МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

О. О. СИНЯВСЬКА, П. В. СЛЮСАРЧУК

РЯДИ ФУР'Є

Навчальний посібник
для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика

Ужгород – 2015

УДК 517.443(075.8)
ББК В 161.2я73
С-38

О. О. Синявська, П. В. Слюсарчук. Ряди Фур'є. Навчальний посібник для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика. – Ужгород, 2015. – 70 с.

У навчальному посібнику стисло викладаються основні теоретичні відомості з розділу математичного аналізу «Ряди Фур'є». Наведено приклади, які допоможуть краще засвоїти теоретичний матеріал, а також задачі для самостійного розв'язання.

Для студентів спеціальностей математика, прикладна математика, статистика.

Рецензенти:

Курченко О.О., доктор фіз.-мат. наук, професор кафедри математичного аналізу Київського національного ун-ту ім. Т. Шевченка;

Маринець В.В., доктор фіз.-мат. наук, завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики УжНУ , професор.

Друкується за рішенням Редакційно-видавничої ради ДВНЗ «Ужгородського національного університету», протокол № 1 від 20 лютого 2015 р.

Зміст

Передмова

Одним із важливих розділів математичного аналізу є «Ряди Фур'є». Вони відіграють важливу роль у математичній фізиці, теорії пружності, електромеханіці, теорії випадкових процесів та полів. До вивчення цих рядів історично призвели деякі задачі фізики, наприклад, задача про коливання струни, задача про закономірності в явищах теплопровідності та інші.

Основоположником теорії рядів Фур'є є відомий французький математик Жан Батіст Жозеф Фур'є (1768-1830). Перші його роботи відносились до питань алгебри. Уже в лекціях 1796 р. ним було отримано теорему про число дійсних коренів алгебраїчного рівняння, що лежать між даними границями (опублікована 1820 р.), яку пізніше назвали його ім'ям; повне вирішення питання про число дійсних коренів алгебраїчного рівняння було одержане у 1829 р. Ж. Ш. Ф. Штурманом. У 1818 р. Фур'є досліджував питання про умови застосування розробленого І. Ньютоном методу числового розв'язання рівнянь, не знаючи про аналогічні результати, які були одержані в 1768 р. французьким математиком Ж. Р. Мурайлем. Підсумком робіт Фур'є по чисельним методам рівнянь є «Аналіз визначених рівнянь», виданий посмертно у 1831 р.

До основної галузі занять Фур'є належала математична фізика. У 1807 і 1811 роках він представив Паризькій Академії Наук свої перші відкриття по теорії поширення тепла у твердому тілі, а у 1822 р. опублікував відому роботу «Аналітична теорія тепла», яка зіграла велику роль у подальшій історії математики. Ця книга стала джерелом всіх сучасних методів математичної фізики. У ній Фур'є вивів диференціальне рівняння теплопровідності і розвинув ідеї, наведені раніше тільки у загальних рисах Д. Бернуллі, розробив метод відокремлення змінних для розв'язання рівняння теплопровідності при тих чи інших заданих граничних умовах, який він застосовував у ряді частинних випадків. В основі цього методу лежить зображення функцій тригонометричними рядами Фур'є, які хоча і розглядались іноді раніше, але стали важливою частиною математичної фізики лише у Фур'є.

Метод відокремлення змінних отримав подальший розвиток у працях С. Пуассона, М. В. Остроградського та інших математиків XIX ст. «Аналітична теорія тепла» стала відправним пунктом створення теорії тригонометричних рядів і розробки деяких загальних проблем математичного аналізу. Фур'є навів перші приклади розкладу в тригонометричні ряди Фур'є функцій, які задані на різних ділянках з різноманітними аналітичними виразами. Його спроба довести можливість розкладу в тригонометричний ряд Фур'є будь-якої функції була невдалою, але започаткувала великий цикл досліджень присвячених проблемі представлення функцій тригонометричними рядами (П. Діріхле, М. І. Лобачевський, Б. Ріман та інші). З цими дослідженнями було в значній мірі пов'язане виникнення теорії множин та теорії функції дійсної змінної.

Тригонометричні ряди Фур'є та інтеграли Фур'є використовуються у багатьох галузях фізико-математичних наук, є необхідними складовими при розв'язанні багатьох задач.

§1 Тригонометричні ряди Фур'є

1.1. Поняття про тригонометричний ряд Фур'є. Постановка задачі. Знаходження коефіцієнтів. Розглянемо функцію вигляду $y = A\sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi\right)$, графіком якої є синусоїда, вона задає гармонійні коливання. Число A називають амплітудою, $\frac{2\pi k}{T}$, $k \in \mathrm{N}$, – частотою, а φ – початковою фазою гармонійного коливання.

Розглянемо тепер суму $A_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right)$, яка буде суперпозицією гармонійних коливань. Цю функцію можна розглядати як частинну суму ряду

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right).$$

Сума ряду $A_0 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right) = f(x)$ є періодичною з періодом T функцією. Оскільки,

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T}x + \varphi_k\right) =$$

$$= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(A_k \sin\frac{2\pi k}{T}x\cos\varphi_k + A_k\cos\frac{2\pi k}{T}x\sin\varphi_k\right),$$

то позначивши $\frac{a_0}{2} = A_0$, $A_k\cos\varphi_k = b_k$, $A_k\sin\varphi_k = a_k$, $k \ge 1$, $T = 2l$, одержимо ряд вигляду:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right). \qquad (1.1)$$

Означення 1.1. Функціональний ряд у правій частині рівності (1.1) називається *тригонометричним*, сталі a_0, a_k, b_k, $k \in \mathrm{N}$, – *коефіцієнтами* тригонометричного ряду, а система (послідовність) функцій

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, \ldots, \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, \ldots$$

називається *основною тригонометричною системою функцій* на проміжку $[-l, l]$.

Якщо справедлива рівність

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x + b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right),$$

то таку рівність називатимемо розкладом функції $f(x)$ в ряд Фур'є.

Із означення випливають наступні властивості.

1. Якщо рівність (1.1) має місце, то функція $f(x)$ періодична з періодом $T = 2l$.

2. Якщо ряд (1.1) рівномірно збіжний на $[-l,l]$, то функція $f(x)$ буде інтегровною на цьому відрізку і ряд можна почленно інтегрувати на відрізку $[-l,l]$.

Нехай задано основну тригонометричну систему функцій на проміжку $[-l,l]$:

$$\frac{1}{2},\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},...,\cos\frac{k\pi x}{l},\sin\frac{k\pi x}{l},...$$

Виникають наступні задачі: яку функцію $f(x)$ періодичну з періодом $2l$ можна розкласти в ряд вигляду

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi}{l}x+b_k\sin\frac{k\pi}{l}x\right);$$

як знайти коефіцієнти a_0,a_k,b_k, $k\in\mathrm{N}$, якщо цей розклад можливий; яка залежність між властивостями функції і збіжністю ряду.

Для знаходження коефіцієнтів ряду (1.1), обчислимо наступні інтеграли:

$$\int_{-l}^{l}\frac{1}{2}dx=l;$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}=0,\ \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=-\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}=0,\ \forall n\in N;$$

$$\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1+\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=l+\frac{1}{2}\frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}=l;$$

$$\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(1-\cos\frac{2n\pi x}{l}\right)dx=l-\frac{1}{2}\frac{l}{2n\pi}\sin\frac{2n\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}=l;$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n+m)\pi x}{l}+\cos\frac{(m-n)\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{(n+m)\pi}\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}+\frac{l}{(m-n)\pi}\sin\frac{(m-n)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}\right)=0,\quad m\neq n;$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\cos\frac{(n-m)\pi x}{l}-\cos\frac{(m+n)\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{l}{(n-m)\pi}\sin\frac{(n-m)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}-\frac{l}{(m+n)\pi}\sin\frac{(m+n)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}\right)=0,\quad m\neq n;$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(\sin\frac{(n+m)\pi x}{l}+\sin\frac{(n-m)\pi x}{l}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-l}{(n+m)\pi}\cos\frac{(n+m)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}-\frac{l}{(n-m)\pi}\cos\frac{(n-m)\pi x}{l}\Big|_{-l}^{l}\right)=0,\quad m\neq n;$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{2n\pi x}{l}dx=$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{l}{2n\pi}\cos\frac{2n\pi x}{l}\bigg|_{-l}^{l} = 0.$$

Ми показали, що справедливі рівності:

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx = 0,\ \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx = 0,\ \forall n \in N; \tag{1.2}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = 0,\ \forall m,n \in Z; \tag{1.3}$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ l, & m = n \end{cases}, \tag{1.4}$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ l, & m = n \end{cases}. \tag{1.5}$$

Будемо вважати, що ряд (1.1) рівномірно збіжний на $[-l,l]$, тоді функція $f(x)$ буде інтегровною на цьому відрізку і ряд можна почленно інтегрувати на відрізку $[-l,l]$.

Проінтегруємо рівність (1.1) на відрізку $[-l,l]$ і використаємо рівності (1.2). Тоді

$$\int_{-l}^{l}f(x)dx = \int_{-l}^{l}\frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) = a_0 l.$$

Звідси $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$.

Помножимо рівність (1.1) на $\cos\frac{m\pi x}{l}$ та проінтегруємо одержану рівність на проміжку $[-l,l]$. Із рівностей (1.2), (1.3), (1.4) одержимо:

$$\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\cos\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) = a_m l.$$

Тоді $a_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{m\pi x}{l}dx$, $m = 1,2,\ldots$.

Аналогічно, помножимо (1.1) на $\sin\frac{m\pi x}{l}$ і проінтегруємо на $[-l,l]$. Тоді із рівностей (1.2), (1.3), (1.5) одержимо:

$$\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx + b_n\int_{-l}^{l}\sin\frac{m\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) = b_m l.$$

Звідси $b_m = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{m\pi x}{l}dx$, $m = 1,2,\ldots$.

Отже, для будь-якої інтегровної на відрізку $[-l,l]$ функції $f(x)$ можна знайти коефіцієнти:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx,\ a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n\in N. \quad (1.6)$$

Ці коефіцієнти (1.6) називаються *коефіцієнтами Фур'є* для функції $f(x)$ за основною тригонометричною системою функцій на проміжку $[-l,l]$.

Означення 1.2. Ряд виду

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

коефіцієнти якого знаходяться за формулами (1.6), називається *тригонометричним рядом Фур'є* для функції $f(x)$ на проміжку $[-l,l]$.

Отже, кожній інтегровній на відрізку $[-l,l]$ функції $f(x)$ можна поставити у відповідність її тригонометричний ряд Фур'є:

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

При знаходженні коефіцієнтів ми встановили, що будь-який рівномірно збіжний тригонометричний ряд є рядом Фур'є своєї суми. Пізніше ми будемо шукати умови, при виконанні яких можлива рівність. Тобто, коли $f(x)$ буде сумою свого ряду Фур'є на $[-l,l]$.

<u>Приклад 1.1.</u> Знайти ряд Фур'є для функції $f(x)=x$ на проміжку $[-\pi,\pi]$.

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнти Фур'є.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=0,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos nxdx=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right)=\frac{\cos nx}{\pi n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi n^2}\left(\cos n\pi-\cos n(-\pi)\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}+\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\pi\frac{\cos n\pi}{n}-\pi\frac{\cos n\pi}{n}\right)+\frac{\sin nx}{\pi n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Отже, ряд Фур'є для заданої функції має вигляд:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx.$$

1.2. Ряди Фур'є для парної і непарної функцій. Розклад на відрізку $[-\pi,\pi]$. Розклад на довільному відрізку. Нагадаємо, що функцію $f(x)$, яка визначена на відрізку $[-l,l]$, $l>0$, називають *парною*, якщо для довільного $x\in[-l,l]$

$$f(-x)=f(x).$$

Якщо ж для довільного $x\in[-l,l]$

$$f(-x)=-f(x),$$

то функцію $f(x)$ називають *непарною*.

