УДК 512.64+512.56

Бондаренко В. В., Бондаренко В. М., Степочкина М. В., Червяков И. В.
(Институт математики НАН Украины, Житомирский национальный агроэкологический университет)

1-НАДСУПЕРКРИТИЧЕСКИЕ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА С ТРИВИАЛЬНОЙ ГРУППОЙ АВТОМОРФИЗМОВ И MIN-ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ. I

In this paper we describe a natural class of partially ordered sets which are min-equivalent to 1-oversupercritical partially ordered sets with trivial group of automorphisms.

В этой работе мы описываем естественный класс частично упорядоченных множеств, min-эквивалентных 1-надсуперкритическим частично упорядоченным множествам с тривиальной группой автоморфизмов.

М. М. Клейнер [1] доказал, что ч. у. (частично упорядоченное) множество S имеет конечный представленческий тип тогда и только тогда, когда оно не содержит подмножеств вида $(1,1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,3,3)$, $(1,2,5)$ и $(И,4)$, которые называются критическими ч. у. множествами; теперь они называются критическими множествами Клейнера. С другой стороны Ю. А. Дрозд [2] показал, что ч. у. множество имеет конечный представленческий тип тогда и только тогда, когда его квадратичная форма Титса слабо положительна (т. е. положительна на множестве неотрицательных векторов). Следовательно критические множества Клейнера являются критическими и относительно слабой положительности формы Титса, причем других таких множеств нет. В работе [3] В. М. Бондаренко и М. В. Степочкина доказали, что ч. у. множество является критическим относительно положительности формы Титса тогда и только тогда, когда оно минимаксно эквивалентно критическому множеству Клейнера (такая эквивалентность введена В. М. Бондаренком в [4]); в этой работе полностью описаны все такие ч. у. множества, которые названы ее авторами P-критическими.

Аналогичная ситуация имеет место и для ручных ч. у. множеств. Л. А. Назарова [5] доказала, что ч. у. множество S является ручным тогда и только тогда, когда оно не содержит подмножеств вида $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$ и $(И,5)$, что эквивалентно слабой неотрицательности квадратичной формы Титса; эти множества названы ею суперкритическими. Значит суперкритические множества являются критическими относильно слабой неотрицательности формы Титса и других таких множеств нет. В. М. Бондаренко и М. В. Степочкина [6] доказали, что ч. у. множество является критическим относительно неотрицательности формы Титса тогда и только тогда, когда оно минимаксно эквивалентно суперкритическому множеству; все такие критические множества описаны ими в работе [7].

Заметим, что вместо минимаксной эквивалентности (которая еще называется (min, max)-эквивалентностью) часто удобнее пользоваться равносильной ей min-эквивалентностью, также подробно изученной в работе [3]. Мы используем именно эту эквивалентость, изучая уже 1-надсуперкритические ч. у. множества, которые "отличаются" от суперкритических множеств в такой же степени, как последние отличаются от критических. Эта статья является первой по этой тематике, в которой рассматриваются 1-надсуперкритические ч. у. множества с тривиальной группой автоморфизмов.

1. Предварительные сведения. Напомним некоторые определения и утверждения, связанные с min-эквивалентными ч. у. множествами. Min-эквивалентность формально является частным случаем (min, max)-эквивалентности, введенной в [4], а тот факт, что они равносильны, делает ее очень удобной для конкретных вычислений. Все рассматриваемые ч. у. множества (на протяжении всей статьи) предполагаются конечными, а под ч. у. подмножествами (которые мы, как правило, называем просто подмножествами) всегда подразумеваются полные, относительно отношения частичного порядка, подмножества.

Пусть S — ч. у. множество и a — его минимальный элемент. Через $S_a^{\uparrow}$ будем обозначать ч. у. множество, которое совпадает с S как обычное множество, с тем же отношением порядка на $S \setminus \{a\}$, но при этом элемент a является уже максимальным, причем a сравнимо с x в $S_a^{\uparrow}$ тогда и только тогда, когда a несравнимо с x в S. Будем писать $S_{xy}^{\uparrow\uparrow}$ вместо $(S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow}$, $S_{xyz}^{\uparrow\uparrow\uparrow}$ вместо $((S_x^{\uparrow})_y^{\uparrow})_z^{\uparrow}$ и т. д.

