/\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\sum_{s=1}^{k_i}\varepsilon_{is}\right)\right)\Big/ k_i\right),$$

де k_i – кількість експертиз, у яких брав участь i-й експерт; як видно, α_i прямо залежить від його середньої похибки по усіх експертизах, і обернено – від суми середніх похибок усіх експертів, тому $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ [1].

Ваги експертів можна обраховувати й іншими способами, зокрема, враховувати їх психофізіологічні характеристики (схильність до ризику, "правдивість", "незалежність", "реалістичність" і т.п.). Задачу визначення ваги експертів, у свою чергу, можна розглядати як задачу обробки експертної інформації. У загальному випадку ваги експертів можна визначати у довільних шкалах, тоді, як правило, їх нормалізують: $\alpha_i'=\alpha_i \Big/ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$, де α_i – вага i-го експерта у довільній шкалі ($\alpha_i \ge 0, \forall i$; $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i>0$). Далі вважаємо ваги експертів нормалізованими.

Методи обробки експертної інформації

Методи обробки експертної інформації поділяються на три основні групи: статистичні методи, алгебраїчні методи й методи шкалювання.

Статистичні методи обробки експертної інформації для задачі чисельної оцінки

Нехай $\Omega = \tilde{\Omega} = E^1$, L – експерти ізольовані, Q – обернений зв'язок відсутній, $a = \varphi(a_1, ..., a_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$.

Тобто результуюча числова оцінка a знаходиться за формулою середньозваженого значення (математичного сподівання випадкової величини). За степінь узгодженості думок експертів служить дисперсія: $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a - a_i)^2$.

Як модифікація попередньої розглядається наступна експертиза [1]: $\Omega = \tilde{\Omega} = E^3$, $a = \varphi\left(a_1^1, a_1^2, a_1^3; ...; a_n^1, a_n^2, a_n^3\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\gamma_1 a_i^1 + \gamma_2 a_i^2 + \gamma_3 a_i^3}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$, де a_i^1 – "оптимістична" оцінка i-го експерта, a_i^2 – "реалістична" і a_i^3 – "песимістична". Для експерта – "реаліста" (психологічний тип експерта можна визначити відповідним тестуванням) доцільно покладати $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 4$, $\gamma_3 = 1$; для експерта – "оптиміста" $\gamma_1 = 3$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 2$ (він "завищує" оптимістичну оцінку), для експерта – "песиміста" $\gamma_1 = 2$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 3$ (він "занижує" оптимістичну оцінку). Степінь узгодженості між оцінками визначається величиною

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (a - a_i)^2 ,$$

де $\sigma_i^2 = \left(a_3^i - a_1^i\right) / \gamma_4$, γ_4 – степінь невпевненості i-го експерта у своїй оцінці (для експерта реаліста $\gamma_4 = 36$, для інших – $\gamma_4 = 25$).

Статистичні методи обробки експертної інформації для задачі ранжування

Експертиза полягає у співставленні індивідуальним ранжуванням експертів колективного ранжування: $\Omega = \tilde{\Omega} = \{$множина всіх перестановок m об'єктів$\}$, експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній.

Відображення φ визначається наступним чином. Кожен експерт задає місце (ранг) кожного об'єкта: r_{ij} – ранг j- го об'єкта, визначеного i- м експертом. Об'єкти впорядковуються у відповідності з величинами $r_j = \sum_{i=1}^{n} r_{ij}$, $j = \overline{1, m}$ (сума рангів кожного об'єкта по всіх експертизах; вважаємо, що експерти мають рівну компетентність) – на перше місце ставиться об'єкт з мінімальним r_j і т.д. Колективне ранжування може бути нестрогим (ми розглядаємо випадок строгих індивідуальних ранжувань).

Статистичні методи обробки експертної інформації для задачі попарного порівняння

Експертиза визначається для задачі знаходження колективного ранжування за нестрогими індивідуальними ранжуваннями за допомогою попарних порівнянь об'єктів.

Множина Ω така ж, як і в попередній; експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній, $\tilde{\Omega}$ – множина всіх матриць $A=(a_{ij})$, де $a_{ij}\in\{0,1\}$, $a_{ij}+a_{ji}=1$ $(i\neq j)$, $a_{ii}=0$, $i,j=\overline{1,m}$. Кожен експерт робить C_m^2 порівнянь, порівнюючи кожен об'єкт з кожним. Результат порівнянь i-го експерта представляється матрицею A^i розмірності $m\times m$, у якій $a_{jk}^i=1$ тоді й лише тоді, коли для i-го експерта об'єкт j переважає об'єкт k. Для будь-якої пари об'єктів або перший переважає другого, або навпаки; $a_{jj}=0$ за визначенням [2].

Матриця A^i, що задається i- м експертом $(i=\overline{1,m})$, є матрицею деякого бінарного відношення, котре називається відношенням переваги i- го експерта. Очевидно, що бінарне відношення, що задається матрицею A^i є повним, антирефлексивним, антисиметричним і, взагалі кажучи, не є ациклічним.

Відображення φ визначається наступним чином. Будується матриця $A=(a_{jk})=\sum_{i=1}^{n}A^i$, де $A^i=(a_{jk}^i)$ – матриця оцінок i-го експерта. Знаходяться величини $a_j=\sum_{k=1}^{m}a_{jk}$, $j=\overline{1,m}$. Об'єкт з максимальним a_j отримує ранг 1 (він переважає максимальну кількість інших об'єктів) і т.д.

Коефіцієнтом сумісності думок експертів називається величина:

$$\upsilon=\begin{cases}1-24d/m^3-m, & \text{якщо } m \text{ непарне},\\ 1-24d/m^3-4m, & \text{якщо } m \text{ парне},\end{cases}$$

де d – число циклів довжини 3 у матриці A. Величину υ для матриці A^i можна використовувати у якості оцінки компетентності i-го експерта.

Алгебраїчні методи обробки експертної інформації для задачі чисельної оцінки

Для визначення колективної числової оцінки алгебраїчним методом використовується експертиза: $\Omega = \tilde{\Omega} = E^1$, експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній. Відстань d між числовими оцінками a і b визначається як $d(a,b) = |a-b|$. У якості колективної оцінки a приймаються, наприклад, оцінки [1]:

$a \in Arg \min\limits_{a \in E^1} \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i d(a, a_i)$ (утилітарний критерій),

$a \in Arg \min\limits_{a \in E^1} \max\limits_{i=\overline{1,n}} \alpha_i d(a, a_i)$ (егалітарний критерій).

Для визначення колективного ранжування алгебраїчним методом експерти задають матриці $A^i = (a^i_{jk})$, у яких $a^i_{jk} = 1$ тоді й лише тоді, коли об'єкт i передує об'єкту k; якщо об'єкти j і k рівноцінні або $j = k$, $a_{jk} = 0$; якщо $a_{jk} = 1$ ($j \neq k$), то $a_{kj} = -1$.

Ранжування A і відповідну йому матрицю A будемо позначати одним символом.

Ранжування C *знаходиться між ранжуваннями* A *і* B, якщо для $\forall i, j = \overline{1,m}$ $a_{ij} \le c_{ij} \le b_{ij}$ або $a_{ij} \ge c_{ij} \ge b_{ij}$.

Відстань між ранжуваннями вводиться аксіоматично [1]:

A1. $d(A,B) \ge 0$, причому $d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

A2. $d(A,B) = d(B,A)$ (симетричність);

A3. $d(A,B) + d(B,C) \ge d(A,C)$, причому рівність досягається тоді й лише тоді, коли ранжування B знаходиться між ранжуваннями A і C (аксіома трикутника);

A4. При однакових перестановках об'єктів у ранжуваннях A і B відстань між отриманими ранжуваннями $d(A',B') = d(A,B)$ (інваріантність відносно позначень);

A5. Якщо двоє ранжувань відрізняються одне від одного лише на частині об'єктів, то відстань між початковими ранжуваннями дорівнює відстані між ранжуваннями лише цих об'єктів;

A6. Мінімальна додатня відстань між ранжуваннями дорівнює 1.

