УДК 517.9

С. І. Балога (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ІСНУВАННЯ ІНВАРІАНТНОЇ МНОЖИНИ ОДНОГО КЛАСУ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ НА ТОРІ

In this article the problem of existence of conditionally asymptotically stable invariant toroidal set for a system of linear differential equations defined in the space $E^n \times T^m$ is under consideration.

У даній статті розглядається питання існування умовно асимптотично стійкої інваріантної тороїдальної множини для системи лінійних диференціальних рівнянь, визначених в просторі $E^n \times T^m$.

Теорія розширень динамічних рівнянь на торі [2] є важливим розділом теорії звичайних диференціальних рівнянь, який інтенсивно розвивається та має важливе прикладне застосування до різноманітних задач науки та техніки. Дана теорія описує процеси, що носять коливний характер. Одним з основних питань є встановлення умов існування інваріантних торів систем диференціальних рівнянь, дослідження їх стійкості, збереження інваріантних торів при малих збуреннях, а також поведінка розв'язків систем на самих торах та в їх околі. Поряд з глибоким дослідженням в даному напрямку існує ряд проблем, які і сьогодні не вдається повністю вирішити.

Цю статтю присвячено дослідженню умов, при яких лінійна система диференціальних рівнянь, визначених в прямому добутку m-вимірного тора й n-вимірного евклідового простору, має умовно асимптотично стійку інваріантну тороїдальну множину, виокремлені деякі класи задач, для яких умови існування мають місце.

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

в якій $\varphi \in T^m$, $x \in R^n$, $a(\varphi)$ — ліпшицева векторна функція на m-вимірному торі T^m, 2π-періодична по кожній компоненті φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$. $A(\varphi)$ і $f(\varphi)$ — матрична та векторна 2π-періодичні по φ_j функції відповідно.

Дослідимо питання існування інваріантних множин лінійної системи диференціальних рівнянь в просторі $E^n \times T^m$. Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, а через $\Omega^t_\tau(\varphi)$ — матрицант однорідної системи

$$\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x, \tag{2}$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра. Нехай $C(\varphi), \varphi \in T^m$ — неперервна матриця. Покладемо

$$G(t,\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega^t_\tau(\varphi)C(\varphi_t(\varphi)), & t \geq \tau, \\ \Omega^t_\tau(\varphi)(C(\varphi_t(\varphi)) - E), & t < \tau \end{cases}$$

і будемо називати функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = A(\varphi)x,$$

якщо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \parallel G(0,\tau,\varphi) \parallel d\tau$ рівномірно обмежений по φ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \parallel G(0,\tau,\varphi) \parallel d\tau \leq K < \infty.$$

Функція $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє систему (2) при $t \neq \tau$, а при $t = \tau$ вона має розрив першого роду зі стрибком

$$G(\tau+0,\tau,\varphi) - G(\tau-0,\tau,\varphi) = E.$$

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi), \;\; \dot{x} = Ax + f(\varphi), \tag{3}$$

в якій $\varphi \in T^m$, $x \in R^n$, $a(\varphi)$ — ліпшицева векторна функція на m-вимірному торі T^m, 2π-періодична по кожній компоненті φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$. A – стала матриця, $f(\varphi)$ – векторна 2π-періодична по φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$ функція.

Теорема 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел матриці A відмінні від нуля $Re(\lambda_j(A)) \neq 0, (j = 1, 2, ..., n)$, причому $Re(\lambda_j(A)) < 0, (j = 1, 2, ..., k)$ і $Re(\lambda_j(A)) > 0, (j = k+1, ..., n)$, то для довільної неперервної 2π-періодичної по φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$ функції $f(\varphi)$ система (3) має інваріантну тороїдальну множину $x = u(\varphi)$ і ця множина є умовно асимптотично стійкою відносно деякого k-вимірного многовиду початкових значень.*

Доведення. Розглянемо лінійну неоднорідну систему рівнянь, залежну від $\varphi \in T^m$ як від параметра

$$\dot{x} = Ax + f(\varphi_t(\varphi)). \tag{4}$$

Приведемо матрицю A за допомогою невиродженої сталої матриці S до наступного вигляду:

$$A = S^{-1} diag(A_-, A_+) S,$$

де A_-, A_+ — квадратні матриці, дійсні частини власних значень яких є від'ємними та додатними відповідно. Визначимо матрицю

$$G(t,\tau,\varphi) = \begin{cases} S^{-1} diag(e^{A_-(t-\tau)}, 0) S, & t \geq \tau, \\ -S^{-1} diag(0, e^{A_+(t-\tau)}) S, & t < \tau. \end{cases}$$

Вона задовольняє відповідну однорідну систему

$$\dot{x} = Ax,$$

та терпить розрив першого роду зі стрибком $G(\tau+0,\tau,\varphi) - G(\tau-0,\tau,\varphi) = E$.