Ч. у. множество T называется min-*эквивалентным* ч. у. множеству S, если

$$T = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow} \quad (p \geq 0);$$

здесь, для каждого $i \in \{1, \ldots, p\}$, элемент x_i является минимальным элементом в $S_{x_1 x_2 \ldots x_{i-1}}^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}$ (только при выполнении этиго условия указанное выражение имеет смысл); если $p = 0$, то $T = S$. Заметим, что не требуется, чтобы элементы $x_1, x_2, \ldots, x_p$ были различными.

Понятие min-эквивалентности можно естественным образом продолжить до понятия min-изоморфизма, считая, что ч. у. множества S и S' min-*изоморфны*, если существует ч. у. множество T, min-эквивалентное S и изоморфное S'.

Пусть, как и раньше, S — ч. у. множество. Конечная последовательность $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$ элементов из S называется min-*допустимой*, если выражение $\overline{S} = S_{x_1 x_2 \ldots x_p}^{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}$ имеет смысл (случай $p = 0$ не исключается). В этом случае будем также писать $\overline{S} = S_{\alpha}^{\uparrow}$.

Множество всех min-допустимых последовательностей обозначаем $\mathcal{P}(S)$, а множество всех min-допустимых последовательностей без повторений — $\mathcal{P}_1(S)$. Подмножество в S, соответствующее последовательности $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathcal{P}_1(S)$ (т. е. состоящее из всех ее элементов x_i), обозначается через $[\alpha]_S$. Заметим, что для min-эквивалентных ч. у. множеств S и T не всегда существует последовательность $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ такая, что $T = S_{\alpha}^{\uparrow}$ (см. п. 6 [3]).

Подмножество X называется *нижним*, если $x \in X$ всякий раз, когда $x < y$ и $y \in X$ (само X и его пустое подмножество являются нижними). Запись $X < Y$ для подмножеств S будет означать, что $x < y$ для любых $x \in X, y \in Y$ ($Z < \varnothing$ и $\varnothing < Z$ для любого подмножества Z). Несравнимые элементы ч. у. множества обозначаются символом $\between$.

Согласно следствиям 5 и 9 работы [3] имеем, что если $\alpha, \beta \in \mathcal{P}_1(S)$ и $[\alpha]_S = [\beta]_S$, то $S_{\alpha}^{\uparrow} = S_{\beta}^{\uparrow}$; кроме того, если X — подмножество в S, то в $\mathcal{P}_1(S)$ существует последовательность α, такая, что $[\alpha]_S = X$, тогда и только тогда, когда подмножество X нижнее. Следовательно для нижнего подмножества X можно определить ч. у. множество $S_X^{\uparrow}$, полагая $S_X^{\uparrow} = S_{\alpha}^{\uparrow}$, где $\alpha \in \mathcal{P}_1(S)$ — любая из последовательностей таких, что $[\alpha]_S = X$. В силу предложения 6 [3] $a < b$ в $\overline{S} = S^{\uparrow}_X$ в том и только том случае, когда выполняется одно из следующих условий:

a) $a < b$ в S и либо $a, b \in X$, либо $a, b \notin X$;

b) $a \not\lessgtr b$ в S и $b \in X, a \notin X$.

Другими словами, отношение частичного порядка на X и $S \setminus X$ остается прежним, а сравнимость и несравнимость между элементами X и $S \setminus X$ меняются местами, причем новая сравнимость может быть только вида $x > y$, где $x \in X$ и $y \in S \setminus X$.

Из сказанного, в частности, следует, что если Z — нижнее подмножество в X такое, что $Z < S \setminus X$, то Z является нижним подмножеством и в $S^{\uparrow}_X$.

В работе [3] указан алгоритм для описания (с точностью до изоморфизма) всех ч. у. множеств, min-эквивалентных фиксированному ч. у. множеству S. Он состоит из следующих шагов.

I. Описать все нижние подмножества $X \neq S$ в S, и для каждого из них построить ч. у. множество $S^{\uparrow}_X$.

II. Описать все пары (Y, X), состоящие из собственного нижнего подмножества Y в S и непустого нижнего подмножества X в Y такого, что $X < S \setminus Y$; для каждой такой пары построить ч. у. множество $S^{\uparrow\uparrow}_{YX} = (S^{\uparrow}_Y)^{\uparrow}_X$.

III. Среди полученных в I и II ч. у. множеств выбрать по одному из каждого класса изоморфных множеств.

Подчеркнем, что в I случай $X = \varnothing$ не исключается, в отличии от случая $X = S$ (в обоих случаях $S^{\uparrow}_X = S$).