Теорема. Аксіоми A1–A6 однозначно визначають відстань (відстань Хемінга) $d(A,B)$ *при будь-якій довжині ранжувань* $m \ge 2$, *а формула:*

$d(A,B)=0.5\cdot\sum_{i,j=1}^{m}\left|a_{ij}-b_{ij}\right|$, *визначає єдину відстань* $d(A,B)$, *що задовольняє аксіомам A1–A6.*

Алгебраїчні методи обробки експертної інформації для задачі попарного порівняння

Нехай $\Omega=\tilde{\Omega}=\{$матриці A_i, елементи яких визначені вище$\}$, експерти ізольовані, обернений зв'язок відсутній. У якості відстані береться відстань Хемінга, колективне ранжування визначається критеріями:

$A^{KS}\in Arg\min\limits_{A\in\tilde{A}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d\left(A,A^i\right)$ (медіана Кемені–Снелла);

$A^{VG}\in Arg\min\limits_{A\in\tilde{A}}\max\limits_{i=\overline{1,m}}\alpha_i d\left(A,A^i\right)$ (компроміс);

$A^{SZ}\in Arg\min\limits_{A\in\tilde{A}}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i d^2\left(A,A^i\right)$ (середнє значення).

Вище $\tilde{A}$ – множина матриць $m\times m$ з елементами $a_{ij}\in\{+1,-1,0\}$, що відповідають ранжуванням (тобто матриці ациклічні). Як видно – критерій 1 відповідає принципу утилітаризма, критерій 2 – егалітаризма [2].

1.5. Методи голосування

Нехай $N=\{\overline{1,n}\}$ – множина "виборців", $A=\{a,b,c,...\}=\{a_1,a_2,...,a_m\}$ – множина "кандидатів". Кожен виборець задає "індивідуальну перевагу" на множині кандидатів у вигляді строгого ранжування, тобто задає лінійний порядок $L(A)$ (повне, транзитивне, асиметричне бінарне відношення). Система всіх індивідуальних переваг називається *профілем*.

Нехай на основі індивідуальних преваг необхідно знайти не лише "колективного" ("спільного") переможця, а й "колективний порядок". Причому, нехай, як і раніше індивідуальні переваги будуть строгими (кандидати в індивідуальних перевагах не повинні "ділити" місця), колективний же порядок може бути і нестрогим (єдиним розумним компромісом при рівноправності виборців і кандидатів у випадку переваг $a > b$ (одного виборця) і $b > a$ (в іншого), звичайно, буде $a = b$ (a і b "ділять" місце)). Найпростіший метод побудови колективного порядку за даним правилом голосування є наступний – переможець виключається з профілю, для отриманого профілю знову знаходиться переможець, який займає друге місце у колективній перевазі, і т.д.

Фундамент теорії голосування було закладено ще у другій половині XVIII сторіччя: Жан Шарль де Борда у 1770 році зробив доповідь на засіданні Академії наук «Про спосіб проведення виборів». Борда запропонував обирати «безсмертних» (членів Академії) за допомогою голосування, в ході якого кожен «виборець» ранжує власні вподобання. У відповідь на це інший провідний французький математик, маркіз де Кондорсе, запропонував метод «попарного порівняння» кандидатів, проте згодом сам дійшов висновку про деяку обмеженість такої процедури («парадокс Кондорсе»).

У різних джерелах запропоновані різноманітні критерії раціональні «критерії справедливості», яким повинна відповідати процедура.

1. «Анонімність». Під «анонімністю» розуміється принцип рівності виборців, тобто при фіксованих квотах (найпоширеніший випадок, коли кожному надається рівна кількість голосів) неважливо, хто саме обрав того чи іншого кандидата. Доволі влучне і лаконічне визначення дають американські автори Р. Кліма і Дж. Ходж: «Якщо будь-які два виборці поміняються бюлетенями, результат від цього не зміниться».

2. «Нейтральність». В деяких джерелах цей критерій має назву «зворотна симетрія» і визначається наступним принципом: симетрична зміна вподобань виборців призводить до відповідної зміни результату. У більш широкому сенсі умова «нейтральності» означає рівність кандидатів.

3. «Монотонність». Філіп де Страффін одним з перших звернув увагу на обов’язковість цієї умови і довів невідповідність їй моделі відносної більшості з вибуванням (саме ця процедура використовується в Україні для обрання президента). Дослідник визначає «критерій монотонності» наступним чином: «Якщо *X* – переможець голосування при K розкладі вподобань, то зміна думки *K'* на користь *X* не повинна позбавляти його підсумкової перемоги».

4. *«Транзитивність»*. Принцип транзитивності означає, що якщо кандидат *a* перемагає *b* у більшості попарних голосувань, а *b* перемагає *c*, то *a* повинно бути обраною з поміж пари *a-c*.

5. *«Відповідність більшості»*. За визначенням Ф. Алескерова: «Колективне рішення повинне обрати в якості переможця того кандидата, який є найбільш бажаною альтернативою для більшості виборців». Як не дивно, але саме цей, на перший погляд фундаментальний для демократичної системи критерій, стає нездоланним бар’єром для багатьох моделей голосування.

6. *«Незалежність від сторонніх альтернатив»*. Критерій за дефініцією Кліма і Ходжа: «Місце *a* і *b* в підсумковому списку залежить виключно від вподобань виборців у парі *a* і *b*».

7. *«Критерій Парето»*. Вільфредо Парето сформулював свою вимогу до процедури голосування: «Якщо кожен виборець вважає *x* кращою альтернативою за *y*, то голосування не повинно обрати *y* переможцем».

8. *«Критерій Сміта»*. Критерій Сміта часто називають «послабленою» модифікацією критерію Парето і полягає у наступному: якщо усі альтернативи можна розділи на два комплекти *a* і *b*, такі що кожна альтернатива з *a* у попарному голосуванні переможе будь-яку з *b*, то у підсумку переможцем не може бути обрана альтернатива з комплекту *b*.

Правила (методи) голосування

1. *Правило голосування з відносною більшістю*. Така процедура визнає в якості переможця кандидата, що набрав більше голосів за будь-якого іншого претендента.

2. *Правило відносної більшості з вибуванням* ("відносна більшість у два тури", "абсолютна більшість"). За подібним правилом відбуваються вибори президента України. Якщо деякий кандидат набрав більше половини голосів, то він – переможець. Інакше у другий тур проходять два кандидати, що набрали відносну більшість голосів (тому – "відносна у два тури").

3. *Правило Борда* ("підрахунку очок"). У цьому правилі за останнє місце кандидата йому нараховується 0 балів (очок), за передостаннє – 1, ..., за перше – (m-1). Перемагає кандидат, що набрав найбільшу кількість балів.

4. *Правило Кондорсе*. За Кондорсе переможцем оголошується той кандидат, що "перемагає" всіх інших у попарних порівняннях.

Це один з так званих "парадоксів голосування". Найпростіший випадок маємо при $n = m = 3$: для першого виборця a кращий за b і c, b кращий за c (позначимо це $a \succ b \succ c$); для другого $b \succ c \succ a$; для третього $c \succ a \succ b$. Цей профіль називається "Циклом Кондорсе". Маємо – $a:b=2:1$, $a:c=1:2$, $b:c=2:1$ (у кожного по одному виграшу і по одному програшу).