Функція

$$x^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \tag{5}$$

для кожного $\varphi \in T^m$ є обмеженим при всіх $t \in R$ розв'язком системи (4), якщо тільки

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \| G(0, \tau, \varphi) \| \, d\tau < \infty. \tag{6}$$

Переконаємося, що в умовах теореми нерівність (6) справедлива. Справді, оскільки

$$\| e^{A_-(t-\tau)} \| \leq K_1 e^{-\gamma_1(t-\tau)}, \ t \geq \tau,$$

$$\| e^{A_+(t-\tau)} \| \leq K_2 e^{\gamma_2(t-\tau)}, \ t \leq \tau,$$

де K_1 і K_2 — додатні сталі, $0 < \gamma_1 < \min\limits_j(-\lambda_j(A_-)), 0 < \gamma_2 < \min\limits_j(\lambda_j(A_+))$, то

$$\|G(t, \tau, \varphi)\| \leq K e^{-\gamma|t-\tau|}, \tag{7}$$

при $K = max(K_1, K_2)$, $t, \tau \in R, \varphi \in T^m$. Отже,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(0, \tau, \varphi)\| \, d\tau \leq K \int\limits_{-\infty}^{0} e^{\gamma \cdot \tau} d\tau + K \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\gamma \cdot \tau} d\tau = \frac{2K}{\gamma} < \infty.$$

Запишемо $x^*(t)$ у вигляді

$$x^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} G(t, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \int\limits_{t}^{+\infty} G(t, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau$$

та формально продиференціювавши по t отримаємо $\dot{x^*} = Ax^* + f(\varphi_t(\varphi))$.

Інваріантну тороїдальну множину шукатимемо у вигляді $x = u(\varphi)$, де $u(\varphi)$ — 2π-періодична по φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$ функція. Запишемо (5) у вигляді

$$x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau,$$

і одержимо шукану інваріантну множину

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(0, \tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau.$$

Переконаємося в умовній асимптотичній стійкості одержаної інваріантної тороїдальної множини.

Нехай $x = x(t, \varphi, x_0)$ — довільний розв'язок рівняння (4), а $x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi))$ — розв'язок цього ж рівняння, що лежить на інваріантній множині. Різниця цих розв'язків допускає представлення

$$x(t, \varphi, x_0) - u(\varphi_t(\varphi)) = G(t, 0, \varphi)(x(0, \varphi, x_0) - u(\varphi)),$$

і, в силу (7), робимо висновок, що

$$\lim_{t\to+\infty} \|x(t,\varphi,x_0) - u(\varphi_t(\varphi))\| = 0, \quad x_0 \in S_k,$$

$$\lim_{t\to-\infty} \|x(t,\varphi,x_0) - u(\varphi_t(\varphi))\| = 0, \quad x_0 \in S_{n-k},$$

що й означає, що інваріантна множина $x = u(\varphi)$ є умовно асимптотично стійкою відносно k-вимірного многовиду початкових умов S_k, що й завершує доведення теореми.

Нехай $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, Ω_φ — ω-гранична множина цього розв'язку. Як відомо, наприклад із [2], Ω_φ не порожня множина для всіх $\varphi \in T^m$ в силу компактності фазового простору T^m. Через Ω позначимо об'єднання всіх Ω_φ: $\Omega = \bigcup\limits_{\varphi\in T^m} \Omega_\varphi$.