Полученные в результате ч. у. множества будут образовывать полное множество (попарно неизоморфных) ч. у. множеств, min-изоморфных S.

Указанные в I подмножества X и X' называются *сильно изоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi : S \to S$, такой, что $\varphi(X) = X'$ (как ч. у. подмножества). Аналогично, две указанные в II пары (Y, X) и (Y', X') назовем *сильно изоморфными*, если существует автоморфизм $\varphi : S \to S$, такой, что $\varphi(Y) = Y'$ и $\varphi(X) = X'$. Очевидно, что подмножества в I и пары подмножеств в II достаточно описывать с точностью до сильного изоморфизма.

Двойственным образом определяются max-эквивалентность и max-изоморфизм, $S^{\downarrow}_X$ и т. п. Двойственность означает, что от ч. у. множества S нужно перейти к двойственному ч. у. множеству S^{op}, рассмотреть для него то или иное понятие или утверждение и переформулировать его в терминах начального ч. у. множества S. Напомним, что двойственное ч. у. множество S^{op} совпадает с S как обычное множество и при этом $x < y$ в S^{op} тогда и только тогда, когда $x > y$ в S.

Min-эквивалентность и max-эквивалентность связаны между собой следующим равенством (см. лемму 17 [3]): $S^{\uparrow}_X = S^{\downarrow}_{S \setminus X}$, где X — нижнее подмножество S. Если S самодвойственно, т. е. $S^{\mathrm{op}} \cong S$ (символ $\cong$ обозначает, как обычно, изоморфизм ч. у. множеств), то существует биективное отображение $d : S \to S$ такое, что $d(x) < d(y)$ в том и только в том случае, когда $x > y$. Если при этом группа автоморфизмов ч. у. множества S тривиальна, то такое отображение единственно. В этом случае для любого нижнего подмножества X в S обозначим через $\overline{X}$ нижнее подмножество $d(S \setminus X) \cong (S \setminus X)^{\mathrm{op}}$; очевидно, что $\overline{\overline{X}} = X$. Тогда

из леммы 17 [3] имеем, что
$$S^{\uparrow}_{\overline{X}} \cong (S^{\uparrow}_{X})^{\mathrm{op}} \qquad (*)$$
(действительно, в силу определения ч. у. множества вида $S^{\uparrow}_{X}$, приведенного выше, и отображения d имеем очевидный изоморфизм $S^{\uparrow}_{d(S\setminus X)} \cong (S^{\downarrow}_{S\setminus X})^{\mathrm{op}}$, а в силу указанной леммы — $S^{\downarrow}_{S\setminus X} = S^{\uparrow}_{X}$). Нижние подмножества X и $\overline{X}$ будем называть *родственными*. В случае, когда группа автоморфизмов ч. у. множества S нетривиальна, родственность зависит от выбора отображения d, однако при переходе от d к d' пара родственных подмножеств переходит в сильно изоморфную пару.

2. 1-надсуперкритические ч. у. множества. Пусть P — фиксированное ч. у. множество. Будем говорить, что ч. у. множество X имеет вид P, если оно изоморфно P, и что X содержит P (как ч. у. подмножество), если в X существует подмножество, изоморфное P.

Прямой суммой $X\coprod Y$ ч. у. множеств X и Y называется ч. у. множество $X\cup Y$, где элементы обоих ч. у. множеств попарно несравнимы. Через (s) обозначаем цепь длины $1<2<\ldots s$. Прямая сумма $(i_1)\coprod(i_2)\coprod\ldots\coprod(i_p)$ цепей $(i_1),(i_2),\ldots,(i_p)$ обозначается $(i,i_2,\ldots,i_p)$. Ч. у. множества такого вида называются *примитивными*. Прямую сумму цепи (i) и ч. у. множества X будем обозначать через (i,X).

Как уже говорилось во введении, критические ч. у. множества — это ч. у. множества вида $(1,1,1,1)$, $(2,2,2)$, $(1,3,3)$, $(1,2,5)$, $(4,\text{И})$, а суперкритические — их одноэлементные расширения вида $(1,1,1,1,1)$, $(1,1,1,2)$, $(2,2,3)$, $(1,3,4)$, $(1,2,6)$ $(5,\text{И})$ (здесь И — ч. у. множество из четырех элементов и с тремя отношениями $x<y$, задаваемых буквой И). Критические и суперкритические ч. у. множества будем часто называть просто критическими и суперкритическими множествами.