За властивостями визначеного інтеграла, якщо $f(x)$ є інтегровною на $[-l,l]$, парною функцією, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=2\int_{0}^{l} f(x)dx,$$

а якщо непарною, то

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx=0.$$

Відзначимо ще одну властивість періодичної функції. Якщо функція $f(x)$ – визначена на R, періодична з періодом T та інтегровна на будь-якому скінченному проміжку, то

$$\int_{0}^{T} f(x)dx=\int_{a}^{a+T} f(x)dx,\ \forall a\in\mathrm{R}. \tag{1.7}$$

Для доведення розглянемо інтеграл

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx=\int_{a}^{T} f(x)dx+\int_{T}^{a+T} f(x)dx.$$

Використовуючи те, що функція $f(x)$ є періодичною з періодом T, після виконання заміни у другому інтегралі

$$\int_{T}^{a+T} f(x)dx=\begin{vmatrix} x=T+y \\ dx=dy \end{vmatrix}=\int_{0}^{a} f(T+y)dy=\int_{0}^{a} f(y)dy,$$

одержимо

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx=\int_{a}^{T} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=\int_{0}^{T} f(x)dx.$$

Нехай $f(x)$ – парна, інтегровна на відрізку $[-l,l]$. Тоді функція $f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ буде парною, а $f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ – непарною. Використовуючи властивості інтеграла від парних і непарних функцій по симетричному проміжку, із формул (1.6) коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$ мають наступний вигляд:

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\quad n\in\mathrm{N},$$

а $b_n = 0, n \in \mathrm{N}$.

Отже, ряд Фур'є парної функції $f(x)$ інтегровної на відрізку $[-l, l]$ має вигляд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

де коефіцієнти визначаються за формулами

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx, \; a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{1.8}$$

Нехай $f(x)$ – непарна, інтегровна на відрізку $[-l, l]$. Тоді функція $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ буде непарною, а $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$ – парною. Використовуючи властивості інтеграла від парних і непарних функцій по симетричному проміжку, із формул (1.6) коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$ мають наступний вигляд:

$$a_0 = 0, \; a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n \in \mathrm{N}. \tag{1.9}$$

Отже, ряд Фур'є непарної функції $f(x)$ має вигляд

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

де коефіцієнти b_n визначаються за формулами (1.9).

<u>Приклад 1.2.</u> Знайти ряд Фур'є для функції $f(x) = x^2, \; x \in [-\pi, \pi]$.

Розв'язання. Дана функція парна. Всі коефіцієнти $b_n = 0$, а коефіцієнти a_0 та a_n знаходимо за формулами (1.8) при $l = \pi$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(x^2 \frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}2x dx\right) = -\frac{4}{\pi n}\int_0^{\pi} x\sin nx dx =$$

$$= -\frac{4}{\pi n}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right) = -\frac{4}{\pi n}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{\sin nx}{n^2}\bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a, b]$. Цю функцію можна періодично продовжити на всю числову вісь з періодом $T = b - a = 2l$ і, використовуючи властивість (1.7), коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n \in \mathrm{N}.$$

Отже, вигляд ряду Фур'є для функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ не змінюється:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

а коефіцієнти Фур'є знаходяться за наступними формулами ($2l = b - a$):

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)dx,\ a_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,\ b_n = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\ n \in N. \quad (1.10)$$

<u>Приклад 1.3.</u> Знайти ряд Фур'є для функції $f(x) = x^2$, $x \in [0, 2\pi]$.

Розв'язання. Коефіцієнти Фур'є знаходимо за формулами (1.10) при $a = 0$, $b = 2\pi$, $l = \pi$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2 \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(x^2\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_{0}^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}2x dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\int_{0}^{2\pi} x \sin nx dx = -\frac{2}{\pi n}\left(-x\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(\frac{2\pi}{n} - \left.\frac{\sin nx}{n^2}\right|_0^{2\pi}\right) = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} x^2 \sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-x^2\left.\frac{\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} + \int_{0}^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}2x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\int_{0}^{2\pi} x \cos nx dx\right) = \frac{2}{\pi n}\left(-2\pi^2 + x\left.\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \int_{0}^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(-2\pi^2 + \left.\frac{\cos nx}{n^2}\right|_0^{2\pi}\right) = -\frac{4\pi}{n}, \quad n \in \mathrm{N}.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) \sim \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $\left[-l,l\right]$ і має місце рівність (1.1):

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Зробимо в рівностях (1.1) і (1.6) заміну $\frac{\pi x}{l}=t$, $x\in[-l,l]$. Тоді $x=\frac{tl}{\pi}$, а змінна $t\in[-\pi,\pi]$. Звідки

$$f_1(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nt+b_n\sin nt\right), \qquad (1.1^*)$$

а коефіцієнти Фур'є, після виконання підстановки $x=\frac{tl}{\pi}$ в (1.6), знаходяться за формулами

$$a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f\left(\frac{lt}{\pi}\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(t)dt,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(t)\cos nt\,dt,\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(t)\sin nt\,dt. \qquad (1.6^*)$$

Отже, рівність (1.1*) є розкладом в ряд Фур'є функції $f_1(t)$, що задана на проміжку $[-\pi,\pi]$, з коефіцієнтами (1.6*). Враховуючи (1.10), у формулах (1.6*) інтеграли можна брати за будь-яким проміжком довжиною 2π. Якщо в рівностях (1.1*) і (1.6*) виконаємо перетворення $t=\frac{\pi x}{l}$, то одержимо рівності (1.1) і (1.6). Це означає, що можна вивчати властивості рядів Фур'є для функцій, що задані на проміжку $[-\pi,\pi]$. Ці властивості переносяться на випадок функцій, що задані на довільному проміжку.

1.3. Лема Рімана. *Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $\left[a,b\right]$ (можливо у невласному розумінні, функція може бути необмежена або проміжок нескінченний), тоді*

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,dx=0,\ \lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,dx=0.$$

Доведення. Обидва твердження доводяться однаково. Розглянемо перше.

Нехай $f(x)$ – інтегровна на $\left[a,b\right]$. Розглянемо розбиття $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ і позначимо $m_k=\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)$, $M_k=\sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]}f(x)$. Тоді

$$\int_a^b f(x)\sin px\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f(x)\sin px\,dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x)-m_k\right)\sin px\,dx+\sum_{k=1}^{n}m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin px\,dx.$$

Тому

$$\left|\int_a^b f(x)\sin px\,dx\right|\le\left|\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left(f(x)-m_k\right)\sin px\,dx\right|+\left|\sum_{k=1}^{n}m_k\int_{x_{k-1}}^{x_k}\sin px\,dx\right|\le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (f(x) - m_k) dx + \left| \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{1}{p} (\cos px_{k-1} - \cos px_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k + \frac{2}{|p|} \sum_{k=1}^{n} |m_k|.$$

Нехай задане довільне $\varepsilon > 0$. Із інтегровності $f(x)$ на $[a,b]$ випливає, що можна вибрати розбиття, для якого

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафіксуємо таке розбиття, тому і $\sum_{k=1}^{n} |m_k|$ буде фіксованою. Оскільки $\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{n} |m_k| \to 0$ при $p \to \infty$, то для довільного $\varepsilon > 0$ існує $p_0 = \frac{4}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} |m_k|$, що для всіх p, де $|p| > p_0$,

$$\frac{2}{|p|} \sum_{k=1}^{n} |m_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тобто, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $p_0 > 0$, що для всіх p, для яких $|p| \geq p_0$,

$$\left| \int_a^b f(x) \sin pxdx \right| < \varepsilon.$$

А це означає, що

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^b f(x) \sin pxdx = 0.$$

Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $[a,b)$ у невласному розумінні, b – особлива точка. Тоді $\int_a^b |f(x)| dx$ – збіжний і для довільного $c \in [a,b)$

$$\left| \int_a^b f(x) \sin pxdx \right| \leq \left| \int_a^c f(x) \sin pxdx \right| + \left| \int_c^b f(x) \sin pxdx \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_a^c f(x) \sin pxdx \right| + \int_c^b |f(x)| dx.$$

Із абсолютної збіжності інтеграла випливає, що $\lim_{c \to b-0} \int_c^b |f(x)| dx = 0$. Нехай задане довільне $\varepsilon > 0$. Тоді існує $c' \in (a,b)$ таке, що для будь-якого $c \in (c',b)$ $\int_c^b |f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Зафіксуємо таке c. На проміжку $[a,c]$ функція $f(x)$ інтегрована у власному розумінні, тому

$$\lim_{p \to \infty} \int_a^c f(x) \sin pxdx = 0,$$

а це означає, що для заданого $\varepsilon > 0$ існує $p_0 > 0$, що для всіх p, для яких $|p| \geq p_0$,

$$\left| \int_a^c f(x) \sin pxdx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує $p_0 > 0$, що для всіх p, для яких $|p| \geq p_0$,

$$\left|\int_a^b f(x)\sin pxdx\right| < \varepsilon,$$

а це означає, що

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin pxdx = 0.$$

Нехай тепер $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $[a,\infty)$. Тоді

$$\left|\int_a^\infty f(x)\sin pxdx\right| \le \left|\int_a^c f(x)\sin pxdx\right| + \left|\int_c^\infty f(x)\sin pxdx\right| \le$$

$$\le \left|\int_a^c f(x)\sin pxdx\right| + \int_c^\infty |f(x)|dx,$$

де $\int_c^\infty f(x)dx \to 0$, $c \to +\infty$. Тобто, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $c' > a$ таке, що для будь-якого $c \ge c'$

$$\int_c^\infty |f(x)|dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Знову зафіксуємо таке *c*. На проміжку [*a*,*c*] функція $f(x)$ інтегрована у власному розумінні, тому

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^c f(x)\sin pxdx = 0.$$

А це означає, що для заданого $\varepsilon > 0$ існує p_0>0, що для всіх p, для яких $|p| \ge p_0$,

$$\left|\int_a^c f(x)\sin pxdx\right| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ існує p_0>0, що для всіх p, для яких $|p| \ge p_0$,

$$\left|\int_a^{+\infty} f(x)\sin pxdx\right| < \varepsilon,$$

а це означає, що

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^{+\infty} f(x)\sin pxdx = 0.$$

Лему доведено.

Наслідок 1.1. *Якщо функція $f(x)$ абсолютно інтегровна на $[-l,l]$, то коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$ $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$.*

<u>Приклад 1.4.</u> Знайти границю $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos^3 nxdx$, де $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$.

Розв'язання. За допомогою тригонометричних формул, знайдемо:

$$\cos^3\alpha = \cos\alpha\cdot\cos^2\alpha = \cos\alpha\frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{4}(\cos\alpha + \cos 3\alpha).$$

Тоді за лемою Рімана

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos^3 nxdx = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\int_a^b f(x)\cos nxdx + \frac{1}{4}\int_a^b f(x)\cos 3nxdx\right) = 0.$$

1.4. Зображення частинної суми ряду Фур'є інтегралом Діріхле. Нехай $f(x)$ – періодична з періодом 2π, абсолютно інтегрована на проміжку $[-\pi,\pi]$ (можливо і у невласному розумінні), а отже і в будь-якому скінченному проміжку. Знайдемо коефіцієнти Фур'є цієї функції

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx,\quad n\in N,$$

і запишемо відповідний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n \sin nx).$$

Для дослідження поведінки ряду Фур'є в якій-небудь фіксованій точці x_0, розглянемо його частинну суму

$$S_n(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx_0 + b_m\sin mx_0). \tag{1.11}$$

Оскільки, $S_n(x)$ – періодична з періодом 2π, то досить розглядати випадок $x_0 \in [-\pi,\pi]$.

Підставимо значення коефіцієнтів Фур'є у (1.11). Тоді

$$S_n(x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\cos mx\cos mx_0 + \sin mx \sin mx_0)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx + \frac{1}{\pi}\sum_{m=1}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos m(x-x_0)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(x-x_0)\right)dx. \tag{1.12}$$

Використовуючи тотожність

$$\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{m=1}^{n} 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos m\alpha\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sum_{m=1}^{n}\left(\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(m-\frac{1}{2}\right)\alpha\right)\right) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}},\ \alpha \ne 2\pi k,\ n\in Z,$$

із (1.12) одержимо:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)(x-x_0)}{2\sin\frac{x-x_0}{2}}dx.$$

Цей інтеграл називають *інтегралом Діріхле*.

Виконаємо підстановку $x - x_0 = t$, тоді

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi + x_0}^{\pi + x_0} f(t + x_0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

Функції $f(t)$ і $\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos mt = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ – періодичні з періодом 2π, тому за властивістю (1.7)

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t + x_0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(t + x_0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(t + x_0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} dt.$$

У першому інтегралі виконаємо заміну змінної $t = -x$. Тоді проміжок інтегрування зведеться до проміжку $[0, \pi]$ і ми одержимо наступний вигляд частинної суми ряду Фур'є:

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left(f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\right) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} dx. \qquad (1.13)$$

Інтеграл у правій частині рівності (1.13) називається *інтегралом Діріхле*, а сама рівність називається *інтегральним зображенням частинної суми ряду Фур'є*. Для дослідження збіжності ряду Фур'є необхідно дослідити поведінку даного інтеграла.