5. *Правило Хара*. Процедура, запропонована Томасом Харом, є першою з цілої низки моделей «виключення альтернатив». Головним принципом таких систем є послідовне виключення найменш бажаних альтернатив, допоки не залишиться одна, яка визнається «переможцем». Томас Хар пропонує послідовно виключати ту альтернативу, яка отримала найменшу кількість перших місць у лінійних списках вподобань виборців. Процедура продовжується, поки не залишиться лише одна альтернатива або ж один з варіантів не матиме 50%+1 перших місць.

6. *Правило Кумбса*. Аналогічна схема, проте виключенню підлягає варіант, який має найбільшу кількість останніх місць. Тобто, цей алгоритм доцільніший за попередній, якщо потрібно знайти найбільш компромісний варіант. Однак, як і попередня модель, «система Кумбса» не відповідає критерію монотонності. Суттєвим недоліком обох схем можна вважати їх занадто велику «поетапність» – багато дослідників вказують на те, що через брак інформації на початкових етапах виключеним може стати потенційно оптимальний варіант.

7. *Правило Блека.* Американський дослідник, Дункан Блек, запропонував поєднати моделі Кондорсе і Борди: якщо є «переможець Кондорсе» – він має бути обраним, якщо «переможець Кондорсе» відсутній – найкращу альтернативу слід визначати за допомогою «системи Борди».

8. *Правило Несона*. Ще на початку XX сторіччя Дж. Ненсон модифікував «систему Борда», поєднавши її з «моделлю виключення». Ненсон пропонує поетапно виключати альтернативу з найнижчим «рейтингом Борда».

9. *Правило Копленда*. Позначимо через $K(a,x)$ число виборців, для яких кандидат a кращий за x, $a \neq x$. Порівняємо кандидата a з будь-яким іншим

кандидатом *x*. Припишемо $K(a, x) = +1$, якщо для більшості виборців *a* кращий за *x*, інакше $K(a, x) = -1$; 0 при рівності. Оцінка Копленда кандидата *a* є $K(a) = \sum_{x \neq a} K(a, x)$. Переможцем Копленда (переможцем за Коплендом) називається кандидат (кандидати) з найвищою оцінкою Копленда.

10. *Правило Сімпсона*. Аналогічно $S(a,x)$ – число виборців, для яких кандидат *a* кращий за *x*, $a \neq x$. Оцінкою Сімпсона кандидата *a* називається число $S(a) = \min_{x \neq a} S(a, x)$. Переможцем Сімпсона називається кандидат (кандидати) з найвищою оцінкою Сімпсона.

11. *Голосування з послідовним виключенням.* Задається послідовність кандидатів, наприклад, *abcd*. Перші два кандидати порівнюються і за правилом більшості виключається один з них. Той кандидат, що залишився, порівнюється з наступним і т.д. При рівності голосів залишається, наприклад, "лівий" кандидат.

12. *Правило паралельного виключення*. Для заданої послідовності кандидатів, наприклад, *abcd*, за правилом більшості порівнюється *a* з *b* і *c* з *d* ("півфінал"), потім переможці у парах порівнюються між собою ("фінал").

В наступній таблиці представлено відповідність основних правил голосування «раціональним» критеріям.

	Анонім.	Нейтрал.	Монотон.	Транзит.	Відповід. біл-ті	НСА	Критерій Парето	Критерій Смита
Кондорсе	+	+	+	-	+	+	-	+
Відносна Більшість	+	+	+	+	-	-	+	-
Абсолютна більшість	+	+	-	+	+	-	+	-
Борда	+	+	+	+	-	-	+	-
Хара	+	+	-	+	-	-	+	-
Кумбса	+	+	-	+	-	-	+	-
Блека	+	+	+	-	+	-	+	-

Ненсона	+	+	-	-	+	-	+	+
Коупленда	+	+	+	-	+	+	+	+

Таким чином, жодна з розглянутих процедур не відповідає усім вимогам до методів голосування. Це і лежить в основі «теореми неможливості» Ерроу: «Немає такої системи, яка б відповідала критеріям «універсальності», «монотонності», «незалежності від сторонніх альтернатив», «ненав'язанності» і не була б «диктаторською»» .

Вкрай важливо, що при ідентичних наборах («ранжованих лінійних порядках») вподобань виборців, різні моделі голосування визнають в якості переможця різні альтернативи – тобто вибір процедури може використатися як маніпулятивна технологія. Відсутність «ідеальної» (такої, що задовольняє усім критеріям) процедури може свідчити про певну обмеженість кожної з розглянутих моделей. Фактично, обравши дещо інший перелік умов, ми дійшли висновку, аналогічного «теоремі неможливості» Ерроу.

1.6. Функції корисності в умовах ризику та невизначеності

Найважливішим застосуванням теорії очікуваної корисності є можливість формалізації процесу прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності.

В загальному випадку задача прийняття рішень (ЗПР) є визначеною на наступній тріаді множин: X – множина альтернатив; Y-множина наслідків; S – множина станів [1].

Множина S є проявом стохастичної невизначеності в прийнятті рішень, причому конкретна інтерпретація станів залежить від формулювання задачі (наприклад, попит на ту чи іншу продукцію, погода і т.п.). Множину S також називають множиною "станів природи" чи "станів зовнішнього середовища", щоб підкреслити властиву їй невизначеність і незалежність від ОПР.

Відомі дві форми взаємозв'язку тріади множин, кожній з яких відповідає своє визначення множини станів і свій підхід до оцінки очікуваної корисності альтернатив. Це – екстенсивна та нормальна форми.

В екстенсивній формі стан визначається як відображення альтернатив у наслідки $s: X \to Y$. Цей підхід сформульований Дж. фон Нейманом і О. Моргенштерном. При такій постановці множина станів природи в явному вигляді в задачі не фігурує. Стохастична невизначеність тут описується розподілом ймовірностей на множині наслідків *Y*, що відповідають альтернативам із *X*. Переваги ОПР повинні бути виражені у вигляді функцій корисності $u(y)$, визначеній на множині наслідків *Y*. Очікувана корисність альтернативи *x* може бути оціненою деякою функцією корисності (функціоналом) $E(x) = E(u(y), p(x, y))$, де $p(x, y)$ – розподіл ймовірностей на множині наслідків *Y*, що відповідають альтернативі *x*. Оскільки кожній альтернативі однозначно відповідає свій розподіл ймовірностей, то в такій постановці ЗПР можна говорити про вибір найкращого розподілу ймовірностей.

Для ЗПР у нормальній формі альтернативи $x \in X$ визначаються як відображення станів у наслідки $x: S \to Y$. Цей підхід був сформульований Л. Севіджем. Тут множина станів *S* явно фігурує в ЗПР, а стохастична невизначеність описується за допомогою одного незалежного від альтернатив розподілу ймовірностей на *S* і задається відповідною щільністю $p(s),\ s \in S$. Переваги ОПР, як і у попередньому випадку, задаються функціями корисності, але тепер вони будуються не на множині наслідків *Y*, а на множині $X \times S$, оскільки будь-який наслідок однозначно визначається парою $(x, s) \in X \times S$. Для ЗПР у нормальній формі очікувана корисність альтернативи *x* може бути оціненою деякою функцією корисності (функціоналом) $E(x) = E(u(x, s), p(x))$.

Види функцій корисності (критерії) для нормальної форми ЗПР [1]

Мінімаксний критерій. Мінімаксний критерій (ММ) використовує функцію корисності альтернатив $E_{MM}(x) = \min\limits_{s \in S} u(x, s)$, що відповідає позиції крайньої обережності. Шукана альтернатива вибирається з умови $x^* \in \mathrm{Arg}\max\limits_{x \in X} E_{MM}(x) = \mathrm{Arg}\max\limits_{x \in X} \min\limits_{s \in S} u(x, s)$. Обрані таким чином альтернативи цілком виключають ризик. Це означає, що які б стани природи $s \in S$ не реалізувалися, відповідний результат не може виявитися гіршим за $E_{MM}(x^*)$. Ця властивість робить мінімаксний критерій одним із фундаментальних. Тому в практичних задачах він застосовується найчастіше.