Легко проверить, что если взять все пять критических множеств и рассмотреть все их одноточечные расширения, такие что либо новая точка изолирована (т. е несравнима со всеми старыми точками), либо образует новую изолированную цепь вместе с точками какой-либо старой изолированной цепи, а затем выбрать в этом классе ч. у. множеств все минимальные ч. у. множества относительно включения (по одному разу), то получим все суперкритические множества. Если эту же процедуру проделать уже с суперкритическими множествами, то полученные в результате ч. у. множества будем называть 1-*надсуперкритическими* (этот процесс можно продолжить и дальше).

Легко видеть, что 1-надсуперкритические множества — это следующие ч. у. множества:

1) $(1,1,1,1,1,1)$, 2) $(1,1,1,1,2)$, 3) $(1,1,2,2)$,

4) $(1,1,1,3)$, 5) $(2,3,3)$, 6) $(2,2,4)$, 7) $(1,4,4)$,

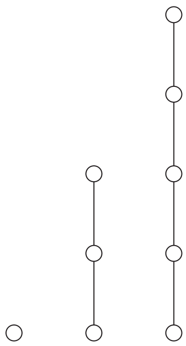
8) $(1,3,5)$, 9) $(1,2,7)$, 10) $(6,\text{И})$.

Заметим, что все критические, суперкритические и 1-надсуперкритические множества являются самодвойственными.

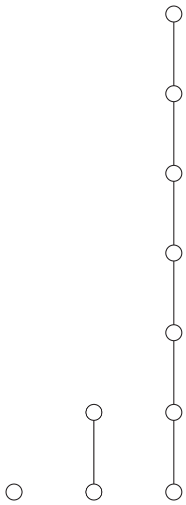
Легко видеть, что группа автоморфизмов 1-надсуперкритического множества равна S_6 в случае 1), S_4 в случае 2), $S_2\times S_2$ в случае 3), S_3 в случае 4), S_2 в случаях 5), 6), 7) и является единичной в остальных случаях – 8), 9), 10), где S_m обозначает, как обычно, симметрическую группу степени m.

3. Формулировка основного результата. Из изложенного в пункте 1 следует, что для min-эквивалентных ч. у. множеств S и T основным является случай, когда $T = S_X$, где X – нижнее подмножество S. В этой статье мы описываем ч. у. множества T такого вида в случае, когда S является примитивным 1-надсуперкритическим множеством с тривиальной группой автоморфизмов, т. е. (см. выше) для $S = A, B$, где

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\,|\,2 \prec 3 \prec 4, 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9\}$:



$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\,|\,2 \prec 3, 4 \prec 5 \prec 6 \prec 7 \prec 8 \prec 9 \prec 10\}$:



Теорема 1. *Пусть S — примитивное 1-надсуперкритическое множество с тривиальной группой автоморфизмов. Тогда*

1) *если X – собственное нижнее подмножество S, то $S_X^{\uparrow}$ не является самодвойственным;*

2) *если $X, Y \neq S$ – различные нижние подмножества S, то $S_X^{\uparrow}$ и $S_Y^{\uparrow}$ неизоморфны.*

Теорема 2. *Пусть S — примитивное 1-надсуперкритическое множество с тривиальной группой автоморфизмов. Полное множество (попарно неизоморфных) ч. у. множеств вида $S_X^{\uparrow}$, где $X \neq S$ — нижнее подмножество S, состоит из 47-и ч. у. множеств:*

1) *из 24-х ч. у. множеств, указанных в нижеследующей таблице 1 при $S = A$ и таблице 2 при $S = B$, и*

2) *двойственных к ним ч. у. множествам, не считая самого (самодвойственного) ч. у. множества S.*

Таблица 1 (для ч. у. множества (1, 3, 5))