Нехай задано довільне $0 < \delta < \pi$. Тоді

$$S_n(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\delta} \left(f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\right) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\pi} \left(f(x_0 + x) + f(x_0 - x)\right) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} dx. \qquad (1.14)$$

Для $0<\delta<\pi$ функція $\dfrac{f(x_0+x)+f(x_0-x)}{\sin\dfrac{x}{2}}$ інтегрована на $[\delta,\pi]$, тому за лемою Рімана другий доданок в (1.14)

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\left(f(x_0+x)+f(x_0-x)\right)}{2\sin\dfrac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx\to 0,\, n\to\infty .$$

Ми одержали, що другий доданок в (1.14) прямує до нуля при $n\to\infty$, а для першого доданку із (1.14) $x\in[0,\delta]$, тому поведінка часткової суми ряду Фур'є в точці x_0 визначається тільки значеннями функції на проміжку $[x_0-\delta, x_0+\delta]$. Ми обґрунтували "*принцип локалізації", який полягає у наступному:*

поведінка ряду Фур'є функції $f(x)$ в деякій точці x_0 залежить виключно від значень цієї функції в як завгодно малому околі цієї точки.

Отже, якщо взяти дві функції, значення яких в довільному малому околі точки x_0 співпадають, то як би вони не відрізнялись зовні цього околу, відповідні цим функціям ряди Фур'є поводять себе в точці x_0 однаково: або обидва збігаються і мають одну і туж суму, або обидва розбігаються.

Необхідно відзначити, що коефіцієнти Фур'є для даних функцій, залежать від всіх їх значень, можуть бути зовсім різними.

1.5. Умови збіжності ряду Фур'є. Нехай функція $f(x)$ – інтегровна на проміжку $[-\pi,\pi]$, періодична з періодом 2π. Тоді цій функції можна поставити у відповідність ряд Фур'є:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),\quad x\in[-\pi,\pi]. \tag{1.15}$$

Позначимо через $S_n(x_0)$ частинну суму ряду Фур'є в точці x_0. Оскільки, $S_n(x)$ – періодична з періодом 2π, то досить розглядати випадок $x_0\in[-\pi,\pi]$. Тоді із (1.14)

$$S_n(x_0)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{n}\left(a_m\cos mx_0+b_m\sin mx_0\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x_0+x)+f(x_0-x)\right)\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}}dx. \tag{1.16}$$

Проінтегруємо на проміжку $[-\pi,\pi]$ тотожність

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{n}\cos mx=\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)x}{2\sin\dfrac{x}{2}},$$

із рівностей (1.2), при $l=\pi$ ($\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx dx=0$), одержимо

$$\pi=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx.$$

Враховуючи, що підінтегральна функція є парною, отримаємо рівність

$$1=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx.$$

Відзначимо, що цю рівність можна отримати із (1.14), якщо в ній покласти $f(x)\equiv 1$ на проміжку $[-\pi,\pi]$, тоді і $S_n(x)\equiv 1$.

Нехай S_0 – деяке фіксоване число. Помножимо останню рівність на S_0 та віднімемо від (1.16):

$$S_n(x_0)-S_0=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x_0+x)+f(x_0-x)\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx-S_0\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx,$$

Тобто,

$$S_n(x_0)-S_0=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\left(f(x_0+x)+f(x_0-x)-2S_0\right)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx. \qquad (1.17)$$

Теорема 1.1. *Для того, щоб ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігався в точці x_0 і мав суму S_0, тобто щоб $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)=S_0$, необхідно й достатньо, щоб існувало $\delta\in(0,\pi)$ таке, що*

$$\int_{0}^{\delta}\varphi(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}dx\to 0,\ n\to\infty, \qquad (1.18)$$

де $\varphi(x)=f(x_0+x)+f(x_0-x)-2S_0$.

Доведення. Для будь-якого $\delta\in(0,\pi)$ із (1.17) маємо

$$S_n(x_0)-S_0=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\delta}\varphi(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}dx+\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\varphi(x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx.$$

Для будь-якого $\delta \in (0,\pi)$ функція $\dfrac{\varphi(x)}{\sin\frac{x}{2}}$ інтегрована на проміжку (δ,π), тому за лемою Рімана

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{\varphi(x)}{\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx \to 0, \text{ при } n\to\infty.$$

Отже, умова: існує таке $\delta \in (0,\pi)$, для якого

$$\int_{0}^{\delta}\varphi(x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}dx \to 0, \quad n\to\infty,$$

рівносильна умові

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x_0)=S_0.$$

Теорема доведена.

Покладемо

$$S_0=\frac{1}{2}\bigl(f(x_0+0)+f(x_0-0)\bigr)$$

при $x_0\in(-\pi,\pi)$, а для $x_0=\pi$ або $x_0=-\pi$

$$S_0=\frac{1}{2}\bigl(f(\pi-0)+f(-\pi+0)\bigr).$$

Якщо $x_0\in(-\pi,\pi)$ є точкою неперервності функції $f(x)$, то $S_0=f(x_0)$. При такому виборі S_0

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0.$$

Теорема 1.2 (ознака Діні). *Нехай $f(x)$ – інтегровна, періодична з періодом 2π функція та існує $\delta\in(0,\pi)$ таке, що*

$$\int_{0}^{\delta}\frac{|\varphi(x)|}{x}dx \tag{1.19}$$

існує, тоді ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається в точці x_0 і має суму S_0. Тобто $S_n(x_0)\to S_0$, $\quad n\to\infty$.

Доведення. Із існування інтеграла (1.19) та інтегровності функції $f(x)$ випливає існування інтеграла $\int_{0}^{\pi}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt$, тому і функція $\dfrac{\varphi(x)}{x}\dfrac{x}{\sin\frac{x}{2}}$ буде абсолютно інтегрованою на проміжку $[-\pi,\pi]$ та із (1.17)

$$\left|S_n(x_0)-S_0\right|\le\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{|\varphi(x)|}{x}\frac{x}{2\sin\frac{x}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)xdx.$$

За лемою Рімана права частина попередньої нерівності прямує до 0 при $n \to \infty$. А це означає, що ряд Фур'є для функції $f(x)$ збігається в точці x_0 і його сума дорівнює S_0. Теорема доведена.

Оскільки,

$$\varphi(x) = f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2S_0 =$$
$$= f(x_0 + x) - f(x_0 + 0) + f(x_0 - x) - f(x_0 - 0).$$

Тоді

$$\int_0^\delta \frac{|\varphi(x)|}{x} dx \le \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + x) - f(x_0 + 0)|}{x} dx + \int_0^\delta \frac{|f(x_0 - x) - f(x_0 - 0)|}{x} dx$$

і умова (1.19) буде виконуватись, якщо обидва інтеграли в правій частині існують. Тому справедливий наступний наслідок.

Наслідок 1.1. *Якщо існують інтеграли*

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + x) - f(x_0 + 0)|}{x} dx, \quad \int_0^\delta \frac{|f(x_0 - x) - f(x_0 - 0)|}{x} dx, \qquad (1.20)$$

тоді $S_n(x_0) \to S_0$, $n \to \infty$.

Теорема 1.3 (ознака Ліпшица). *Нехай функція* $f(x)$ *в точці* x_0 *задовольняє для деякого* $\alpha \in (0,1]$ *умові: існує* $L > 0$*, існує* $\delta > 0$*, що для всіх* $x \in (-\delta, \delta)$ $|f(x_0 + x) - f(x_0)| \le L|x|^\alpha$. *Тоді* $S_n(x_0) \to f(x_0)$, $n \to \infty$.

Доведення. Із умови цієї теореми випливає, що для $S_0 = f(x_0)$

$$|\varphi(x)| = |f(x_0 + x) + f(x_0 - x) - 2f(x_0)| \le 2L|x|^\alpha,$$

якщо $x \in (-\delta, \delta)$. Тому умова (1.19) теореми Діні виконана для числа $S_0 = f(x_0)$, бо $\int_0^\delta \frac{|\varphi(x)|}{x} dx \le 2L\int_0^\delta x^{\alpha-1} dx$ існує як власний при $\alpha = 1$ і збіжний як невласний при $\alpha \in (0,1)$. Теорема доведена.

Наслідок 1.2. *Нехай існують скінченні границі:*

$$\lim_{x \to 0+0} \frac{f(x_0 + x) - f(x_0 + 0)}{x}; \quad \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x_0 - x) - f(x_0 - 0)}{-x}. \qquad (1.21)$$

Тоді ряд Фур'є в точці x_0 *буде збіжним і матиме суму* S_0.

З цих умов випливає існування інтегралів (1.20), тому $S_n(x_0) \to f(x_0)$, $n \to \infty$.

Означення. Функція $f(x)$ називається *кусково-диференційовною* на відрізку $[a,b]$, якщо його можна розбити на скінченну кількість відрізків, в кожній внутрішній точці якого функція $f(x)$ буде диференційованою, а на кінцях відрізків існують скінченні границі типу (1.21).

Враховуючи це означення, із наслідків 1.1 і 1.2 випливає

Наслідок 1.3. *Якщо функція* $f(x)$ *– періодична з періодом* 2π *кусково-диференційовна на відрізку* $[-\pi, \pi]$. *Тоді ряд Фур'є буде збіжним в кожній точці* x_0 *до* S_0.

<u>Приклад 1.5.</u> Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x\le 0,\\ -1, & 0<x\le\pi\end{cases}$ і знайти його суму.

Розв'язання. Функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на проміжку $[-\pi,\pi]$, тому її ряд Фур'є у точках неперервності збігатиметься до цієї функції. Сума ряду $S(x)$ – періодична з періодом 2π, тому досить знайти її значення на відрізку $[-\pi,\pi]$.

Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2dx+\int_{0}^{\pi}(-1)dx\right)=1,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\cos nxdx+\int_{0}^{\pi}(-1)\cos nxdx\right)=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}2\sin nxdx+\int_{0}^{\pi}(-1)\sin nxdx\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{0}+\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_{0}^{\pi}=-\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)+\frac{1}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)=$$

$$=-\frac{3}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}0, & n=2k,\\ -\dfrac{6}{\pi n}, & n=2k-1.\end{cases}$$

Отже,

$$b_{2n}=0,\ b_{2n-1}=-\frac{6}{\pi(2n-1)}.$$

Підставимо отримані коефіцієнти і отримаємо ряд Фур'є, суму якого позначимо $S(x)$:

$$S(x)=\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x.$$

Сума $S(x)$ є періодичною функцією з періодом 2π, тому досить знайти її значення на проміжку $[-\pi,\pi]$. Тоді $S(x)=f(x)$, $x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi)$, бо такі x є точками неперервності $f(x)$. У точці $x=0$, що є точкою розриву першого роду $f(x)$,

$$S(0)=\frac{f(0-0)+f(0+0)}{2}=\frac{2+(-1)}{2}=\frac{1}{2},$$

а на кінцях проміжку маємо

$$S(\pi)=S(-\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Отже,

$$f(x)=\frac{1}{2}-\frac{6}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin(2n-1)x,\ x\in(-\pi,0)\cup(0,\pi).$$

Приклад 1.6. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0,\\ x, 0\le x<\pi\end{cases}$ на проміжку $[-\pi,\pi]$. Знайти його суму.

Розв'язання. Функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на проміжку $[-\pi,\pi]$, тому її ряд Фур'є у точках неперервності збігатиметься до цієї функції. Сума ряду $S(x)$ – періодична з періодом 2π, тому досить знайти її значення на відрізку $[-\pi,\pi]$.

Знайдемо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_{0}^{\pi}xdx\right)=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xd\left(\frac{\sin nx}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Bigg|_0^{\pi}=\frac{\cos n\pi-1}{n^2\pi}=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi}=\begin{cases}\dfrac{-2}{n^2\pi}, n=2k-1,\\ 0, n=2k.\end{cases}$$

Тоді

$$a_{2n}=0,\ a_{2n-1}=-\frac{2}{\pi(2n-1)^2}.$$

Далі,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}x\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}xd\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=$$

$$=-\frac{\cos n\pi}{n}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Отже, ряд Фур'є має вигляд

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{\pi}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}+(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right).$$

Сума ряду співпадає з функцією $f(x)$ у всіх точках неперервності $x\in(-\pi,\pi)$, а на кінцях проміжку $x=\pm\pi$ сума ряду $S(x)$ така:

$$S(\pi)=S(-\pi)=\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

Приклад 1.7. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[0,3]$ функцію $f(x)=\begin{cases}3x, & x\in[0,2];\\ 1, & x\in(2,3].\end{cases}$ Знайти суму ряду Фур'є.