Критерій Байеса – Лапласа. На відміну від мінімаксного критерію, цей критерій враховує кожен із можливих наслідків альтернативи.

Нехай $p(s)$ - ймовірність появи стану $s \in S$, тоді для BL – критерію корисність кожної альтернативи характеризується математичним сподіванням корисностей її наслідків

$$E_{BL}(x) = \int_{s \in S} p(s) u(x,s) ds .$$

Шукана альтернатива вибирається з умови:

$$x^* \in \mathrm{Arg}\max_{x \in X} E_{BL}(x) = \mathrm{Arg}\max_{x \in X} \int_{s \in S} p(s) u(x,s) ds \cdot$$

При цьому вважається, що ситуація, у якій приймається рішення, характеризується наступними обставинами: ймовірності появи станів відомі і не залежать від часу; рішення реалізується (теоретично) нескінченно багато разів; для малого числа реалізацій рішення допускається деякий ризик.

Критерій мінімізації дисперсії оцінки. Цей критерій використовують, коли ОПР, зацікавлена в отриманні "стійкого" щодо станів середовища рішення і відомо, що ймовірності станів середовища мають нормальний розподіл. При виборі цього критерію кожна альтернатива оцінюється дисперсією функції корисності її наслідків при всіх станах середовища, яка мінімізується:

$$E_D(x) = \int_{s \in S} p(s)\left(\int_{s \in S} p(s) u(x,s) ds - u(x,s)\right)^2 ds = \int_{s \in S} p(s)(E_{MM}(x) - u(x,s))^2 ds$$

$$x^* \in \mathrm{Arg}\min_{x \in X} E_D(x) = \mathrm{Arg}\min_{x \in X} \int_{s \in S} p(s)(E_{MM}(x) - u(x,s))^2 ds \cdot$$

Інші умови такі ж самі, як і для попереднього критерію.

Критерій максимізації ймовірності. При використанні цього критерію ОПР фіксує величину оцінки функції корисності наслідків $u^* : \min_{x \in X} \min_{s \in S} u(x,s) \le u^* \le \max_{x \in X} \max_{s \in S} u(x,s)$, яку він хоче найбільш ймовірно досягти. Для кожної альтернативи x визначається ймовірність $p\{u(x,s) \ge u^*\}$того, що функція корисності наслідків буде не менша за u^* для кожного стану середовища $s \in S$.

Критерій полягає у максимізації ймовірності досягнення значення заданої оцінки

$E_F(x) = \int\limits_{\substack{s\in S,\\ u(x,s)\ge u^*}} p(s)ds$, $x^* \in \mathrm{Arg}\max\limits_{x\in X} E_F(x) = \mathrm{Arg}\max\limits_{x\in X} \int\limits_{\substack{s\in S,\\ u(x,s)\ge u^*}} p(s)ds$.

Умови застосування цього критерію такі ж самі, як і для BL – критерію.

Модальний критерій. Суть цього критерію полягає у виборі альтернативи, виходячи з найбільш ймовірного стану середовища

$s^* \in S : s^* = \arg\max\limits_{s\in S} p(s)$. При використанні цього критерію ОПР вважає, що середовище знаходиться у стані s* і вибирає альтернативу з умови: $E_{MOD}(x) = \max\limits_{x\in X} u(x, s^*)$. Хоча цей критерій є досить песимістичним, він має певні переваги: достатньо виділити лише найбільш ймовірний стан середовища і не потрібно знати точне кількісне значення ймовірності його виникнення; зменшується об'єм обчислень, оскільки розрахунки ведуться лише для найбільш ймовірного стану середовища.

Критерій Севіджа. За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується $E_{SE}(x) = \max\limits_{s\in S}(\max\limits_{z\in X} u(z,s) - u(x,s))$.

Цю величину можна інтерпретувати як втрати (штрафи), що виникають у стані $s \in S$ при заміні оптимальної для неї альтернативи на альтернативу *x*. Тоді логічно приймати рішення за умовою мінімізації максимально можливих втрат: $x^* \in \mathrm{Arg}\min\limits_{x\in X} E_{SE}(x) = \mathrm{Arg}\min\limits_{x\in X} \max\limits_{s\in S}(\max\limits_{z\in X} u(z,s) - u(x,s))$.

До ситуації прийняття рішень за цим критерієм висуваються такі ж самі вимоги, що і у випадку ММ – критерію.

Критерій Гурвіца. Намагаючись зайняти найбільш урівноважену позицію, Л. Гурвіц запропонував критерій GW, функція корисності якого забезпечує компроміс між граничним оптимізмом і крайнім песимізмом. За цим критерієм корисність кожної альтернативи характеризується величиною $E_{GW}(x) = \alpha \max\limits_{s\in S} u(x,s) + (1-\alpha)\min\limits_{s\in S} u(x,s)$, де $\alpha \in [0,1]$ – ваговий коефіцієнт, що характеризує схильність ОПР до ризику.

Рішення приймається з умови:

$$x^* \in \mathrm{Arg}\max_{x\in X} E_{GW}(x) = \mathrm{Arg}\max_{x\in X}(\alpha \max_{s\in S} u(x,s) + (1-\alpha)\min_{s\in S} u(x,s)) .$$

Для $\alpha = 0$ GW-критерій перетворюється в ММ-критерій. Для $\alpha = 1$ він перетворюється в критерій азартного гравця. На практиці вибрати цей коефіцієнт буває так само важко, як правильно вибрати сам критерій. Навряд чи можливо знайти кількісну характеристику для тих часток оптимізму й песимізму, що присутні при прийнятті рішення. Тому найчастіше $\alpha = 0.5$ без заперечень приймається в якості деякої "середньої" точки зору.

Критерій Ходжа-Лемана. Цей критерій спирається одночасно на ММ – критерій і BL – критерій. Функція корисності альтернатив визначається як:

$$E_{HL}(x) = \alpha \int_{s\in S} p(s)u(x,s)ds + (1-\alpha)\min_{s\in S} u(x,s) .$$

За допомогою параметра $\alpha \in [0,1]$ виражається ступінь довіри до використовуваного розподілу ймовірностей $p(s),\ s \in S$. Якщо ця довіра велика, то акцентується BL – критерій, у противному випадку перевага віддається ММ – критерію. Рішення приймається за умовою:

$$x^* \in \mathrm{Arg}\min_{x\in X} E_{HL}(x) = \mathrm{Arg}\max_{x\in X}(\alpha \int_{s\in S} p(s)u(x,s)ds + (1-\alpha)\min_{s\in S} u(x,s)) .$$

Для $\alpha = 0$ HL – критерій перетворюється в ММ-критерій, а для $\alpha = 1$ він перетворюється в BL – критерій. Ступінь впевненості $\alpha \in [0,1]$ в будь-якому розподілі ймовірностей $p(s),\ s \in S$, практично не піддається оцінці. Таким чином, вибір параметра α є повністю суб'єктивним. Крім того, без уваги залишається і число реалізацій рішень. Тому HL – критерій має досить обмежену галузь застосування.

Ситуації, у якій приймається рішення, характеризуються наступними властивостями: ймовірності появи станів не відомі, але деякі припущення про розподіл ймовірностей можливі; прийняте рішення теоретично допускає нескінченно багато реалізацій; при малих числах реалізацій допускається деякий ризик.

Критерій Гермейєра. За підходом Ю.Гермейера до відшукання слабко ефективних рішень у задачах багатокритеріальної оптимізації можна запропонувати ще один критерій (GE).