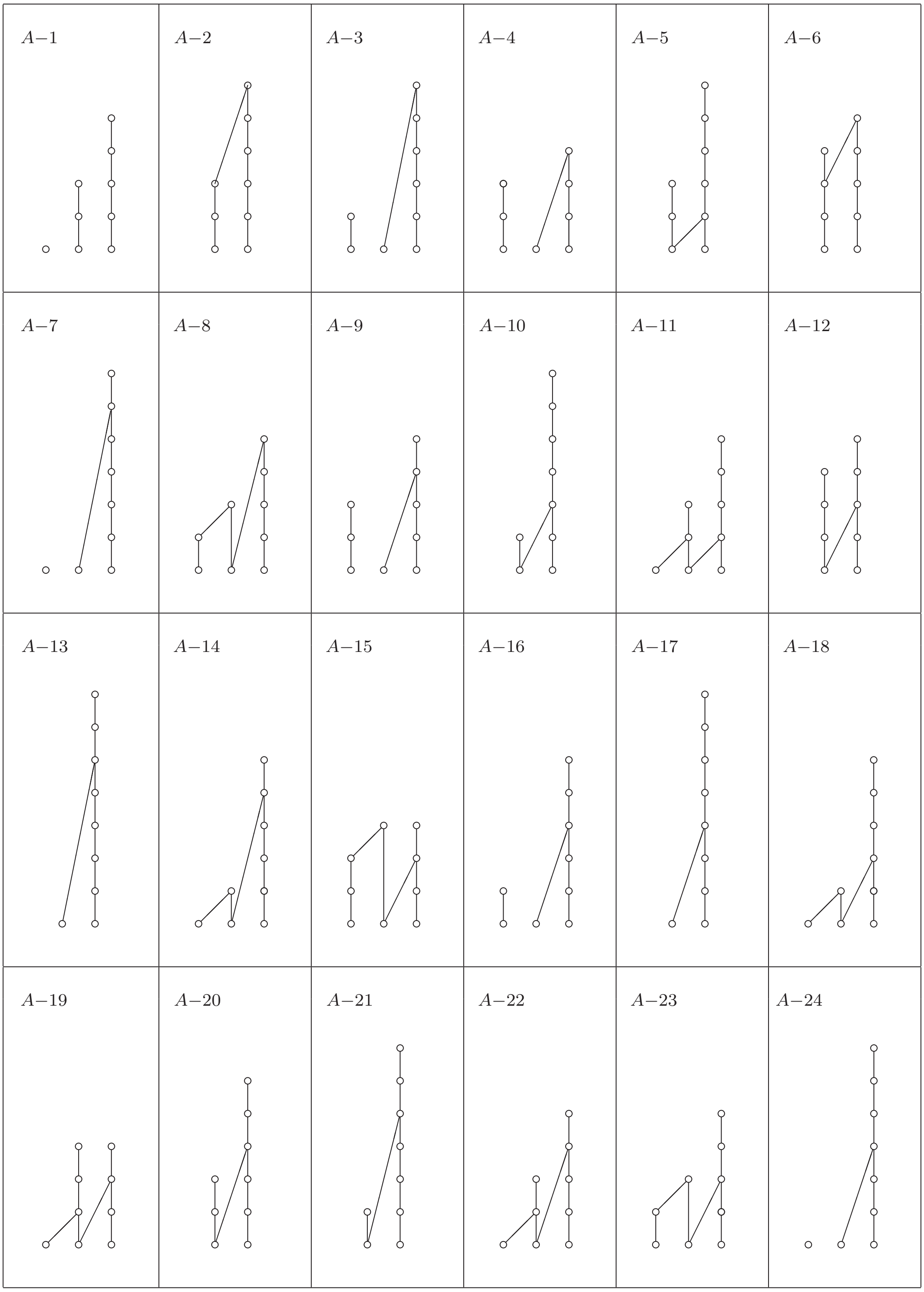
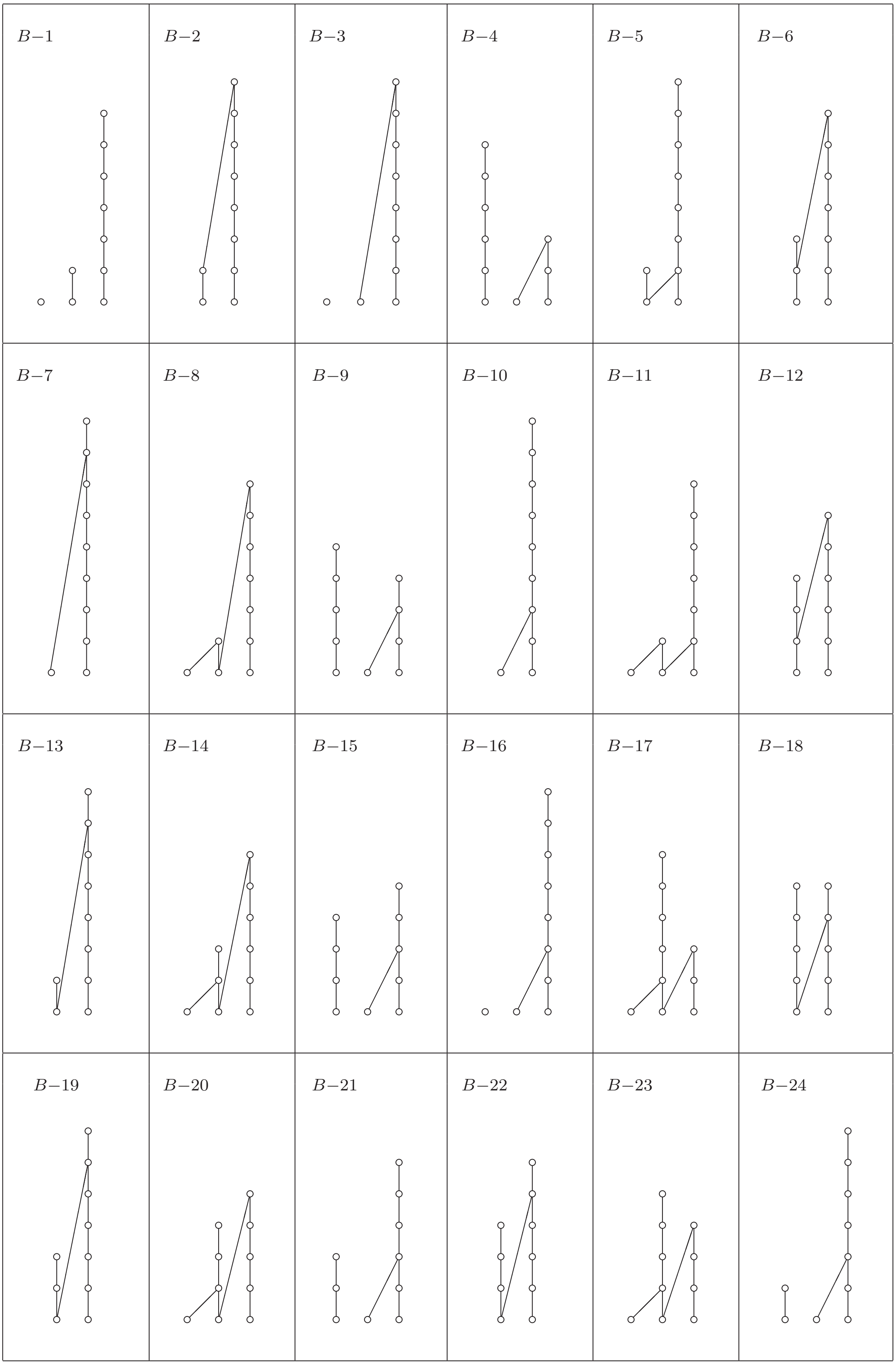