Нас цікавитиме випадок, коли матрична функція $A(\varphi)$ на множині Ω є сталою матрицею $A(\varphi) = A$ для всіх $\varphi \in \Omega$. Це означає, що для всіх $\varphi \in T^m$

$$\lim_{t\to\infty} A(\varphi_t(\varphi)) = A.$$

Теорема 2. *Якщо лінійна система (1) є гіперболічною і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці A відмінні від нуля: $Re(\lambda_j(A)) \neq 0, (j = 1,2,...,n)$, причому $Re(\lambda_j(A)) < 0, (j = 1,2,...,k)$ і $Re(\lambda_j(A)) > 0, (j = k+1,...,n)$, то для довільної неперервної 2π-періодичної по φ_j, $(j = 1,2,...,m)$ функції $f(\varphi)$ система (1) має інваріантну тороїдальну множину $x = u(\varphi)$. Крім того, в просторі E^n існують многовиди S_k і S_{n-k}, відповідно вимірів k і $n-k$, що будь-який розв'язок $\varphi_t(\varphi), x(t,\varphi,x_0)$ системи*

$$\dot{x} = A(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)) \tag{8}$$

задовольняє граничні співвідношення:

$$\begin{aligned} &\lim_{t\to+\infty} \|x(t,\varphi,x_0) - u(\varphi_t(\varphi))\| = 0, \quad x_0 \in S_k, \\ &\lim_{t\to-\infty} \|x(t,\varphi,x_0) - u(\varphi_t(\varphi))\| = 0, \quad x_0 \in S_{n-k}. \end{aligned} \tag{9}$$

Доведення. Розглянемо лінійну неоднорідну систему рівнянь (8), залежну від $\varphi \in T^m$ як від параметра.

Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що матриці $A(\varphi)$ і A блочно-діагональні:

$$A(\varphi) = diag\begin{pmatrix} A_-(\varphi_t(\varphi)) & 0 \\ 0 & A_+(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix}, \quad A = diag\begin{pmatrix} A_- & 0 \\ 0 & A_+ \end{pmatrix}.$$

Позначимо через $\Omega^t_\tau(\varphi, A_-)$ і $\Omega^t_\tau(\varphi, A_+)$ матриціанти однорідних систем

$$\dot{x_1} = A_-(\varphi_t(\varphi))x_1,$$

і

$$\dot{x_2} = A_+(\varphi_t(\varphi))x_2,$$

відповідно, для яких справедливі оцінки

$$\begin{aligned} \|\Omega_\tau^t(\varphi, A_-)\| &\leq K e^{-\gamma(t-\tau)}, \quad t \geq \tau, \\ \|\Omega_\tau^t(\varphi, A_+)\| &\leq K e^{\gamma(t-\tau)}, \ t \leq \tau, \end{aligned} \tag{10}$$

при деяких $K \geq 1$ і $\gamma > 0$ та при будь-яких $t, \tau \in R$, $\varphi \in T^m$. Покажемо справедливість першої із нерівностей (10). Для цього проведемо міркування, аналогічні до наведених у [3].

Дійсно, матрицант $\Omega_\tau^t(\varphi, A_-)$ допускає інтегральне представлення

$$\Omega_\tau^t(\varphi, A_-) = e^{A_-(t-\tau)} + \int\limits_\tau^t e^{A_-(t-s)}(A_-(\varphi_s(\varphi)) - A_-)\Omega_s^t(\varphi, A_-)ds. \tag{11}$$

Так як при деяких $K \geq 1$ і $\gamma > 0$

$$\left\|e^{A_-(t-\tau)}\right\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)}, \ t \geq \tau,$$

і при достатньо великому T і досить малому a

$$\|A_-(\varphi_s(\varphi)) - A_-\| \leq a,$$

то з (11) маємо

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi, A_-)\right\| \leq K e^{-\gamma(t-\tau)} + \int\limits_\tau^t K e^{-\gamma(t-s)} \left\|A_-(\varphi_s(\varphi)) - A_-\right\| \left\|\Omega_\tau^s(\varphi, A_-)\right\| ds,$$

$$e^{\gamma(t-\tau)} \left\|\Omega_\tau^t(\varphi, A_-)\right\| \leq K + \int\limits_\tau^T K e^{\gamma(s-\tau)} \left\|A_-(\varphi_s(\varphi)) - A_-\right\| \left\|\Omega_\tau^s(\varphi, A_-)\right\| ds +$$

$$+ \int\limits_\tau^t K a e^{\gamma(s-\tau)} \|\Omega_\tau^s(\varphi, A_-)\| ds,$$

і, отже, в силу леми Гронуолла-Беллмана знаходимо

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi, A_-)\right\| \leq K_1 e^{-(\gamma - Ka)(t-\tau)},$$