Нехай множина станів є скінченною, а саме $S = \{s_1, ..., s_n\}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати $u(x,s) > 0, \forall x \in X, \forall s \in S$, тоді функція корисності альтернатив за GE – критерієм визначається як $E_{GE}(x) = \min_{s \in S} p(s)u(x,s)$, а рішення приймається з умови:

$$x^* \in \mathrm{A}\operatorname{rg}\max_{x \in X} E_{GE}(x) = \mathrm{A}\operatorname{rg}\max_{x \in X} \min_{s \in S} p(s)u(x,s).$$

Ймовірності станів природи $p(s),\ s \in S$, в цьому критерії можна інтерпретувати як вагові коефіцієнти функцій корисності $u(x,s), s \in S$, наслідків, які хочемо одночасно максимізувати.

В певному відношенні GE – критерій узагальнює ММ – критерій. У випадку рівномірного розподілу ймовірностей вони стають ідентичними. Умови його застосовності такі: множина станів є скінченною; ймовірності появи станів відомі; із появою тих або інших нових станів необхідно рахуватися; допускається деякий ризик; рішення може реалізуватися один або багато разів.

Якщо функція розподілу відома не дуже надійно, а реалізацій рішення мало, то за GE – критерієм одержують невиправдано великий ризик. Таким чином, залишається деяка воля для суб'єктивних дій.

Критерій добутків. Цей критерій базується на ідеї фільтрації інформації , яка застосовується у теорії нечітких множин. Добутком функцій належності нечітких множин визначається одна з операцій перетину нечітких множин.

Нехай множина станів є скінченною, а саме $S = \{s_1, ..., s_n\}$. Не обмежуючи загальності, будемо вважати $u(x,s) > 0, \forall x \in X, \forall s \in S$.

Критерій добутків MU використовує функцію корисності альтернатив $E_{MU}(x) = \prod_{s \in S} u(x,s)$. Шукана альтернатива вибирається з умови:

$$x^* \in \mathrm{A}\operatorname{rg}\max_{x \in X} E_{MU}(x) = \mathrm{A}\operatorname{rg}\max_{x \in X} \prod_{s \in S} u(x,s).$$

Застосування цього критерію обумовлено наступними обставинами: множина станів є скінченною; ймовірності появи станів невідомі; із появою кожного із станів окремо необхідно рахуватися; критерій застосовують і при малому числі реалізацій рішення; деякий ризик допускається.

1.7. Функції колективної корисності

Формально задача колективного прийняття рішень формулюється наступним чином [1]:

$$\max\{u_i(x) \mid x \in X \subseteq E^n\},\ i \in N = \{1,\dots,n\},$$

де u_i – функція корисності i-го агента, X – множина альтернатив.

Існування альтернативи x^*, на якій одночасно досягають максимуму всі індивідуальні функції корисності, у практичних задачах настільки рідкісний випадок, що його можна не враховувати (у цьому випадку задачі колективного прийняття рішень, як такої, і немає). Можливо, виділити "пріоритетного" члена спільноти ("царя", "вождя" і т.п.), індивідуальна функція корисності котрого максимізується, для інших індивідуальних функцій корисності встановлюються "порогові" рівні $\bar{u}_i = const$:

$$\max\{u_k(x) \mid u_i(x) \geq \bar{u}_i,\ i \neq k; x \in X\}.$$

Зокрема, $\bar{u}_i$ і $\bar{u}_j$, $i \neq j$, можуть співпадати. Якщо для фіксованих значень $\bar{u}_i$ задача не буде мати розв'язку, то "пороги" (хоча б один) необхідно змінити.

Припускаючи ж, що апріорі всі члени суспільства рівні у своїх правах, більш логічними ("демократичними") будуть дві "крайні" наступні постановки:

$$\sum_{i \in N} u_i(x) \to \max_{x \in X}, \qquad (*)$$

$$u_1(x) = u_2(x) = \dots = u_n(x) \to \max_{x \in X}. \qquad (**)$$

Задача (*) називається *утилітарною* постановкою (функція $W_y(u_1,\dots,u_n) = \sum_{i \in N} u_i$ називається *утилітарною функцією колективної корисності*), задача (**) – *егалітарною* (від латинського слова "рівність"). Інтерпретуючи функції індивідуальної корисності u_i як прибуток i – го члена спільноти, отримуємо, що утилітаризм максимізує сумарний прибуток спільноти, не звертаючи уваги на його перерозподіл між членами спільноти [2].

Оскільки ситуація з "абсолютною" рівністю здається "непродуктивною", як правило, розглядається функція колективної корисності у вигляді $W_e(u_1,\dots,u_n) = \min_{i=\overline{1,n}}\{u_i\}$, яку необхідно максимізувати на множині альтернатив X. Ця функція називається *егалітарною функцією колективної корисності* (задачу (**) тоді доцільно називати "крайнім" або "абсолютним" егалітаризмом). "Економічна" інтерпретація егалітарної функції зрозуміла – суспільство намагається максимізувати мінімальну "зарплату" (прибуток найбіднішого агента). Спір між утилітаризмом та егалітаризмом точиться тисячоліттями [1].

II. ТИПОВІ ВАРІАНТИ КОМПЛЕКСНОЇ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ З ДИСЦИПЛІНИ «СИСТЕМИ І МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ»

Варіант 1

1. За заданим профілем голосування визначити переможця та колективний порядок методом Кондорсе та відносної більшості. Проаналізувати отриманий результат.

5	**10**	**3**	**7**	**6**
a	d	a	b	b
b	b	d	d	a
d	c	c	a	d
c	a	b	c	c

2. Методом послідовних поступок визначити розв'язок наступної багатокритеріальної задачі:

$f_1 : -x_1 + 3x_2 \to \max$,

$f_2 : 4x_1 - x_2 \to \max$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 \le 4, \\ x_2 \le 3. \end{cases}$$

Врахувавши, що критерії впорядковані по важливості в послідовності $f_2 \succ f_1$ і $\Delta_2 = 1$.

3. Прогнозовані прибутки туристичного агентства від поїздок до Угорщини, Болгарії, Єгипту та Турції занесені до таблиці в залежності від очікуваної погоди сезону.

Країна / Стан погоди	**Болгарія (прибуток у. о.)**	**Єгипет (прибуток у. о.)**	**Турція (прибуток у. о.)**	**Угорщина (прибуток у. о.)**
Спека	**100**	**150**	**200**	**80**
Дощ	**50**	**80**	**100**	**75**
Помірно	**65**	**120**	**130**	**80**
Непередбачувано (зливи, спека)	**70**	**125**	**105**	**70**

Визначити найкращі альтернативи за критерієм Севіджа.

Варіант 2.

1. За заданим профілем голосування визначити переможця та колективний порядок методом де Борда та відносної більшості. Проаналізувати отриманий результат.

4	**11**	**4**	**5**	**6**
a	a	a	b	d
b	b	d	d	a
d	c	c	a	b
c	d	b	c	c

2. Методом ідеальної точки визначити розв'язок наступної багатокритеріальної задачі:

$f_1 : -5x_1 + 3x_2 \to \max$,

$f_2 : 10x_1 + 3x_2 \to \max$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 \geq -15, \\ 2x_1 + x_2 \leq 12, \\ x_1 - x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

3. Прогнозовані прибутки від продажу товарів: будівельних, продовольчих та медичних (які залежать від курсу євро до долара) записано в таблицю:
4.

Тенденція / Вид товарів	**Стаб. зростання**	**Стаб. спадання**	**Стабільний**
Буд. товари	**100**	**120**	**110**
Прод. тов	**120**	**160**	**125**
Мед. тов	**115**	**140**	**120**

Знайти найкращу стратегію ведення бізнесу використовуючи мінімаксний критерій.