Таблица 2 (для ч. у. множества (1, 2, 7))



4. Доказательство теоремы 2. Пусть сначала $S = A$. Согласно описанному в пункте 1 алгоритму нужно рассматривать все нижние подмножества, отличные от самого множества (так как $S_S^{\uparrow} = S_{\varnothing}^{\uparrow} = S$). В этом случае имеем 47 нижних подмножеств: $A_1 = \varnothing$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$, $A_4 = \{5\}$, $A_5 = \{1,2\}$, $A_6 = \{1,5\}$, $A_7 = \{2,3\}$, $A_8 = \{2,5\}$, $A_9 = \{5,6\}$, $A_{10} = \{1,2,3\}$, $A_{11} = \{1,2,5\}$, $A_{12} = \{1,5,6\}$, $A_{13} = \{2,3,4\}$, $A_{14} = \{2,3,5\}$, $A_{15} = \{2,5,6\}$, $A_{16} = \{5,6,7\}$, $A_{17} = \{1,2,3,4\}$, $A_{18} = \{1,2,3,5\}$, $A_{19} = \{1,2,5,6\}$, $A_{20} = \{1,5,6,7\}$, $A_{21} = \{2,3,4,5\}$, $A_{22} = \{2,3,5,6\}$, $A_{23} = \{2,5,6,7\}$, $A_{24} = \{5,6,7,8\}$ и $A_{25} = \overline{A}_2, A_{26} = \overline{A}_3, \ldots, A_{47} = \overline{A}_{24}$ (определение подмножеств вида $\overline{X}$ приведено в пункте 1).