де

$$K_1 = K + \int\limits_\tau^T K e^{\gamma(s-\tau)} \left\|A_-(\varphi_s(\varphi)) - A_-\right\| \left\|\Omega_\tau^s(\varphi, A_-)\right\| ds.$$

Другу із нерівностей (10) можна довести аналогічними міркуваннями. Позначимо через

$$G(t, \tau, \varphi) = \begin{cases} diag(\Omega(\varphi, A_-), 0), & t \geq \tau, \\ -diag(0, \Omega(\varphi, A_+)), & t < \tau. \end{cases}$$

Із нерівностей (10) випливає, що $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє оцінку

$$\|G(t,\tau,\varphi)\| \leq Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \tag{12}$$

при $K \geq 1$, $\gamma > 0$ та при будь-якому $t,\tau \in R$, $\varphi \in T^m$. Враховуючи це, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(0,\tau,\varphi)\|\, d\tau \leq \frac{2K}{\gamma} < \infty.$$

Із останньої нерівності слідує, що для кожного $\varphi \in T^m$ функція

$$x^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \tag{13}$$

є обмеженим при всіх $t \in R$ розв'язком системи (8).

Інваріантну тороїдальну множину шукатимемо у вигляді $x = u(\varphi)$, де $u(\varphi)$ — 2π-періодична по φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$ функція. Запишемо (13) у вигляді

$$x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau,$$

і одержимо шукану інваріантну множину

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(0,\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau. \tag{14}$$

Покажемо, що інваріантний тор (14) експоненціально дихотомічний. Позначимо через $x = x(t,\varphi,x_0) = \Omega_0^t(\varphi)x_0$ — загальний розв'язок системи рівнянь (8), $\Omega_\tau^t(\varphi) = diag(\Omega_\tau^t(\varphi, A_-), \Omega_\tau^t(\varphi, A_+))$. Використовуючи властивості матриці $\Omega_0^t(\varphi)$ для цього розв'язку отримаємо оцінку

$$\|x(t,\varphi,x_0)\| = \|\Omega_0^t(\varphi)x_0\| = \|\Omega_\tau^t(\varphi)\Omega_0^\tau(\varphi)x_0\| = \|\Omega_\tau^{t-\tau+\tau}(\varphi)x(\tau,\varphi,x_0)\| \leq$$

$$\leq \|\Omega_0^{t-\tau}(\varphi)\|\|x(\tau,\varphi,x_0)\| \leq Ke^{-\gamma(t-\tau)}\|x(\tau,\varphi,x_0)\|,$$

справедливу для всіх $t \geq \tau$, $x_0 \in S_k$ і довільного $\varphi \in T^m$. Аналогічно можна показати, що

$$\|x(t,\varphi,x_0)\| \leq Ke^{\gamma(t-\tau)}\|x(\tau,\varphi,x_0)\|,$$

для всіх $t \leq \tau$, $x_0 \in S_{n-k}$ і довільного $\varphi \in T^m$. Цього достатньо для експоненціальної стійкості інваріантного тора. Покажемо, що граничні співвідношення (9) мають місце. Нехай $x = x(t,\varphi,x_0)$ — довільний розв'язок рівняння (8), а $x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi))$ — розв'язок цього ж рівняння, що лежить на інваріантній множині. Різниця цих розв'язків допускає представлення

$$x(t,\varphi,x_0) - u(\varphi_t(\varphi)) = G(t,0,\varphi)(x(0,\varphi,x_0) - u(\varphi)),$$

і в силу (12) робимо висновок, що рівності (9) мають місце, що й завершує доведення теореми.

Приклад. Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = \sin\varphi, \;\; \dot{x} = A(\varphi)x + f(\varphi),$$

визначену на $E^2 \times T^1$, $f(\varphi)$ — довільна неперервна 2π-періодична по φ функція. Проінтегруємо перше із рівнянь системи та отримаємо розв'язок, який задовольняє початкову умову $\varphi_0(\varphi) = \varphi$

$$\varphi_t(\varphi) = \begin{cases} \pi m, & \varphi = \pi m, \\ 2\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} \cdot e^t), & \varphi \neq \pi m. \end{cases}$$

Нехай

$$A(\varphi) = A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(\varphi) = \sin\varphi. \tag{15}$$

Покладемо

$$G(t,\tau,\varphi) = \begin{cases} diag(e^{-(t-\tau)}), 0), & t \geq \tau, \\ -diag(0, e^{(t-\tau)})), & t < \tau \end{cases},$$