Розв'язання. Функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на проміжку $[0,3]$, тому її ряд Фур'є у точках неперервності буде збігатися до $f(x)$. Сума ряду

$S(x)$ – періодична з періодом 3, тому досить знайти її значення на відрізку $[0,3]$.

Оскільки функцію $f(x)$ задано на відрізку $[a,b]$, де $a=0$, $b=3$, то у формулах (1.10) покладемо $l=\frac{b-a}{2}=\frac{3}{2}$ та обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^2 3xdx+\int_2^3 dx\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x^2\Big|_0^2+1\right)=\frac{14}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^2 3x\cos\frac{2\pi nx}{3}dx+\int_2^3\cos\frac{2\pi nx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{9x}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{9}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}dx+\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_2^3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}+\frac{9}{2\pi n}\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^2-\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}\right)=$$

$$=\frac{5}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}-\frac{9}{2\pi^2n^2}+\frac{9}{2\pi^2n^2}\cos\frac{4\pi n}{3},$$

$$b_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\frac{2\pi nx}{3}dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^2 3x\sin\frac{2\pi nx}{3}dx+\int_2^3\sin\frac{2\pi nx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{-9x}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^2+\int_0^2\frac{9}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}dx-\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{2\pi nx}{3}\Big|_2^3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{-9}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3}+\frac{9}{2\pi n}\frac{3}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nx}{3}\Big|_0^2-\frac{3}{2\pi n}+\frac{3}{2\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3}\right)=$$

$$=-\frac{5}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3}-\frac{1}{\pi n}+\frac{9}{2\pi^2n^2}\sin\frac{4\pi n}{3}.$$

Отже,

$$f(x)\sim\frac{7}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{\pi n}\sin\frac{4\pi n}{3}+\frac{9}{2\pi^2n^2}\left(\cos\frac{4\pi n}{3}-1\right)\right)\cos\frac{2\pi nx}{3}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{5}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{3}-\frac{1}{\pi n}+\frac{9}{2\pi^2n^2}\sin\frac{4\pi n}{3}\right)\sin\frac{2\pi nx}{3},\ 0\le x\le 3.$$

У всіх точках $x\in(0,2)\cup(2,3)$ сума ряду $S(x)=f(x)$, а

$$S(2)=\frac{f(2-0)+f(2+0)}{2}=\frac{7}{2},$$

$$S(0)=S(3)=\frac{f(3-0)+f(0+0)}{2}=\frac{1}{2}.$$

1.6. Розклад тільки по синусах і тільки по косинусах. У пункті 1.2 ми показали, що ряд Фур'є для парної функції містить тільки косинуси, а непарної – тільки синуси.

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[0,l]$ є інтегрованою на цьому відрізку. Довизначимо цю функцію на проміжку $[-l,0)$, так щоб вона була парною. Довизначена функція на $[-l,l]$ буде парною.

Тоді із (1.8) випливає, що функції $f(x)$, заданій на $[0,l]$, буде відповідати ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.22}$$

де

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)dx,\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{1.23}$$

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[0,l]$ є кусково-диференційовна на цьому відрізку. Сума $S(x)$ відповідного ряду Фур'є буде періодичною із періодом $2l$ функцією. Із наслідку 1.3 випливає, що в точці неперервності $x \in (0,l)$ функції $f(x)$ сума ряду $S(x) = f(x)$. Якщо $x_0 \in (0,l)$ є точкою розриву функції $f(x)$, то сума ряду

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0+0) + f(x_0-0)\big).$$

У точках $x = 0$ і $x = l$ відповідно $S(0) = f(0+0)$ і $S(l) = f(l-0)$.

Нехай функція $f(x)$ задана на $(0,l]$. Довизначимо тепер функцію $f(x)$ на $[-l,0]$, так щоб вона була непарною. Тоді

$$a_0 = 0,\ a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Тоді із (1.9) отримаємо, що функції $f(x)$, заданій на $(0,l]$, буде відповідати ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \tag{1.24}$$

де

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{1.25}$$

Нехай функція $f(x)$ задана на проміжку $(0,l]$ є кусково-диференційовна на цьому проміжку. Сума $S(x)$ відповідного ряду Фур'є буде періодичною із періодом $2l$ функцією. Із наслідку 1.3 випливає, що в точці неперервності $x \in (0,l)$ функції $f(x)$ сума ряду $S(x) = f(x)$. Якщо $x_0 \in (0,l)$ є точкою розриву функції $f(x)$, то сума ряду

$$S(x_0) = \frac{1}{2}\big(f(x_0+0) + f(x_0-0)\big).$$

У точках $x=0$ і $x=l$ відповідно $S(0)=0$ і $S(l)=0$.

Приклад 1.8. Розкласти функцію $f(x)=\pi-x, 0\le x\le\pi$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

Розв'язання. а) Розкладемо спочатку задану функцію в ряд Фур'є по косинусах. Для цього знайдемо коефіцієнти Фур'є за формулами (1.23) ($l=\pi$):

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)dx=-\frac{1}{\pi}(\pi-x)^2\Big|_0^{\pi}=\pi,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left((\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right)=$$

$$=-\frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)=\frac{2}{\pi n^2}\left(1-(-1)^n\right)=\begin{cases}\frac{4}{\pi n^2}, n=2k-1,\\ 0, n=2k.\end{cases}$$

Отже,

$$a_{2n}=0,\ a_{2n-1}=\frac{4}{(2n-1)^2\pi}.$$

Тоді ряд Фур'є тільки по косинусах для заданої функції має вигляд:

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2},\ 0\le x\le\pi.$$

б) Розкладемо тепер дану функцію в ряд Фур'є по синусах. Обчислимо коефіцієнти Фур'є за формулами (1.25):

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\left(-(\pi-x)\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nxdx\right)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}=\frac{2}{n}.$$

Отже,

$$f(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},\quad 0<x\le\pi.$$

У точці $x=0$ сума ряду $S(0)=0$.

Приклад 1.9. Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію

$$f(x)=\begin{cases}1, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right];\\ 0, x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right].\end{cases}$$

Розв'язання. Розклад функції в ряд Фур'є по косинусах має вигляд (1.22), де коефіцієнти знаходяться за (1.23) ($l=\pi$)

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}0dx\right)=1,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{\pi n}{2},$$

або $a_{2n}=0$ і $a_{2n-1}=\dfrac{2}{\pi(2n-1)}(-1)^{n-1}$.

Тому функції $f(x)$ буде відповідати ряд

$$f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)}\cos(2n-1)x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\bigcup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right).$$

В точках $x=0$, $x=\pi$ сума рівна $S(0)=1, S(\pi)=0$, а в $x=\dfrac{\pi}{2}$ маємо $S\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$.

<u>Приклад 1.10.</u> Розкласти в ряд Фур'є по косинусах функцію $f(x)=\begin{cases}3x,\ x\in[0,2];\\ 1,\ x\in(2,3]\end{cases}$.

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнти Фур'є, враховуючи, що $l=3$:

$$a_0=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx=\frac{2}{3}\left(\int_0^2 3xdx+\int_2^3 1dx\right)=2\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^2+\frac{2}{3}=\frac{14}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\frac{\pi nx}{3}dx=\frac{2}{3}\left(3\int_0^2 x\cos\frac{\pi nx}{3}dx+\int_2^3\cos\frac{\pi nx}{3}dx\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(3x\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_0^2-\int_0^2\frac{9}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}dx+\frac{3}{\pi n}\sin\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_2^3\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{18}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}+\frac{9}{\pi n}\frac{3}{\pi n}\cos\frac{\pi nx}{3}\Bigg|_0^2-\frac{3}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}\right)=$$

$$=\frac{10}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}+\frac{18}{\pi^2n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}-\frac{18}{\pi^2n^2}.$$

Тоді функції $f(x)$ буде відповідати ряд

$$f(x)=\frac{7}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{10}{\pi n}\sin\frac{2\pi n}{3}+\frac{18}{\pi^2n^2}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}-1\right)\right)\cos\frac{\pi nx}{3},\ x\in(0,2)\bigcup(2,3).$$

А в точках $x=0$ та $x=3$ сума ряду $S(0)=0$, $S(3)=1$, а в $x=2$ $S(2)=\dfrac{7}{2}$.

§2 Ряди Фур'є по ортогональних системах функцій

2.1. Ортогональні системи функцій, приклади. Позначимо через $\mathrm{R}([a,b])$ множину всіх дійсних функцій, інтегровних за Ріманом на відрізку $[a,b]$. Нагадаємо, що неперервна на відрізку $[a,b]$ функція є інтегрованою на цьому відрізку. Сума і добуток функцій із $\mathrm{R}([a,b])$ є функцією із $\mathrm{R}([a,b])$.

Будемо використовувати також наступні властивості. Якщо функція $f \in \mathrm{R}([a,b])$ така, що для всіх $x \in [a,b]$ $f(x) \geq 0$ і $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) = 0$ у всіх точках неперервності. Якщо $f \in \mathrm{R}([a,b])$ і дорівнює нулю у всіх точках неперервності, то $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$. Тому будемо покладати $f(x) = 0$ для $f \in \mathrm{R}([a,b])$, якщо рівність $f(x) = 0$ правильна у всіх точках неперервності $x \in [a,b]$.

Означення 2.1. Нехай $f \in \mathrm{R}([a,b])$ і $g \in \mathrm{R}([a,b])$. *Скалярним добутком* функцій f і g називається число $(f,g) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx$.

Із властивостей визначеного інтеграла випливають наступні властивості скалярного добутку:

1) $\forall f \in \mathrm{R}([a,b])$: $(f,f) \geq 0$ та $(f,f) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x) = 0$;

2) $\forall \{f,g\} \subset \mathrm{R}([a,b])$: $(f,g) = (g,f)$;

3) $\forall \{f,g\} \subset \mathrm{R}([a,b])$ і $\forall \alpha \in R$: $(\alpha f,g) = \alpha(f,g)$;

4) $\forall \{f_1,f_2,g\} \subset \mathrm{R}([a,b])$: $(f_1 + f_2, g) = (f_1,g) + (f_2,g)$;

5) $\forall \{f,g\} \subset \mathrm{R}([a,b])$: $(f,g)^2 \leq (f,f)\cdot(g,g)$ (нерівність Коші).

Нагадаємо, що нерівність Коші для визначених інтегралів має вигляд:

$$(f,g)^2 = \left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \leq \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int\limits_a^b g^2(x)dx\right) = (f,f)\cdot(g,g).$$

Означення 2.2. *Нормою* функції $f \in R([a,b])$ називається число

$$\|f\| := \sqrt{(f,f)} = \left(\int\limits_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Із означення норми і властивостей скалярного добутку випливають наступні властивості норми:

1) $\forall f \in \mathrm{R}([a,b])$: $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$;

2) $\forall f \in \mathrm{R}([a,b])$ і $\forall \alpha \in R$: $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$;

3) $\forall \{f,g\} \subset \mathrm{R}([a,b])$: $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Наведемо доведення третьої властивості. Із означення норми і властивостей 4) і 5) скалярного добутку

$$\|f+g\|^2 = (f+g, f+g) = (f,f) + 2(f,g) + (g,g) \leq$$
$$\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\cdot\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2,$$

тому $\|f+g\| \le \|f\| + \|g\|$.

Функція f називається *нормованою*, якщо $\|f\| = 1$.

Означення 2.3. *Середньоквадратичною віддалю* між функціями f і g називається число

$$\rho = \|f-g\| = \left(\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Середньоквадратична віддаль має всі властивості метрики, тому $(\mathrm{R}([a,b]), \rho)$ є метричним простором.