Через $\mathcal{A}_i$ будем обозначать ч. у множество $A_X^{\uparrow}$ при $X = A_i$, а через $\mathcal{A}_{\bar{i}}$ — ч. у множество $A_X^{\uparrow}$ при $X = \overline{A_i}$. В силу сквозной нумерации нижних подмножеств второе обозначение можно было бы и не вводить, однако с формальных соображений мы им будем пользоваться.

В таблице 1 помещено 24 ч. у множества, занумерованных символами А–1, А–2, ..., А–24. Легко видеть, что все они попарно неизоморфны. Более того, все эти ч. у множества и двойственные к ним также попарно неизоморфны в совокупности, кроме А–1 и (А–1)$^{\text{op}}$. Таким образом, исходя из таблицы 1 мы имеем 47 попарно неизоморфных ч. у множества (24 указаны в таблице и 23 двойственные к ним), т. е. ровно столько, сколько имеется нижних подмножеств. Укажем, какое нижнее подмножество соответствует каждому из ч. у множеств.

Легко убедиться непосредственной проверкой в том, что А–1 $\cong \mathcal{A}_1 = A$, А–2 $\cong \mathcal{A}_2$, А–3 $\cong \mathcal{A}_3$, А–4 $\cong \mathcal{A}_4$, А–5 $\cong \mathcal{A}_{\bar{5}}$, А–6 $\cong \mathcal{A}_6$, А–7 $\cong \mathcal{A}_7$, А–8 $\cong \mathcal{A}_8$, А–9 $\cong \mathcal{A}_9$, А–10 $\cong \mathcal{A}_{\overline{10}}$, А–11 $\cong \mathcal{A}_{\overline{11}}$, А–12 $\cong \mathcal{A}_{\overline{12}}$, А–13 $\cong \mathcal{A}_{13}$, А–14 $\cong \mathcal{A}_{14}$, А–15 $\cong \mathcal{A}_{15}$, А–16 $\cong \mathcal{A}_{16}$, А–17 $\cong \mathcal{A}_{\overline{17}}$, А–18 $\cong \mathcal{A}_{\overline{18}}$, А–19 $\cong \mathcal{A}_{\overline{19}}$, (А–20 $\cong \mathcal{A}_{\overline{20}}$, А–21 $\cong \mathcal{A}_{21}$, А–22 $\cong \mathcal{A}_{22}$, А–23 $\cong \mathcal{A}_{23}$, А–24 $\cong \mathcal{A}_{24}$.

Далее, в силу равенства $(*)$ имеем: (А–2)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\bar{2}}$, (А–3)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\bar{3}}$, (А–4)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\bar{4}}$, (А–5)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_5$, (А–6)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\bar{6}}$, (А–7)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\bar{7}}$, (А–8)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\bar{8}}$, (А–9)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\bar{9}}$, (А–10)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{10}$, (А–11)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{11}$, (А–12)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{12}$, (А–13)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\overline{13}}$, (А–14)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\overline{14}}$, (А–15)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\overline{15}}$, (А–16)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\overline{16}}$, (А–17)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{17}$, (А–18)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{18}$, (А–19)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{19}$, (А–20)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{20}$, (А–21)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\overline{21}}$, (А–22)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\overline{22}}$, (А–23)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\overline{23}}$, (А–24)$^{\text{op}} \cong \mathcal{A}_{\overline{24}}$.

Итак, имеется взаимно однозначное соответствие между указанными выше 47-ю нижними подмножествами и 47-ю ч. у. множествами. Теорема для $S = A$ доказана.

Случай $S = B$ рассматривается аналогичным образом (при этом мы пользуемся теми же обозначениями, но естественно с заменой A на B в соответствующих местах). В этом случае также имеем 47 нижних подмножеств (которые из-за наличия родственных нижних подмножеств занумеруем несколько иначе, чем в случае $S = A$): $B_1 = \varnothing$, $B_2 = \{1\}$, $B_3 = \{2\}$, $B_4 = \{4\}$, $B_5 = \{1,2\}$, $B_6 = \{1,4\}$, $B_7 = \{2,3\}$, $B_8 = \{2,4\}$, $B_9 = \{4,5\}$, $B_{10} = \{1,2,3\}$, $B_{11} = \{1,2,4\}$, $B_{12} = \{1,4,5\}$, $B_{13} = \{2,3,4\}$, $B_{14} = \{2,4,5\}$, $B_{15} = \{4,5,6\}$, $B_{16} = \{1,2,3,4\}$, $B_{17} = \{1,2,4,5\}$, $B_{18} = \{1,4,5,6\}$, $B_{19} = \{2,3,4,5\}$, $B_{20} = \{2,4,5,6\}$, $B_{21} = \{4,5,6,7\}$, $B_{22} = \{1,2,3,4,5\}$, $B_{23} = \{1,2,4,5,6\}$, $B_{24} = \{1,4,5,6,7\}$, $B_{25} = B_{\overline{24}} = \{2,3,4,5,6\}$, $B_{26} = B_{\overline{23}} = \{2,4,5,6,7\}$, $B_{27} = B_{\overline{22}} = \{4,5,6,7,8\}$, $B_{28} = B_{\bar{2}}$, $B_{29} = B_{\bar{3}}, \ldots, B_{47} = B_{\overline{21}}$.