Варіант 3.

1. За заданим профілем голосування визначити переможця та колективний порядок методом відносної більшості з вибуванням та відносної більшості. Проаналізувати отриманий результат.

7	**10**	**3**	**3**	**2**
a	b	a	b	d
d	a	d	d	a
b	c	c	a	b
c	d	b	c	c

2. Методом згортки критеріїв визначити розв'язок наступної багатокритеріальної задачі:

$f_1 : x_1 - x_2 \to \max$,

$f_2 : -4x_1 + x_2 \to \max$,

$f_3 : -2x_1 + 2x_2 \to \max$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge -8, \\ 4x_1 + x_2 \le 22, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Причому $\alpha_1 = 4,\ \alpha_2 = 3,\ \alpha_3 = 3.$

3. Фабрика виробляє парасольки, капелюхи, плащі на вибір. Директор повинен прийняти
рішення, які з цих 3-х виробів виробляти наступного літа, якщо відомі прибутки (вони прогнозуються) від реалізації цієї продукції.
Прогнозовані прибутки записано в таблицю:

Тенденція / **Вид товарів**	**Спекотно**	**Помірно**	**Дощ**
Парасольки	**50**	**60**	**90**
Капелюхи	**52**	**98**	**55**
Плащі	**50**	**71**	**79**

Знайти найкращу стратегію ведення бізнесу використовуючи критерій азартного гравця.

Варіант 4.

1. За заданим профілем голосування визначити переможця та колективний порядок методом Компленда та відносної більшості. Проаналізувати отриманий результат.

3	**5**	**3**	**5**	**2**
b	b	a	c	d
a	a	d	d	a
d	c	c	a	b
c	d	b	b	c

2. Методом задоволених вимог визначити розв'язок наступної багатокритеріальної задачі:

$$f_1: \quad x_1 + x_2 \to \max$$

$$f_2: \quad 2x_1 - x_2 \to \max$$

при

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 0, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 0 \le x_1 \le 3, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Причому критерії впорядковані по важливості $f_1 \succ f_2$, мінімально допустиме значення другого критерію - $\xi_2 = 2$.

3. Прогнозована вартість (в у. о.) отриманого врожаю від вирощування сільськогосподарських продуктів: картоплі, кукурудзи, соняшника та капусти (які залежать від погодних умов) записано в таблицю:

Погода / Вид продуктів	**Спека**	**Дощ**	**Помірно**
Картопля	**100**	**120**	**110**
Кукурудза	**120**	**100**	**115**
Соняшник	**115**	**100**	**110**
Капуста	**100**	**120**	**115**

Знайти найкращу стратегію ведення бізнесу використовуючи мінімаксний критерій.

Варіант 5.

1. За заданим профілем голосування визначити переможця та колективний порядок методом Сімпсона та відносної більшості. Проаналізувати отриманий результат.

7	**5**	**4**	**5**	**2**
b	b	a	c	c
c	a	d	d	a
d	c	c	a	b
a	d	b	b	d

2. Розв'язати багатокритеріальну задачу:

$$f_1 : \quad 2x_1 - x_2 \to \max$$
$$f_2 : \quad -x_1 + 2x_2 \to \max$$

при

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 6 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

методом ідеальної точки.

3. Прогнозовані прибутки від продажу медичних препаратів: противірусних, антибіотиків та імуномодуляторів (які залежать від тенденції зміни курсу євро до гривні) записано в таблицю:

Тенденція / **Вид товарів**	**Стаб. зростання**	**Стаб. спадання**	**Стабільний**
Противірусні	55	70	60
Антибіотики	45	58	51
Імуномодулятори	50	80	71

Знайти найкращу стратегію ведення бізнесу використовуючи критерій Гурвіца ($\alpha = 0.4$).

Варіант 6.

1. За заданим профілем голосування визначити переможця та колективний порядок методом Борда та відносної більшості. Проаналізувати отриманий результат.

4	**8**	**4**	**7**	**7**
a	d	a	b	b
c	b	d	d	a
d	a	c	c	d
b	c	b	a	c

2. Методом послідовних поступок визначити розв’язок наступної багатокритеріальної задачі:

$f_1 : 3x_1 + 2x_2 \to \max$,

$f_2 : -x_1 + 3x_2 \to \max$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 14, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Врахувавши, що критерії впорядковані по важливості в послідовності $f_1 \succ f_2$ і $\Delta_1 = 4$.

3. В процесі експлуатації ЕОМ виявились збої. Можливі наступні варіанти рішень: x_1 – повна перевірка ЕОМ, x_2 – мінімальна перевірка; x_3 – відмова від перевірки. При цьому ЕОМ може знаходитись в наступних станах: y_1 – несправностей немає, збої були випадкові; y_2 – присутні незначні несправності, які будуть несуттєво впливати на подальшу експлуатацію ЕОМ; y_3 – присутні серйозні несправності, які спотворять результати розрахунків і приведуть до виходу із роботи інших блоків. Результати втрат від зупинки ЕОМ наведені в наступній таблиці:

	y_1	y_2	y_3
x_1	**–20**	**–22**	**–40**
x_2	**–12**	**–23**	**–43**
x_3	**0**	**–24**	**–55**

Визначити найкращі альтернативи подальшого функціонування ЕОМ за критерієм Севіджа.

Варіант 7.

1. За заданим профілем голосування визначити переможця та колективний порядок методом Кондорсе та відносної більшості. Проаналізувати отриманий результат.

3	**9**	**7**	**6**
a	a	a	b
b	b	d	d
d	c	c	a
c	d	b	c

2. Методом задоволених вимог визначити розв'язок наступної багатокритеріальної задачі:

$f_1 : -x_1 + 3x_2 \to \max$,

$f_2 : 4x_1 - x_2 \to \max$

при обмеженнях:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - 2x_2 \le 0, \\ x_1 \le 4, \\ x_2 \le 3. \end{cases}$$

Врахувавши, що критерії впорядковані по важливості в послідовності $f_1 \succ f_2$ і мінімально допустиме значення другого критерію $\xi_2 = 13$.

3. Директор фінансової компанії проводить ризиковану фінансову операцію. Страхова компанія пропонує застрахувати угоду і пропонує 4 види страховки: A_1, A_2, A_3, A_4. Компенсація збитків для кожного варіанту залежить від того, який із можливих страхових випадків S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 відбувся. В таблицю внесено розмір компенсації для кожного виду страховки:

A_i \ S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	**43**	**22**	**42**	**49**	**45**
A_2	**41**	**37**	**40**	**38**	**42**
A_3	**39**	**48**	**37**	**42**	**36**
A_4	**37**	**29**	**32**	**58**	**41**

Знайти найкращу стратегію ведення бізнесу використовуючи критерій Гурвіца ($\alpha = 0.8$).