Означення 2.4. Нехай $\{f, g\} \subset \mathrm{R}([a,b])$. Функції f і g називаються *ортогональними* на $[a,b]$, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю:

$$(f, g) = \int_a^b f(x) g(x) dx = 0.$$

Означення 2.5. Нехай $\varphi_i \in \mathrm{R}([a,b])$, $i = 1,2,...,n$. Система функції $\varphi_1,...,\varphi_n$ називається *ортогональною*, якщо

$$\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = \begin{cases} 0, & i \ne j; i, j = 1,...,n, \\ \|\varphi_i\|^2 > 0, & i = j. \end{cases}$$

Система функції $\varphi_1,...,\varphi_n$ називається *ортонормованою*, якщо

$$\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = \begin{cases} 0, & i \ne j; \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Послідовність функції $\varphi_1,...,\varphi_n,...$, $\varphi_i \in \mathrm{R}([a,b])$, $i = 1,2,...,n,...$ називається послідовністю ортогональних функцій, якщо $\left(\varphi_i, \varphi_j\right) = 0$ для будь-яких $i \ne j$, де $i \ge 1$, $j \ge 1$, а $\|\varphi_i\| \ne 0, \quad i = 1,2,...$.

Означення 2.6. Функції $\varphi_1,...,\varphi_n$ з $\mathrm{R}([a,b])$ при $n \ge 2$ називаються *лінійно залежними* на $[a,b]$, якщо існують дійсні $c_1,...,c_n$ такі, що $|c_1| + ... + |c_n| \ne 0$, а $\|c_1\varphi_1 + ... + c_n\varphi_n\| = 0$.

Функції $\varphi_1,...,\varphi_n$ називаються *лінійно незалежними* на $[a,b]$, якщо рівність $\|c_1\varphi_1 + ... + c_n\varphi_n\| = 0$ можлива тільки тоді, коли $|c_1| + ... + |c_n| = 0$.

Якщо функції $\varphi_1,...,\varphi_n$ лінійно незалежні на $[a,b]$, то $\|\varphi_i\| \ne 0, \quad i = 1,...,n$.

Послідовність функції $\varphi_1,...,\varphi_n,...$, $\varphi_i \in \mathrm{R}([a,b])$, $i = 1,2,...,n,...$ називається послідовністю *лінійно незалежних* функцій, якщо будь-який скінченний набір цих функцій є лінійно незалежним.

Відзначимо також, що будь-яка система ортогональних функцій є лінійно незалежною, будь-який скінченний набір лінійно незалежних функцій можна ортогоналізувати.

Наведемо без обґрунтування важливий приклад ортогональної системи. Многочлени Лежандра:

$$P_0(x)=1,\quad P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left(x^2-1\right)^n}{dx^n}\quad (n=1,2,...),$$
є ортогональною послідовністю на $[-1;1]$.

<u>Приклад 2.1.</u> Довести, що основна тригонометрична послідовність функцій

$$\frac{1}{2},\cos\frac{\pi x}{l},\sin\frac{\pi x}{l},...,\cos\frac{n\pi x}{l},\sin\frac{n\pi x}{l},\dots$$
є ортогональною на відрізку, $[-l,l]$; а послідовність функцій

$$\frac{1}{\sqrt{2l}},\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{\pi x}{l},...,\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l},\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l},...$$
є ортонормованою на $[-l,l]$.

Розв'язання. Члени першої послідовності попарно ортогональні. Це випливає із рівностей (1.2)-(1.5):

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}dx=0,\ \int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}dx=0,\ \forall n\in N;$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=0,\ \forall m,n\in Z;$$

$$\int_{-l}^{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{m\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ l, & m=n\end{cases},$$

$$\int_{-l}^{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{m\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, & m\neq n\\ l, & m=n\end{cases}.$$

Друга послідовність є ортогональною, бо її члени відрізняються від відповідних членів першої сталими множниками, а це не змінює ортогональності. Із (1.4) і (1.5) знаходимо норму кожної із функцій другої послідовності:

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2l}}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{\sqrt{2l}}\right)^2dx=\frac{1}{2l}2l=1,$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{l}}\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\frac{1}{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx=1,$$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\frac{1}{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=1.$$

Тобто, друга послідовність функцій буде ортонормованою.

<u>Приклад 2.2.</u> Довести, що послідовності функцій

а) $\frac{1}{2},\cos x,\sin x,...,\cos nx,\sin nx,...,\ x\in[-\pi,\pi]$;

б) $\frac{1}{2},\cos x,...,\cos nx,...,\ x\in[0,\pi]$;

в) $\sin x,...,\sin nx,...,\ x\in[0,\pi]$

є ортогональними на вказаних проміжках.

Розв’язання. Члени послідовності а) є частинним випадком послідовності із попереднього прикладу при $l=\pi$. Тому послідовність а) є ортогональною.

Ортогональність послідовності б) випливає із рівностей для інтегралів

$$\int_0^\pi \frac{1}{2}\cos nxdx = \frac{1}{2n}\sin nx\Big|_0^\pi = 0,\ n\ge 1,$$

$$\int_0^\pi \cos nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m}\Big|_0^\pi + \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\Big|_0^\pi\right)=0,\ n\ge 1, m\ge 1, n\ne m,$$

а ортогональність послідовності в) із рівностей

$$\int_0^\pi \sin nxdx = -\frac{1}{n}\cos nx\Big|_0^\pi = 0,\ n\ge 1,$$

$$\int_0^\pi \sin nx\sin mxdx = \frac{1}{2}\left(\frac{\cos(n-m)x}{n-m}\Big|_0^\pi - \frac{\cos(n+m)x}{n+m}\Big|_0^\pi\right)=0,\ n\ge 1, m\ge 1, n\ne m.$$

<u>Приклад 2.3.</u> Довести, що система $\sin\frac{\xi_1 x}{l},...,\sin\frac{\xi_n x}{l},...$ є ортогональною на $[0,l]$, якщо $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$ – послідовність додатних коренів рівняння $tgx = lx$, $l>0$.

Розв’язання. Дане рівняння дійсно має нескінченну множину додатних коренів $\xi_1,\ldots,\xi_n,\ldots$. Графічно вони одержуються, як абсциси точок перетину графіка функції $y = tgx$ та прямої $y = lx$.

Нехай $\alpha=\frac{\xi_n}{l}$, $\beta=\frac{\xi_m}{l}$, $\alpha\ne\beta$, $m\ne n$. Тоді

$$\int_0^l \sin\alpha x\sin\beta xdx = \frac{1}{2}\int_0^l(\cos(\alpha-\beta)x-\cos(\alpha+\beta)x)dx =$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\alpha-\beta)l}{\alpha-\beta}-\frac{\sin(\alpha+\beta)l}{\alpha+\beta}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\alpha l\cos\beta l-\cos\alpha l\sin\beta l}{(\alpha-\beta)}-\frac{\sin\alpha l\cos\beta l+\cos\alpha l\sin\beta l}{(\alpha+\beta)}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\alpha l\cos\beta l\left(\frac{tg\alpha l-tg\beta l}{\alpha-\beta}-\frac{tg\alpha l+tg\beta l}{\alpha+\beta}\right)=$$

$$=\cos\alpha l\cos\beta l\,\frac{\beta\, tg\alpha l-\alpha\, tg\beta l}{\alpha^2-\beta^2}.$$

Враховуючи, що $tgx = lx$, $\alpha=\frac{\xi_n}{l}$, $\beta=\frac{\xi_m}{l}$, $m\ne n$, одержуємо

$$\int_0^l \sin\frac{\xi_n}{l}x\sin\frac{\xi_m}{l}xdx = \cos\xi_n\cos\xi_n\frac{\frac{\xi_m}{l}\xi_n - \frac{\xi_n}{l}\xi_m}{\left(\frac{\xi_n}{l}\right)^2 - \left(\frac{\xi_m}{l}\right)^2} = 0,$$

а це означає, що задана послідовність функцій є ортогональною на $[0,l]$.

2.2. Ряди Фур'є по ортогональних системах функцій. Нехай $f \in \mathrm{R}([a,b])$, а система функцій $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...$ – ортогональна на $[a,b]$. Нехай функцію $f(x)$ можна розкласти на $[a,b]$ в ряд за функціями $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...$:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x).$$

Якщо ряд у правій частині рівномірно збіжний, то його можна інтегрувати. Помножимо написану рівність на $\varphi_m(x)$ та проінтегруємо на відрізку $[a,b]$:

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx.$$

Оскільки, система функцій $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...$ – ортогональна на $[a,b]$, то

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \|\varphi_m\|^2, & n = m. \end{cases}$$

Тоді

$$(f,\varphi_m) = a_m\|\varphi_m\|^2,\ a_m = \frac{(f,\varphi_m)}{\|\varphi_m\|^2}.$$

Означення 2.7. Ряд вигляду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\varphi_n(x), \tag{2.1}$$

де

$$a_n(f) = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2},\ n = 1,2,... \tag{2.2}$$

називається *рядом Фур'є функції f по ортогональній системі функцій* $\varphi_1,...,\varphi_n,...$ на $[a,b]$, а коефіцієнти, що знаходяться за формулами (2.2), називаються *коефіцієнтами Фур'є функції f по ортогональній системі функцій* $\varphi_1,...,\varphi_n,...$.

Отже, кожній функції $f \in \mathrm{R}([a,b])$ можна поставити у відповідність ряд Фур'є (2.1) із коефіцієнтами (2.2):

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f)\varphi_n(x).$$

2.3. Задача про найкраще середньоквадратичне наближення функції. Тотожність і нерівність Бесселя. Нехай $\varphi_1,...,\varphi_n,...$ – ортогональна на $[a,b]$ послідовність функцій з $\mathrm{R}([a,b])$. Розглянемо деяке фіксоване натуральне число n та лінійну комбінацію

$$\alpha_1\varphi_1(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)=P_n(x),$$

де $\alpha_\mathrm{k}\in\mathrm{R},\quad k=1,...,n$.

$P_n(x)$ називається *многочленом по ортогональній системі функцій* $\varphi_1,...,\varphi_n$. Множина функцій $H_n=\{\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k:\alpha_\mathrm{k}\in\mathrm{R},\quad k=1,..,n\}$ є n-вимірним підпростором $R([a,b])$. Нехай $f\in\mathrm{R}([a,b])$ – фіксована функція.

Знайдемо такий многочлен $P_n^*\in H_n$, що для будь-якого $P_n\in H_n$

$$\left\|f-P_n^*\right\|\le\left\|f-P_n\right\|.$$

Многочлен P_n^* називається *проекцією* функції f на підпростір H_n.

Теорема 2.1. *Для будь-якого* $P_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\in H_n$ *має місце рівність:*

$$\left\|f-P_n\right\|^2=\left\|f\right\|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(f,\varphi_k)^2}{\left\|\varphi_k\right\|^2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\left\|\varphi_k\right\|-\frac{(f,\varphi_k)}{\left\|\varphi_k\right\|}\right)^2. \qquad (2.3)$$

Доведення. Використовуючи властивості скалярного добутку і ортогональність на $[a,b]$ послідовності функцій $\varphi_1,...,\varphi_n$, одержимо

$$\left\|f-P_n\right\|^2=(f-P_n,f-P_n)=\left(f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k,f-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\right)=$$

$$=\left\|f\right\|^2-2\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(f,\varphi_k)+\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^2\left\|\varphi_k\right\|^2=$$

$$=\left\|f\right\|^2+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k^2\left\|\varphi_k\right\|^2-2\alpha_k\left\|\varphi_k\right\|\frac{(f,\varphi_k)}{\left\|\varphi_k\right\|}+\frac{(f,\varphi_k)^2}{\left\|\varphi_k\right\|^2}-\frac{(f,\varphi_k)^2}{\left\|\varphi_k\right\|^2}\right)=$$

$$=\left\|f\right\|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(f,\varphi_k)^2}{\left\|\varphi_k\right\|^2}+\sum_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\left\|\varphi_k\right\|-\frac{(f,\varphi_k)}{\left\|\varphi_k\right\|}\right)^2.$$

Наслідок 2.1. *Для будь-якого* $P_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k\in H_n$ *має місце нерівність:*

$$\left\|f-P_n\right\|^2\ge\left\|f\right\|^2-\sum_{k=1}^{n}\frac{(f,\varphi_k)^2}{\left\|\varphi_k\right\|^2},$$

у якій знак рівності має місце тоді і тільки тоді, коли $P_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k(f)\varphi_k(x)$, *де*

$$\alpha_n = a_n(f) = \frac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2},\ n = 1,2,...$$

є коефіцієнтами Фур'є для функції $f(x)$ *по ортогональній системі функцій* $\varphi_1,...,\varphi_n$.

Многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f)\varphi_k(x)$, *де* $a_k(f)$, $k = 1,2,...$ *є коефіцієнтами Фур'є, називають многочленом Фур'є для функції* $f(x)$ *по ортогональній системі функцій* $\varphi_1,...,\varphi_n$.

Доведення. Перші два доданки у (2.3) не залежать від α_k. Тому віддаль $\|f - P_n\|$ буде найменшою, якщо α_k вибрати так, щоб $\alpha_k\|\varphi_k\| - \frac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|} = 0$, тобто коли α_k є коефіцієнтами Фур'є: $\alpha_k = a_k(f) = \frac{(f,\varphi_k)}{\|\varphi_k\|^2}$.

Тобто

$$\min_{P_n \in H_n}\|f - P_n\| = \|f - P_n^*\|,$$

де $P_n^*(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k(f)\varphi_k(x)$, $a_k(f)$ – коефіцієнти Фур'є, $P_n^*(x)$ – многочлен Фур'є.

Крім того,

$$\left\|f - \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\,\varphi_k\right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(f,\varphi_k)^2}{\|\varphi_k\|^2} = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2(f)\|\varphi_k\|^2. \qquad (2.4)$$

Рівність (2.4) називається *тотожністю Бесселя*.

Оскільки норма невід'ємна, то із рівності (2.4) випливає що для будь-якого $n \in N$ має місце нерівність $\|f\|^2 - \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2(f)\|\varphi_k\|^2 \ge 0$ або

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2(f)\|\varphi_k\|^2 \le \|f\|^2.$$

Перейдемо в цій нерівності до границі, коли $n \to \infty$. Одержимо нерівність

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(f)\|\varphi_k\|^2 \le \|f\|^2, \qquad (2.5)$$

яка називається *нерівністю Бесселя*. Із цієї нерівності випливає, що для довільної функції $f \in \mathrm{R}([a,b])$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2(f)\|\varphi_k\|^2$$

збігається.

Нехай задано основну тригонометричну систему функцій на проміжку $[-l,l]$:

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi x}{l}, \sin\frac{\pi x}{l}, ..., \cos\frac{k\pi x}{l}, \sin\frac{k\pi x}{l}, ...$$

Із рівностей (1.4) і (1.5)

$$\left\|\frac{1}{2}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\left(\frac{1}{2}\right)^2dx=\frac{1}{4}2l=\frac{l}{2},$$

$$\left\|\cos\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\cos^2\frac{n\pi x}{l}dx=l,$$

$$\left\|\sin\frac{n\pi x}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\pi x}{l}dx=l.$$

Тому можемо записати тотожність Бесселя

$$\left\|f-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right\|^2=\|f\|^2-\left(a_0^2\frac{l}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2l+b_k^2l\right)\right)$$

і нерівність Бесселя

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\le\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx. \tag{2.6}$$

Оскільки $f(x)$ інтегровна на[-l,l], то ряд в лівій частині (2.6) збігається, тому $a_n\to 0$ і $b_n\to 0$ при $n\to\infty$.

<u>Приклад 2.4.</u> Для функції $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x),\quad x\in[0,2\pi]$, і заданого $n\in N$ знайти тригонометричний многочлен вигляду $T_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+$ $+\beta_k\sin kx)$, де α_k, β_k – дійсні, $x\in[0,2\pi]$, що мінімізує віддаль $\|f-T_n\|=\sqrt{(f-T_n,f-T_n)}$.

Розв'язання. Із доведення наслідку випливає, що віддаль $\|f-T_n\|$ буде найменшою, якщо коефіцієнти α_k, β_k є коефіцієнтами Фур'є: $\alpha_k=a_k,\quad k=0,1,...,n$, $\beta_k=b_k,\quad k=1,...,n$.

Коефіцієнти Фур'є знаходимо за формулами (1.10) при $a=0$, $b=2\pi$, $l=\pi$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\pi x-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{2\pi}=0,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos kxdx=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(\pi-x)\cos kxdx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left((\pi-x)\frac{\sin kx}{k}\Bigg|_0^{2\pi}+\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\sin kxdx\right)=-\frac{1}{2\pi k^2}\cos kx\Big|_0^{2\pi}=0,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin kxdx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-x)\sin kxdx=\frac{1}{2\pi}\left(-(\pi-x)\frac{\cos kx}{k}\Bigg|_0^{2\pi}-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}\cos kxdx\right)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{k}-\frac{\sin kx}{k^2}\Bigg|_0^{2\pi}\right)=\frac{1}{k}.$$

Тригонометричний многочлен $T_n(x)$, що мінімізує віддаль $\|f-T_n\|$, має вигляд:

$$T_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin kx.$$

<u>Приклад 2.5.</u> Довести, що збіжний на R ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$, $x\in\mathrm{R}$, не є рядом Фур'є для функції із $\mathrm{R}([-\pi,\pi])$.

Розв'язання. Припустимо протилежне, що існує $f(x)$ – інтегровна на $[-\pi,\pi]$ та

$$f(x)\sim\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}.$$

Із вигляду ряду знайдемо коефіцієнти

$$a_0=0,\ a_n=0,\ b_n=\frac{1}{\ln n}.$$

Із нерівності Бесселя (2.6)

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2+b_k^2\right)\le\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^2(x)dx$$

при $l=\pi$, одержуємо

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx,$$

а це означатиме, що ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$ має збігатися, але він є розбіжний.

Розбіжність випливає із ознак порівняння рядів і нерівності

$$\ln x\le\sqrt{x},\ x\ge 4.$$

Звідки $\ln n\le\sqrt{n}$, $n\ge 4$. Тоді $\frac{1}{\ln^2 n}\ge\frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ є розбіжний, тому ряд з більшими членами також розбіжний.

Припущення неправильне, ми одержали протиріччя. Отже, заданий ряд не є рядом Фур'є для функцій із $\mathrm{R}([-\pi,\pi])$.

Твердження доведене.

§3 Рівномірна збіжність ряду Фур'є

3.1. Рівномірна збіжність ряду Фур'є. Нехай задано основну тригонометричну систему функцій

$$\frac{1}{2}, \cos\frac{nx}{l}, \sin\frac{nx}{l}, ..., \cos\frac{n\pi x}{l}, \sin\frac{n\pi x}{l}, \dots, x \in [-l, l].$$

Якщо $f(x)$ буде інтегровною на $[-l, l]$, то її ряд Фур'є має вигляд:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

де

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \; a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \; b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \; n \in N.$$

Теорема 3.1. *Нехай $f(x)$ – неперервна на $x \in [-l, l]$, виконується умова $f(-l) = f(l)$ і $f(x)$ – кусково-диференційовна на $x \in [-l, l]$. Тоді ряд Фур'є для функції $f(x)$ буде рівномірно збігатися на відрізку $[-l, l]$ до $f(x)$.*

Доведення. Із кускової диференційованості $f(x)$ випливає, що $f'(x)$ буде інтегровною на $[-l, l]$. Позначимо

$$a_n' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \; b_n' = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

– коефіцієнти Фур'є для $f'(x)$ на проміжку $[-l, l]$.

Із формул (1.6) після інтегрування частинами, одержимо

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\left(\left(f(x)\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l} - \frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right) =$$

$$= -\frac{l}{n\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = -\frac{l}{n\pi}b_n',$$

а

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\left(\left(-f(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l} + \frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l} f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right) = \frac{l}{n\pi}a_n'.$$

Отже,

$$a_n = -\frac{l}{n\pi}b_n', \; b_n = \frac{l}{n\pi}a_n'.$$

З нерівності $|ab| \le \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$ випливають наступні нерівності:

$$|a_n| = \frac{l}{\pi}\frac{1}{n}|b_n'| \le \frac{l}{2\pi}\left(\frac{1}{n^2} + (b_n')^2\right), \; |b_n| = \frac{l}{\pi}\frac{1}{n}|a_n'| \le \frac{l}{2\pi}\left(\frac{1}{n^2} + (a_n')^2\right),$$

тому

$$|a_n| + |b_n| \le \frac{l}{2\pi}\left(\frac{2}{n^2} + (a_n')^2 + (b_n')^2\right).$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний. Із інтегровності функції $f'(x)$ на проміжку $[-l,l]$ і нерівності Бесселя випливає, що для функції $f'(x)$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left((a_n')^2+(b_n')^2\right)$ буде збіжним. Тому за ознакою порівняння одержимо, що буде збігатися і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+|b_n|\right)$. Крім того, для довільного x виконується нерівність

$$\left|a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right|\le|a_n|+|b_n|.$$

Тому за теоремою Вейєрштраса ряд Фур'є буде рівномірно збіжним до $f(x)$ на відрізку $[-l,l]$. Теорему доведено.

Оскільки сума $S(x)$ даного ряду Фур'є періодична з періодом $2l$, то $S(-l)=S(l)$. Тому умова теореми $f(-l)=f(l)$ є і необхідною умовою рівномірної збіжності ряду Фур'є на відрізку $[-l,l]$. Члени ряду Фур'є є неперервними функціями, тому умова неперервності $f(x)$ на відрізку $[-l,l]$ є також необхідною умовою рівномірної збіжності ряду Фур'є на відрізку $[-l,l]$.

Наслідок 3.1. *Нехай $f(x)$ – періодична з періодом $2l$, неперервна на R, кусково-диференційовна на $[-l,l]$. Тоді ряд Фур'є для функції $f(x)$ буде рівномірно збігатися на R до $f(x)$.*

Тобто, для всіх $x\in R$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right). \tag{3.1}$$

3.2. Зв'язок між диференційовністю функції і швидкістю збіжності ряду Фур'є.

Теорема 3.2. *Нехай $f(x)$ – неперервна і має неперервні похідні до m-го порядку ($m\ge 0$) на відрізку $[-l,l]$. Виконуються умови: $f(-l)=f(l)$, $f'(-l)=f'(l),\ldots,f^{(m)}(-l)=f^{(m)}(l)$, $f^{(m+1)}(x)$ – кусково-неперервна на $[-l,l]$. Тоді*

$$a_n=o(n^{-(m+1)}),\;\; b_n=o(n^{-(m+1)}),\;\; n\to\infty,$$

при цьому ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^k(|a_n|+|b_n|)$ – збіжний для будь-якого $k=0,1,..,m$.

Доведення. Аналогічно до доведення попередньої теореми, із формул (1.6) після інтегрування частинами і умов теореми, одержимо

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left(\left(f(x)\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}-\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=-\frac{l}{n\pi}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f'(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=$$

$$=-\frac{l}{n\pi}\frac{1}{l}\left(\left(-f'(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}+\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}f''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)=$$

$$=-\left(\frac{l}{n\pi}\right)^{2}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f''(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\ldots=$$

$$=\pm\left(\frac{l}{n\pi}\right)^{m+1}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^{(m+1)}(x)\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}\frac{n\pi x}{l}dx, \qquad (3.2)$$

а

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\left(\left(-f(x)\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\Bigg|_{-l}^{l}+\frac{l}{n\pi}\int_{-l}^{l}f'(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\right)=\ldots=$$

$$=\mp\left(\frac{l}{n\pi}\right)^{m+1}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f^{(m+1)}(x)\begin{pmatrix}\cos\\ \sin\end{pmatrix}\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (3.3)$$

Нехай $a_n^{(m+1)}$ і $b_n^{(m+1)}$ – коефіцієнти Фур'є для $f^{(m+1)}(x)$. Оскільки, $f^{(m+1)}(x)$ є інтегровною, то із леми Рімана випливає, що

$$a_n^{(m+1)}\to 0,\ b_n^{(m+1)}\to 0 \text{ при } n\to\infty,$$

тому із (3.2) і (3.3)

$$a_n=o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right),\ b_n=o\left(\frac{1}{n^{m+1}}\right),\quad n\to\infty.$$

Із (3.2) і (3.3) одержуємо також нерівність

$$|a_n|+|b_n|=\left(\frac{l}{n\pi}\right)^{m+1}\left(\left|a_n^{(m+1)}\right|+\left|b_n^{(m+1)}\right|\right). \qquad (3.4)$$

Тоді

$$n^m(|a_n|+|b_n|)=\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\frac{1}{n}\left|a_n^{(m+1)}\right|+\frac{1}{n}\left|b_n^{(m+1)}\right|\right)\le$$

$$\le\frac{1}{2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\left|a_n^{(m+1)}\right|^2+\left|b_n^{(m+1)}\right|^2+\frac{2}{n^2}\right).$$

Оскільки, функція $f^{(m+1)}(x)$ – кусково-неперервна на $[-l,l]$, тому вона інтегрована на цьому відрізку. З нерівності Бесселя для функції $f^{(m+1)}(x)$ випливає, що ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n^{(m+1)}\right|^2+\left|b_n^{(m+1)}\right|^2\right)$$

є збіжним. Тому із попередньої нерівності випливає, що збіжним буде і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}n^m(|a_n|+|b_n|)$, а із його збіжності випливає і збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}n^k(|a_n|+|b_n|)$, де $k=0,1,..,m$. Теорема доведена.