і, згідно теореми 1, отримаємо

$$x_1 = u_1(\varphi) = -\frac{1}{\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}} \cdot \ln(\cos^2\frac{\varphi}{2}), \quad x_2 = u_2(\varphi) = \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} \cdot ln(sin^2\frac{\varphi}{2}).$$

Безпосередньою перевіркою можна переконатися, що $x_1 = u_1(\varphi_t(\varphi))$, $x_2 = u_2(\varphi_t(\varphi))$ є розв'язком системи

$$\dot{x} = Ax + \sin\varphi_t(\varphi).$$

Нехай

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} -\cos^2\varphi & 0 \\ 0 & \cos^2\varphi \end{pmatrix}.$$

Оскільки вздовж інтегральної кривої $\varphi_t(\varphi)$ справедлива гранична умова

$$\lim_{t\to\infty} \cos^2\varphi_t(\varphi) = \lim_{t\to\infty} \cos^2(2\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} \cdot e^t)) = \cos^2\pi = 1,$$

то матрична функція $A(\varphi)$ на множині $\Omega = \{\pi\}$ є сталою матрицею вигляду (15) і, згідно теореми 2, існує інваріантна множина розглядуваної системи. Знайдемо фундаментальну матрицю системи

$$\dot{x_1} = -\cos^2\varphi_t(\varphi) \cdot x_1, \quad \dot{x_2} = \cos^2\varphi_t(\varphi) \cdot x_2,$$

тобто матриці

$$\Omega_\tau^t(\varphi, A_-) = e^{-\int_\tau^t \cos^2\varphi_s(\varphi)ds}, \quad \Omega_\tau^t(\varphi, A_+) = e^{\int_\tau^t \cos^2\varphi_s(\varphi)ds}.$$

Виконавши ланцюг необхідних обчислень

$$\cos^2(2\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}e^s)) = \left(\frac{1 - \mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}e^{2s}}{1 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2} \cdot e^{2s}}\right)^2,$$

$$\int\limits_{\tau}^{t} cos^2\varphi_s(\varphi)ds = \int\limits_{\tau}^{t}\left(\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}e^{2s}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}e^{2s}}\right)^2 ds = t-\tau+\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}e^{2t}}-\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}e^{2\tau}},$$

робимо висновок, що шукана інваріантна множина має вигляд

$$x_1 = u_1(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0}\Omega_\tau^0(\varphi, A_-)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau = e^{\frac{-2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\tau}\cdot e^{\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}e^{2\tau}}}\cdot f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau,$$

$$x_2 = u_2(\varphi) = -\int\limits_{0}^{+\infty}\Omega_\tau^0(\varphi, A_+)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau = e^{\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\tau}\cdot e^{\frac{-2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}e^{2\tau}}}\cdot f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau.$$

Якщо, наприклад, взяти $f(\varphi) = \sin\varphi$, то, враховуючи тригонометричні перетворення

$$\sin\varphi_\tau(\varphi) = \sin\Big(2\,\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\cdot e^{\tau})\Big) = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\cdot e^{\tau}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}\cdot e^{2\tau}},$$

отримаємо

$$u_1(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{0}\Omega_\tau^0(\varphi, A_-)\sin\varphi_\tau(\varphi)d\tau = e^{\frac{-2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}}}\int\limits_{-\infty}^{0}e^{\tau}\cdot e^{\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}e^{2\tau}}}\cdot\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\cdot e^{\tau}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}\cdot e^{2\tau}}d\tau,$$

$$u_2(\varphi) = -\int\limits_{0}^{+\infty}\Omega_\tau^0(\varphi, A_+)\sin\varphi_\tau(\varphi)d\tau = -e^{\frac{2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}}}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\tau}\cdot e^{\frac{-2}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}e^{2\tau}}}\cdot\frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}\cdot e^{\tau}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}\cdot e^{2\tau}}d\tau.$$

Отже, в роботі досліджено один клас лінійних розширень динамічної системи на торі, для якого існує умовно асимптотична стійка інваріантна тороїдальна множина.

1. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1969. — 472 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
3. *Перестюк М.О., Балога С.І.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь. // Нелінійні коливання. - Т. 11, №4. - 2008. - С.520 - 529.

Одержано 27.09.2011