ІІІ. РОБОЧА ПРОГРАМА КУРСУ «СИСТЕМИ І МЕТОДИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ»

1. Опис навчальної дисципліни

<table>
<tr><td rowspan="2">Найменування показників</td><td rowspan="2">Галузь знань, напрям підготовки, освітньо-кваліфікаційний рівень</td><td colspan="2">Характеристика навчальної дисципліни</td></tr>
<tr><td>денна форма навчання</td><td>заочна форма навчання</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Кількість кредитів – 3</td><td>Галузь знань
0403 системні науки і кібернетика
(шифр і назва)</td><td colspan="2" rowspan="2">Вибіркова</td></tr>
<tr><td>Напрям підготовки
6.040301 - прикладна математика
(шифр і назва)</td></tr>
<tr><td>Модулів – 2</td><td rowspan="5">Спеціальність (професійне спрямування):
________________</td><td colspan="2">Рік підготовки:</td></tr>
<tr><td>Змістових модулів – 2</td><td>4-й</td><td>-й</td></tr>
<tr><td>Індивідуальне науково-дослідне завдання ____________ (назва)</td><td colspan="2">Семестр</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Загальна кількість годин – 150</td><td>7-й</td><td>-й</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лекції</td></tr>
<tr><td rowspan="9">Тижневих годин для денної форми навчання:
аудиторних –4
самостійної роботи студента – 4,5</td><td rowspan="9">Освітньо-кваліфікаційний рівень:
бакалавр</td><td>36 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Практичні, семінарські</td></tr>
<tr><td>год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Лабораторні</td></tr>
<tr><td>30 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Самостійна робота</td></tr>
<tr><td>84 год.</td><td>год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Індивідуальні завдання: год.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Вид контролю: екзамен</td></tr>
</table>

Примітка.
Співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної і індивідуальної роботи становить (%):

для денної форми навчання – 11:14

2. Мета та завдання навчальної дисципліни

Дисципліна «Системи і методи прийняття рішень» є базовою нормативною дисципліною для студентів спеціальності «прикладна математика», що читається в 7 семестрі в обсязі 5 кредитів, в тому числі, 66 годин аудиторних занять, з них 36 годин лекцій і 30 години лабораторних занять та 84 години самостійної роботи.

Мета та завдання навчальної дисципліни «Системи та методи прийняття рішень» є ознайомлення з основними принципами побудови і дослідження моделей прийняття рішень. Розглядаються базові основи прийняття рішень, основи теорії корисності, експертні процедури для прийняття рішень, прийняття рішень в умовах визначеності, ризику та невизначеності.

<u>Студент повинен</u>

а) **знати** теоретичний і практичний матеріал курсу «Системи і методи прийняття рішень» наведений у програмі: бінарні відношення, функції вибору, основи теорії корисності, експертизи та обробка експертної інформації, методи голосування, прийняття рішень в умовах визначеності, прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності, прийняття рішень в умовах нечіткості, системи підтримки прийняття рішень.

б**) вміти** користуватися одержаними знаннями з курсу «Системи і методи прийняття рішень» для розв'язання практичних задач;

в) **мати навички** побудови математичних моделей задач багатокритеріальної оптимізації, підбору методів розв'язання для заданих математичних моделей задач прийняття рішень, розробки найпростіших систем підтримки прийняття рішень та їх програмної реалізації.

3. Програма навчальної дисципліни

СЕМЕСТР 7

Змістовий модуль 1. Теорія вибору

Тема 1. Вступ до теорії прийняття рішень.

Предмет теорії прийняття рішень, основні поняття, історія розвитку. Структуровані, неструктуровані, слабоструктуровані проблеми, загальна схема прийняття рішень. Класичні моделі теорії прийняття рішень. [1,2,4,6]. Класифікація задач ПР, цілі, критерії, альтернативи. Особи, які приймають участь у прийняттю рішень. [1,2]

Тема 2. Теорія вибору. Бінарні відношення. Функції вибору.

Бінарні відношення, способи задання, властивості, операції. Максимуми, мажоранти за бінарним відношенням. [1,2,5]. Функції вибору. Логічна форма функції вибору. Властивості функції вибору, операції, класи, взаємозв'язок класів. [1,2, 5]. Декомпозиція функції вибору. Властивості функції вибору, класи функції вибору, взаємозв'язок класів.[1,2,5].

Тема 3. Основи теорії корисності.

Відношення переваги. Функції корисності на зліченних та незліченних множинах. Типи і види функції корисності.[1,2].

Тема 4. Методи голосування.

Принципи Кондорсе і Борда, їх взаємозв'язок. Методи типу Борда, парадокси. Методи типу Кондорсе, парадокси.

Тема 5. Експертизи. Обробка експертної інформації.

Загальна схема експертизи, методи круглого столу, мозкової атаки, Делфі. Ординальне та кардинальне оцінювання.. [1,2]. Статистичні методи обробки експертної інформації . Алгебраїчні методи обробки експертної інформації .

Змістовий модуль 2. Колективні рішення

Тема 6. Колективне прийняття рішень.

Метод аналізу ієрархій. Ієрархічна структура критеріального простору. Шкали відношень. Матриця суджень експертів.

Тема 7. Прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику.

Матриця розв'язків, альтернативи, стани природи, оціночна функція.

Прийняття рішень в умовах невизначеності. Критерії оптимізму, нейтралітету, песимізму, Севіджа, Неша, Гурвиця. Умови застосування. [1,2]. Прийняття рішень в умовах ризику. Критерії Байєса-Лапласа, модальний, Гермейєра, мінімізації дисперсії, Ходжа-Лемана. Умови застосування. [1,2].

Тема 8. Багатокритеріальна оптимізація.

Задача багатокритеріальної оптимізації. Проблематика БО. Методи розв'язання БЗ.

Методи ідеальної точки, послідовних поступок, бажаної точки, врахування числа домінуючих критеріїв, послідовного вводу обмежень. Моделі згорток. Способи визначення вагових коефіцієнтів. Модель точки «задоволення». [1,2,15,17,18,19]

Тема 9. Прийняття рішень в умовах нечіткості.
Теорія нечіткості, історія розвитку. Нечіткі множини, операції. Нечіткі бінарні відношення, властивості операцій. Прийняття рішень при нечіткому відношенні переваги на множині альтернатив. Загальна задача прийняття рішень в умовах нечіткої інформації. [1,2,14,16].

Тема 10. Системи підтримки прийняття рішень.
Принципи розробки систем підтримки прийняття рішень (СППР). СППР, що базується на багатокритеріальній теорії корисності.

4. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин											
	Денна форма						Заочна форма					
	Усього	у тому числі					Усього	у тому числі				
		л	п	лаб	інд	ср		л	п	лаб	інд	ср
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Змістовий модуль 1. Теорія вибору												
Тема 1. Вступ до теорії прийняття рішень	4	2				4						
Тема 2. Теорія вибору. Бінарні відношення. Функції вибору.	4	6		6		10						
Тема 3. Основи теорії корисності.	8	2				10						
Тема 4. Методи голосування.	8	4		3		7						
Тема 5. Експертизи. Обробка експертної інформації.	4	4		3		7						
Разом – зм. модуль1	**52**	**18**		**12**		**38**						
Змістовий модуль 2. Колективні рішення												
Тема 6. Колективне прийняття рішень.	6	2				8						
Тема 7. Прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику.	4	4		4		6						
Тема 8. Багатокритеріальна оптимізація.	6	6		8		12						
Тема 9. Прийняття рішень в умовах	7	4		6		12						

нечіткості.												
Тема 10. Системи підтримки прийняття рішень	6	2				8						
Разом – зм. модуль2	**56**	**18**		**18**		**46**						
Усього годин	***150***	***36***		***30***		***84***						

5. Теми лабораторних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	Бінарні відношення.	4
2	Функції вибору.	2
3	Методи голосування.	3
4	Методи обробки експертної інформації.	3
5	Прийняття рішень в умовах невизначеності та ризику.	4
6	Багатокритеріальна оптимізація.	8
7	Прийняття рішень в умовах нечіткості	6
	Разом	30

6. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин
1	**Вступ до теорії прийняття рішень**	2
2	**Задачі прийняття рішень**	2
3	**Теорія вибору. Бінарні відношення**	6
4	**Функції вибору**	4
5	**Основи теорії корисності**	10
6	**Методи голосування**	7
7	**Експертизи. Обробка експертної інформації**	7
8	**Колективне прийняття рішень. Метод аналізу ієрархій**	8
9	**Прийняття рішень в умовах невизначеності**	3
10	**Прийняття рішень в умовах ризику**	3
11	**Багатокритеріальна оптимізація**	12
12	**Прийняття рішень в умовах нечіткості**	12
13	**Системи підтримки прийняття рішень**	8
	Всього	84

7. Методи навчання

Видами навчальних занять згідно з навчальним планом є: а) лекції, б) лабораторні заняття, в) самостійна робота студентів, г) індивідуальна робота.