Зауваження. Якщо виконуються умови теореми при $m>0$*, то тригонометричний ряд Фур'є можна почленно диференціювати не менше m разів:*

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)^{(k)},\quad 1\le k\le m,\quad x\in[l,l].$$

Нехай виконуються умови теореми 3.2. Оцінимо похибку від заміни суми ряду Фур'є її частинною сумою. Розглянемо різницю $f(x)-S_n(x)$, де

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right),$$

тоді із (3.4) і нерівності $(x+y)^2\le 2\left(x^2+y^2\right)$

$$\left|f(x)-S_n(x)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\left|a_k\right|+\left|b_k\right|\right)\le$$

$$\le\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{m+1}}\left(\left|a_k^{(m+1)}\right|+\left|b_k^{(m+1)}\right|\right)\le\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{m+1}}\sqrt{2}\left(\left(a_k^{(m+1)}\right)^2+\left(b_k^{(m+1)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

За нерівністю Коші-Буняковського і нерівністю Бесселя для функції $f^{(m+1)}(x)$:

$$\left|f(x)-S_n(x)\right|\le\sqrt{2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{2m+2}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\left(a_k^{(m+1)}\right)^2+\left(b_k^{(m+1)}\right)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le\sqrt{2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\int_n^{\infty}\frac{1}{x^{2m+2}}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f^{(m+1)}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{1}{n^{m+\frac{1}{2}}}\sqrt{2}\left(\frac{l}{\pi}\right)^{m+1}\left(\frac{1}{2m+1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}\left(f^{(m+1)}(x)\right)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}=C\frac{1}{n^{m+\frac{1}{2}}},$$

де C – деяка стала.

Отже, ми показали, що при виконанні умови теореми 3.2, похибка від заміни суми ряду Фур'є її частинною сумою

$$\left|f(x)-S_n(x)\right|=C\frac{1}{n^{m+\frac{1}{2}}},$$

де C – деяка стала.

<u>Приклад 3.1.</u> Нехай $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$, $x\in\mathrm{R}$. Довести, що $f(x)$ – неперервна на R, причому ряд для $f'(x)$ можна одержати почленним диференціюванням.

Розв'язання. Врахуємо, що для всіх $x\in\mathrm{R}$:

$$\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ – збіжний, отже заданий ряд за ознакою Вейєрштраса рівномірно збігається на всій числовій осі. Оскільки, члени ряду неперервні на всій числовій осі функції, тому і $f(x)$ – неперервна на всій осі за властивостями рівномірно збіжних функціональних рядів.

Для всіх $x \in \mathrm{R}$, члени ряду із похідних від членів заданого ряду

$$\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ – збіжний, тому за ознакою Вейєрштраса ряд, утворений з похідних його членів рівномірно збіжний на R. Тоді, оскільки заданий ряд з неперервно диференційовними членами збігається на всій числовій осі, заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}.$$

3.3. Теореми Вейєрштраса про рівномірне наближення функції многочленами. Нехай $f(x)$ і $g(x)$ задані на $[a,b]$. Якщо для довільного $\varepsilon > 0$ і для довільного $x \in [a,b]$ $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$, то будемо говорити, що функція $g(x)$ рівномірно наближує функцію $f(x)$ на $[a,b]$ з точністю ε.

Лема 3.1. *Нехай $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ функція. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує неперервна, кусково-диференційовна на $[a,b]$ функція $g_\varepsilon(x)$ – така, що для $x \in [a,b]$ $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$, $f(a) = g_\varepsilon(a)$, $f(b) = g_\varepsilon(b)$.*

Доведення. Неперервна функція є рівномірно неперервною, тому для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$, що для будь-яких x' і x'' із $[a,b]$ таких, що $|x' - x''| < \delta$, виконується нерівність $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Розглянемо розбиття $[a,b]$ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ таке, щоб довжина кожного проміжку не перевищувала δ. Визначимо функцію

$$g_\varepsilon(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\left(x - x_{i-1}\right),\ x \in [x_{i-1}, x_i],\ i = 1,\ldots,n.$$

Тоді $g_\varepsilon(x)$ буде неперервною і кусково-диференційовною на $[a,b]$. Крім того, для будь-якого $x \in [a,b]$ існує $i = 1,\ldots,n$ таке, що $x \in [x_{i-1}, x_i]$, а також існує $x' \in [x_{i-1}, x_i]$ для якого $g_\varepsilon(x) = f(x')$. Тоді для будь-якого $x \in [a,b]$

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Лема доведена.

Теорема 3.3 (друга теорема Вейєрштраса). *Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує тригонометричний многочлен*

$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$ *такий, що для всіх* $x\in[a,b]$ $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$.

Доведення. Виберемо l таким чином, щоб виконувалася умова $\max\{|a|,|b|\}<l$ ($[a,b]\subset[-l,l]$). Функція $f(x)$ задана тільки на $[a,b]$. Довизначимо її на $[-l,l]$ так, щоб довизначена функція на $[a,b]$ співпадала з $f(x)$, $f(-l)=0$, $f(l)=0$, на проміжках $[-l,a]$ і $[b,l]$ була лінійною і неперервною на $[-l,l]$.

Нехай $\varepsilon>0$ – довільне задане число. За лемою, існує неперервна і кусково-диференційовна на $[-l,l]$ функція $g_\varepsilon(x)$, що для $x\in[-l,l]$ $|f(x)-g_\varepsilon(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Довизначена функція неперервна, кусково-диференційовна і виконується умова $g_\varepsilon(-l)=g_\varepsilon(l)$, тоді за теоремою 3.1 ряд Фур'є для функції $g_\varepsilon(x)$ буде рівномірно збіжним на R

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)=g_\varepsilon(x):$$

для будь-якого $\varepsilon>0$ існує n_0, що для всіх $n\geq n_0$ і всіх $x\in[-l,l]$ $|g_\varepsilon(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$. Зафіксуємо таке n. Тоді для будь-якого $\varepsilon>0$ і всіх $x\in[-l,l]$

$$|f(x)-T_n(x)|\leq|f(x)-g_\varepsilon(x)|+|g_\varepsilon(x)-T_n(x)|<\varepsilon\quad\forall x\in[-l,l].$$

Звідки, для всіх $x\in[a,b]$ $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon$. Теорему доведено.

Многочлен $T_n(x)$ побудований для функції $g_\varepsilon(x)$ не є многочленом Фур'є для функції $f(x)$. Нехай ε_n – спадна послідовність, що прямує до 0 при $n\to\infty$, тоді для кожної послідовності ε_n (із теореми 3.3) існує $T_n(x)$ такий, що для всіх $x\in[a,b]$ $|f(x)-T_n(x)|<\varepsilon_n$.

Теорема 3.4 (перша теорема Вейєрштраса). *Нехай* $f(x)$ *– неперервна на* $[a,b]$. *Тоді для довільного* $\varepsilon>0$ *існує многочлен* $P_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, *що для всіх* $x\in[a,b]$ $|f(x)-P_n(x)|<\varepsilon$.

Доведення. За теоремою 3.3, для будь-якого $\varepsilon>0$ існує тригонометричний многочлен

$$T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\tag{3.5}$$

такий, що для всіх $x\in[a,b]$ $|f(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Ряди

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

є рівномірно збіжні на будь-якому відрізку.

Зафіксуємо n і розкладемо кожну із функцій $\cos\frac{k\pi x}{l}$, $\sin\frac{k\pi x}{l}$ у степеневі ряди, підставимо ці розклади у (3.5). Оскільки кількість доданків у $T_n(x)$ скінченна, то одержимо розклад $T_n(x)$ у степеневий ряд, який буде рівномірно збіжним на відрізку $[a,b]$.

Тоді для заданого $\varepsilon > 0$ існує m_0, що для всіх $m \geq m_0$ і всіх $x \in [a,b]$ $|T_n(x) - P_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Отже, ми показали, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P_m(x)$ такий, що для всіх $x \in [a,b]$ $|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon$. Теорема доведена.

Нехай $f(x)$ – неперервна на $[a,b]$, послідовність додатних чисел $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тоді існують послідовності многочленів $T_n(x)$ і $P_n(x)$, які рівномірно збігаються до $f(x)$ на $[a,b]$.

§4 Повнота і замкненість ортогональної системи функції

4.1. Повнота і замкненість ортогональної системи функції. Рівність Парсеваля.

Означення 4.1. Ортогональна послідовність функцій $\varphi_1,...,\varphi_n,...$ називається *замкненою* в $R([a,b])$, якщо для будь-якої функції $f \in \mathrm{R}([a,b])$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x), \quad n \in N$, $\alpha_k \in R, \quad k = 1,...,n$ такий, що $\|f - P_n\| < \varepsilon$.

Означення 4.2. Ортогональна послідовність функцій $\varphi_1,...,\varphi_n,...$ називається *повною* в $\mathrm{R}([a,b])$, якщо для будь-якої функції $f \in \mathrm{R}([a,b])$ із рівностей $(f,\varphi_n) = 0$, $n = 1,2,3,...$ випливає, що $\|f\| = 0$ (будь-яка інтегрована функція, що ортогональна до всіх функцій заданої послідовності, є нульовим елементом в $\mathrm{R}([a,b])$).

Теорема 4.1. *Для того, щоб ортогональна послідовність функцій* $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ *була замкненою в* $\mathrm{R}([a,b])$ *необхідно і достатньо, щоб для будь-якої функції* $f \in \mathrm{R}([a,b])$ *її ряд Фур'є* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ *збігався в середньоквадратичному до функції* $f(x)$.

Доведення. Нехай

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \tag{4.1}$$

де $a_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$ – коефіцієнти Фур'є.

Необхідність. Нехай послідовність $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ замкнена в $\mathrm{R}([a,b])$. Тоді для будь-якої функції $f \in \mathrm{R}([a,b])$ і для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x), \quad n \in N, \quad \alpha_k \in R, \quad k = 1,...,n$ такий, що $\|f - P_n\| < \varepsilon$.

Оскільки многочлен Фур'є $P_n^*(x)$ дає найкраще середньоквадратичне наближення функції, то

$$\|f - P_n^*\| \leq \|f - P_n\| < \varepsilon.$$

Тоді із тотожності Бесселя

$$\|f - P_n^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \tag{4.2}$$

одержуємо

$$\|f - P_n^*\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \|\varphi_k\|^2 < \varepsilon^2.$$

Оскільки при зростанні n $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \|\varphi_k\|^2$ є зростаючою, то для всіх $m \geq n$:

$$\left\| f - P_m^* \right\|^2 = \left\| f \right\|^2 - \sum_{k=1}^{m} a_k^2 \left\| \varphi_k \right\|^2 < \varepsilon^2,$$

$$\left\| f - P_m^* \right\| < \varepsilon.$$

Многочлен Фур’є $P_n^*(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$ є частинною сумою ряду Фур’є. Для будь-якої функції $f \in R([a,b])$ і для будь- якого $\varepsilon > 0$ існує $n \in N$ таке, що для всіх $m \geq n$ виконується нерівність $\left\| f - \sum_{k=1}^{m} a_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$. Це означає, що $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\| \to 0$ при $n \to \infty$, або $P_n^*(x) \to f(x)$ в середньому квадратичному при $n \to \infty$(ряд Фур’є для функції $f(x)$ збігається в середньоквадратичному до функції $f(x)$). Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для будь-якої функції $f \in \mathrm{R}([a,b])$ ряд Фур'є збігається в середньоквадратичному до $f(x)$: $\left\| f - P_n^* \right\| \to 0, \quad n \to \infty$. Це означає, що для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує n_0 таке, що для всіх $n \geq n_0$ $\left\| f - P_n^* \right\| < \varepsilon$ ($\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\| < \varepsilon$). Звідси одержуємо, що для будь-якої інтегровної функції $f(x)$ і для довільного $\varepsilon > 0$ існує $P_n(x) = P_n^*(x)$ – многочлен Фур’є, що виконується нерівність $\left\| f - P_n \right\| < \varepsilon$. Достатність доведена.