Аналогично случаю $S = A$, исходя из таблицы 2 мы имеем 47 попарно неизоморфных ч. у множеств (24 указаны в таблице и 23 двойственные к ним), т. е. ровно столько, сколько имеется нижних подмножеств. Укажем, какое нижнее подмножество соответствует каждому из ч. у множеств.

Легко убедиться непосредственной проверкой в том, что B–1 $\cong \mathcal{B}_1 = B$, B–2 $\cong \mathcal{B}_2$, B–3 $\cong \mathcal{B}_3$, B–4 $\cong \mathcal{B}_4$, B–5 $\cong \mathcal{B}_{\overline{5}}$, B–6 $\cong \mathcal{B}_6$, B–7 $\cong \mathcal{B}_7$, B–8 $\cong \mathcal{B}_8$, B–9 $\cong \mathcal{B}_9$, B–10 $\cong \mathcal{B}_{\overline{10}}$, B–11 $\cong \mathcal{B}_{\overline{11}}$, B–12 $\cong \mathcal{B}_{12}$, B–13 $\cong \mathcal{B}_{13}$, B–14 $\cong \mathcal{B}_{14}$, B–15 $\cong \mathcal{B}_{15}$, B–16 $\cong \mathcal{B}_{\overline{16}}$, B–17 $\cong \mathcal{B}_{\overline{17}}$, B–18 $\cong \mathcal{B}_{\overline{18}}$, B–19 $\cong \mathcal{B}_{19}$, B–20 $\cong \mathcal{B}_{20}$, B–21 $\cong \mathcal{B}_{21}$, B–22 $\cong \mathcal{B}_{25}$, B–23 $\cong \mathcal{B}_{26}$, B–24 $\cong \mathcal{B}_{27}$.

Далее, в силу равенства ($*$) имеем: (B–2)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{2}}$, (B–3)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{3}}$, (B–4)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{4}}$, (B–5)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_5$, (B–6)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{6}}$, (B–7)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{7}}$, (B–8)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{8}}$, (B–9)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{9}}$, (B–10)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{10}$, (B–11)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{11}$, (B–12)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{12}}$, (B–13)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{13}}$, (B–14)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{14}}$, (B–15)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{15}}$, (B–16)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{16}$, (B–17)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{17}$, (B–18)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{18}$, (B–19)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{19}}$, (B–20)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{20}}$, (B–21)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{21}}$, (B–22)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{25}}$, (B–23)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{26}}$, (B–24)$^{\rm op} \cong \mathcal{B}_{\overline{27}}$.

Итак, имеется взаимно однозначное соответствие между указанными выше 47-ю нижними подмножествами и 47-ю ч. у. множествами. Теорема для $S = B$ доказана.

5. Доказательство теоремы 1. Теорема 1 вытекает непосредственно из доказательства теоремы 2.

1. *Клейнер М. М.* Частично упорядоченные множества конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 32–41.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // Функц. анализ и его прил. – 1974. – **8**. – С. 34–42.
3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2005. – **2**, №3. – С. 18-58.
4. *Bondarenko V. M.* On (min, max)-equivalence of posets and applications to the Tits forms // Bull. of the University of Kiev (series: Physics & Mathematics). – 2005. – №1. – С. 24-25.
5. *Назарова Л. А.* Частично упорядоченные множества бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1975. – **39**, N5. – С. 963–991.
6. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и неотрицательные формы Титса // Укр. мат. журнал. – 2008, **60**, №9. – С. 1157-1167.
7. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Описание частично упорядоченных множеств, критических относительно неотрицательности квадратичной формы Титса // Укр. мат. журнал. – 2009. – **61**, №5. – С. 734–746

Одержано 12.10.2011