8. Методи контролю

1. Поточний контроль – фронтальне опитування, виконання практичних завдань.
2. Модульний контроль – колоквіум, виконання комплексних контрольних робіт та тестових завдань.
3. Підсумковий контроль – екзаменаційні білети, виконання тестових і практичних завдань.

Оцінка успішності студента з даної дисципліни є рейтинговою і виставляється за стобальною шкалою з урахуванням оцінок засвоєння окремих модулів.

9. Розподіл балів, які отримують студенти

Поточне тестування та самостійна робота						Підсумковий тест	Сума
Змістовий модуль 1	Змістовий модуль 2	ПЗ	ЛЗ	Інд. Р.	СР	Екзамен	
20	20		40	10	10		100

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Сума балів за всі види навчальної діяльності	Оцінка ECTS	Оцінка за національною шкалою	
		для екзамену, курсового проекту (роботи), практики	для заліку
90 – 100	**A**	відмінно	Зараховано
82-89	**B**	добре	
74-81	**C**		
64-73	**D**	задовільно	
60-63	**E**		
35-59	**FX**	незадовільно з можливістю повторного складання	не зараховано з можливістю повторного складання
0-34	**F**	незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни	не зараховано з обов'язковим повторним вивченням дисципліни

10. Методичне забезпечення

1. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Методичні рекомендації до виконання практичних і лабораторних робіт з теорії прийняття рішень.-К.:ВПЦ „Київський університет", 2001.-46с.
2. Кондрук Н.Е. Методичні рекомендації до вивчення курсу «Системи та методи прийняття рішень» для студентів 4-го курсу спеціальності "Прикладна математика" математичного факультету УжНУ/ Розробники: Н.Е. Кондрук – Ужгород, Вид-во УжНУ «Говерла» , 2015. – 48 с.
3. Кондрук Н.Е. Вибрані розділи багатокритеріальної оптимізації: методичні рекомендації до виконання контрольних та лабораторних робіт для студентів математичного факультету/ Розробники: Н.Е. Кондрук – Ужгород, Вид-во УжНУ «Говерла» , 2015. – 48 с.

Орієнтований перелік питань, що виносяться на екзамен

1. Загальна схема прийняття рішень.
2. Діаграма Томаса-Кілмана.
3. Задача колективного прийняття рішень.
4. Утилітаризм та егалітаризм, дилема „рівність-ефективність".
5. Прийняття рішень в умовах невизначеності (критерії оптимізму, песимізму, Севіджа, Волошина, нейтральний, Неша, Гурвіца).
6. Прийняття рішень в умовах ризику (критерії Байєса-Лапласа, Гермейєра, модальний, Ходжа-Лемана, розширений Байєса-Лапласа).

7. Вибір голосуванням, функція колективної переваги, методи голосування (відносна більшість, абсолютна більшість, відносна більшість в два тури, Борда, Кондерсе, Копленда, Сімпсона, послідовного, паралельного виключення).
8. Властивості методів голосування, парадокси голосування.
9. ПарадоксЕрроу.
10. Функції вибору, нормальні функції вибору.
11. Критерій нормальності функції вибору.
12. Класи функції вибору..
13. Логічна форма функції вибору.
14. Операції над функціями вибору.
15. Властивості функцій вибору.
16. Оптимум Парето, оптимум лексиміна.
17. Конфлікти та компроміси, рівновага в домінуючих стратегіях, недоміновані стратегії, обережні стратегії, складна рівновага.
18. Рівновага Неша, теорема Неша. Сильна рівновага Неша.
19. Критерії вибору Нешівських рівноваг.
20. Змішане розширення гри. Змішані рівноваги Неша.
21. Переговорна множина.
22. Рівновага Штакельберга.
23. Кооперативна гра, принцип відокремлення.
24. Вектор Шеплі, теореми Шеплі та Янга.
25. Моделі задач вибору.
26. Задача багатокритеріальної оптимізації. Ефективні, слабкоефективні, власне-ефективні розв'язки.
27. Метод ідеальної точки, послідовних поступок, бажаної точки.
28. Обробка експертної інформації. Загальна схема експертизи. Методи круглого столу, мозкової атаки, Делфі.
29. Статистичні методи.
30. Алгебраїчний метод обробки експертної інформації. Медіана Кемені-Снелла.
31. Нечіткі множини, операції над ними, нечіткі відношення.
32. Нечіткі ігри, нечіткі задачі багатокритеріальної оптимізації.

ЛІТЕРАТУРА

Базова

1. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. Посіб. Для студ вищ. Навч. Закл. − 2-ге вид. перероб. Та допов. − Київ.:ВПЦ „Київський університет", 2010. − 336с.
2. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник. Київ.:ВПЦ „Київський університет", 2006.-304с.
3. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Методичні рекомендації до виконання практичних і лабораторних робіт з теорії прийняття рішень.-К.:ВПЦ „Київський університет", 2001.-46с.

Допоміжна

4. Мулен Э. Кооперативное принятие решений. – М: Мир, 1991.-464с.
5. Макаров И.М., Виноградская Т.М. и др. Теория выбора и принятий решений – М:Наука,1982.-328с.
6. Ларичев О.И. Теория и методы принятия решений-М: Логос, 2000.-296с.
7. Скотт Дж.Конфликты. Пути их преодоления. Киев: Внешнеторгиздат, 1991.-190с.
8. Мушек Э., Мюллер П. Методы принятия технических решений.-М: Мир,1990.-208с.
9. Волкович В.Л., Волошин А.Ф. и др. Модели и методы оптимизации сложных систем.-Киев, Наукова думка,1993.-312с.
10. Харшаньи Дж, Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх.-СПб.: Экономическая школа, 2001.-424с.
11. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации.-М: Наука, 1981.-208с.
12. Волошин О.Ф., Панченко М.В. Експертна система якісного оцінювання на основі багато параметричних залежностей// «Проблеми математичних машин і систем», 2002,№2.-С.83-89.
13. Мащенко С.О. Рівновага за Нешем у нечітких іграх.//Вісник Київського університету.Серія:фіз.-мат. науки, 2004, №2.-С.169-174.
14. Волошин А.Ф., Маляр Н.Н. Нечеткие модели многокритериального коллективного выбора. // Proceedings XI – th International Conference "Knowledge – Dialogue – Solution" . – Sofia, 2005. – Vol. 1. – P. 247 – 250.
15. Кондрук Н.Е., Маляр М.М. Кластеризація критеріїв ефективності у задачах вибору. // Вісник Київського університету.Вип.3 Серія: фіз.-мат. науки, Київ, 2005, С. 288-291.
16. Маляр М.М. Описання задач вибору на мові розмитих множин. // Вісник Київського університету.Вип.4: Серія: фіз.-мат. науки, Київ, 2005. –с.197-201.
17. Маляр М.М. Методи групування критеріїв ефективності для задач вибору. // Вісник Київського університету**.** Вип.2: Серія: фіз.-мат. науки, Київ, 2006.- с.211-215.
18. Кондрук Н.Е., Маляр М.М. Некоторые применения кластеризации критериального пространства для задач выбора // Компьютерная математика - 2009.- № 2.- С. 142-149.
19. Кондрук Н.Е., Маляр М.М. Застосування багатокритеріальних моделей для задач збалансованого харчування//Вісник Черкаського державного технологічного університету, Серія: технічні науки, – 2010. - №1. – С.3 -7.