Теорема 4.2. *Для того, щоб ортогональна послідовність* $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ *була замкненою в* $\mathrm{R}([a,b])$ *необхідно і достатньо, щоб для довільної функції* $f \in \mathrm{R}([a,b])$ *виконувалась рівність*

$$\left\| f \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left\| \varphi_n \right\|^2$$

(рівність Парсеваля).

Доведення. Для доведення необхідності використаємо тотожність Бесселя (4.2):

$$\left\| f - P_n^* \right\|^2 = \left\| f \right\|^2 - \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left\| \varphi_k \right\|^2.$$

Якщо ортогональна система замкнена, то за теоремою 4.1 $\left\| f - P_n^* \right\| \to 0$, $n \to \infty$. Тоді $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left\| \varphi_k \right\|^2 = \left\| f \right\|^2$, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left\| \varphi_n \right\|^2 = \left\| f \right\|^2$. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай має місце рівність Парсеваля, це означає: $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left\| \varphi_k \right\|^2 = \left\| f \right\|^2$. Звідки випливає $\left\| f - P_n^* \right\| \to 0$, $n \to \infty$. Тобто ряд Фур’є збігається в середньому квадратичному, а за теоремою 4.1 це означає, що послідовність $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ – замкнена. Достатність доведена. Теорему доведено.

Теорема 4.3. *Замкнена в* $\mathrm{R}([a,b])$ *послідовність* $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ *є повною в* $\mathrm{R}([a,b])$.

Доведення. Нехай для $f \in \mathrm{R}([a,b])$ $(f,\varphi_n)=0$ для всіх $n \geq 1$. Оскільки $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ замкнена в $\mathrm{R}([a,b])$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує многочлен $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x), \quad n \in N, \quad \alpha_k \in R, \quad k = 1,...,n$ такий, що $\|f - P_n\| < \varepsilon$.

Тоді

$$\|f\|^2 = (f,f) = (f, f - P_n) \leq \|f\| \cdot \|f - P_n\| < \varepsilon \cdot \|f\|.$$

Звідси випливає, що $\|f\| = 0$ ($f(x) = 0$ у всіх точках неперервності). Теорема доведена.

Наступне твердження випливає з рівності Парсеваля.

Наслідок 4.1. $\|f\| = 0$ *тоді і тільки тоді, коли всі коефіцієнти Фур'є* $a_k = 0$.

Теорема 4.4 (узагальнена рівність Парсеваля). *Нехай* $\{f,g\} \subset \mathrm{R}([a,b])$, *послідовність* $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ *замкнена в* $\mathrm{R}([a,b])$. *Тоді виконується рівність:*

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) a_n(g) \|\varphi_n\|^2,$$

яку називають узагальненою рівністю Парсеваля.

Доведення. Розглянемо $\|f - g\|^2 = (f-g, f-g) = \|f\|^2 - 2(f,g) + \|g\|^2$. Якщо f та g інтегровні на $[a,b]$, то і $f - g$ буде інтегровною. Оскільки послідовність $\{\varphi_n : n \geq 1\}$ замкнена в $\mathrm{R}([a,b])$, тому можна записати для $f - g$ рівність Парсеваля:

$$\|f-g\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f-g))^2 \|\varphi_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f) - a_n(g))^2 \|\varphi_n\|^2 =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(f))^2 \|\varphi_n\|^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) a_n(g) \|\varphi_n\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(g))^2 \|\varphi_n\|^2 =$$
$$= \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) a_n(g) \|\varphi_n\|^2 + \|g\|^2,$$

а

$$\|f-g\|^2 = (f-g, f-g) = (f,f) - 2(f,g) + (g,g) =$$
$$= \|f\|^2 - 2(f,g) + \|g\|^2.$$

Ліві частини написаних рівностей рівні, тому рівні і праві, тоді має місце рівність:

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) a_n(g) \|\varphi_n\|^2.$$

Теорема доведена.

Теорема 4.5 (про почленне інтегрування ряду Фур'є). *Нехай* $\{\varphi_n : n \ge 1\}$ *– замкнена в* $\mathrm{R}([a,b])$, $f \in R([a,b])$, $x_0 \in [a,b]$ *– довільне фіксоване,* $x \in [a,b]$ *– довільне. Тоді ряд Фур'є для* $f(x)$ *по ортогональній послідовності* $\{\varphi_n : n \ge 1\}$ *можна почленно інтегрувати на* $[x_0, x]$ *і буде справедлива рівність:*

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt .$$

При цьому ряд в правій частині буде рівномірно збіжним на $[a,b]$.

Доведення. Оскільки f – інтегровна, функції $\{\varphi_n : n \ge 1\}$ – інтегровні на $[a,b]$, тому $f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t)$ на $[x_0, x]$ буде інтегровною і

$$\int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) \right) dt = \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt .$$

Застосуємо до цього інтеграла нерівність Коші-Буняковського

$$\left| \int_{a}^{b} f(x)g(x)dx \right|^2 \le \int_{a}^{b} f^2(x)dx \cdot \int_{a}^{b} g^2(x)dx :$$

$$\left(\int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) \right) dt \right)^2 \le \left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) \right)^2 dt \right| \cdot \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| \le$$

$$\le \left| \int_{a}^{b} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) \right)^2 dt \right| \cdot (b-a) .$$

Звідси одержуємо, що

$$\left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) \right) dt \right| \le \sqrt{\int_{a}^{b} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) \right)^2 dt} \sqrt{b-a} = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\| \sqrt{b-a} ,$$

$$\left| \int_{x_0}^{x} f(t)dt - \sum_{k=1}^{n} a_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt \right| \le \left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\| \sqrt{b-a} .$$

Оскільки, f – інтегрована, то за теоремою 4.1 ряд Фур'є збігається в середньому квадратичному до $f(x)$, тому

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\| \to 0, \ n \to \infty .$$

Це означає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує n_0, що для всіх $n \ge n_0$ $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k \right\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}$.

А звідси одержуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує n_0, що для всіх $n \ge n_0$ і всіх $x \in [a,b]$ $\left| \int_{x_0}^{x} \left(f(t) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t) \right) dt \right| < \varepsilon$. Тоді $\sum_{k=1}^{n} a_k \int_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt$ рівномірно прямує до

$\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$ на проміжку $[a,b]$ при $n\to\infty$. Тобто, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_{x_0}^{x} \varphi_k(t)dt$ є рівномірно збіжний на $[a,b]$ і має суму $\int\limits_{x_0}^{x} f(t)dt$. Теорема доведена.

4.2. Замкненість основної тригонометричної системи. Теорема Ляпунова.

Теорема 4.6 (Ляпунова). *Послідовність* $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, ..., \cos nx, \sin nx, ...$ *замкнена в* $R([-\pi,\pi])$.

Доведення. Нехай $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$ функція. Тоді вона обмежена на $[a,b]$: існує $L>0$, що для $x\in[a,b]$ $|f(x)|\le L$. Для довільного $\varepsilon>0$ розглянемо розбиття відрізка $[a,b]$ $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ таке, щоб $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k \Delta x_k<\frac{\varepsilon^2}{2L}$, де $\omega_k=M_k-m_k$, $m_k=\inf\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $M_k=\sup\limits_{x\in[x_{k-1},x_k]} f(x)$, (випливає із інтегровності).

Визначимо функцію $g(x)$ таку, що $g(x_k)=f(x_k)$, $k=0,1,...,n$, а для $x\in(x_{k-1},x_k)$

$$g(x)=f(x_{k-1})+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_{k-1}).$$

Для функції $g(x)$ виконуються умови: $x\in[a,b]$ $|g(x)|\le L$ і $|f(x)-g(x)|\le\omega_k$ для довільного $x\in[x_{k-1},x_k]$, $k=1,...,n$ (f і g приймають значення між M_k і m_k). Будемо вважати $f(a)=f(b)$. Нехай ε – довільне число, розглянемо норму

$$\|f-g\|^2=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))^2dx\le 2L\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|dx=$$

$$=2L\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k}|f(x)-g(x)|dx\le 2L\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k<\varepsilon^2.$$

Отже, ми показали: якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то для довільного $\varepsilon>0$ існує неперервна функція $g(x)$ така, що $\|f-g\|<\varepsilon$.

Розглянемо тепер довільну функцію $f\in R([-\pi,\pi])$, $f(-\pi)=f(\pi)$ (значення можна змінити, щоб ця умова виконувалась). За доведеним, для будь-якого $\varepsilon>0$ існує неперервна функція $g(x)$ така, що

$$\|f-g\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

А за теоремою 3.3 (Вейєрштраса) існує многочлен $T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ такий, що $|g(x)-T_n(x)|<\frac{\varepsilon}{2\sqrt{2\pi}}$ для всіх $x\in[-\pi,\pi]$. Звідси одержимо,що

$$\|g-T_n\|=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\left(g(x)-T_n(x)\right)^2dx}<\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varepsilon^2}{4\cdot 2\pi}dx}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Тоді $\|f-T_n\|\le\|f-g\|+\|g-T_n\|<\varepsilon$. Теорема доведена.

Наслідок 4.2. *Якщо $f(x)$ інтегровна на $[-\pi,\pi]$, то має місце рівність Парсеваля*

$$\frac{a_0^2(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2(f)+b_n^2(f)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx.$$

Випливає із теореми 4.2.

Наслідок 4.3. *Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[-\pi,\pi]$, то має місце узагальнена рівність Парсеваля*

$$\frac{a_0(f)a_0(g)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(f)a_n(g)+b_n(f)b_n(g)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)dx.$$

Випливає із теореми 4.4.

Наслідок 4.4. *Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $[-\pi,\pi]$. Тоді її ряд Фур'є $\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$ можна почленно інтегрувати по будь-якому проміжку $[0,x]$, $x\in[-\pi,\pi]$, при цьому отриманий ряд буде рівномірно збіжним на $[-\pi,\pi]$ до інтеграла $\int_0^x f(t)dt$, тобто буде мати місце рівність:*

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{\sin nx}{n}+b_n\frac{1-\cos nx}{n}\right).$$

Якщо, крім того, $f(x)$ періодична з періодом 2π, то написана рівність буде справедливою для всіх $x\in R$.

Доведення. Рівномірна збіжність на $[-\pi,\pi]$ випливає із теорем 4.5 і 4.6. Нехай $f(x)$ періодична з періодом 2π. Розглянемо функцію $F(x)=\int_0^x\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt$. Підінтегральна функція інтегровна, тому інтеграл, як функція від верхньої межі, є неперервною функцією на *R*. Крім того, $F(x)$ – періодична з періодом 2π:

$$F(\pi)-F(-\pi)=\int_0^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt-\int_0^{-\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=0,$$

а із (1.7)

$$F(x+2\pi)=\int_o^{x+2\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=\int_0^{x}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt+\int_x^{x+2\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=$$

$$=F(x)+\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t)-\frac{a_0}{2}\right)dt=F(x).$$

Із періодичності функції $F(x)$ випливає справедливість рівності у наслідку на *R*.

Приклад 4.1. Для функції $f(x)=\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & x\in[-\pi,0), \\ \dfrac{\pi}{4}, & x\in[0,\pi] \end{cases}$ знайти ряд Фур'є. Написати рівність Парсеваля. Довести, що $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+...=\dfrac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x)$ – непарна, то $a_0=0$, $a_n=0$, а

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{4}\sin nx dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}\right)=-\frac{1}{2n}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases} 0, & n=2k, \\ \dfrac{1}{n}, & n=2k-1. \end{cases}$$

Отже, для будь-якого $x\in(-\pi;0)\cup(0;\pi)$ буде справедлива рівність

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x.$$

Сума цього ряду в точках $x=\pm\pi$, $x=0$, що є точками розриву, $S(0)=S(\pm\pi)=0$.

Запишемо тепер рівність Парсеваля

$$\frac{a_0^2(f)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2(f)+b_n^2(f)\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Для цього знайдемо

$$\|f\|^2=\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx=\frac{\pi^2}{16}2\pi=\frac{\pi^3}{8}.$$

Отже, рівність Парсеваля має вигляд

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots.$$

У рівність $f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{2k-1}\sin(2k-1)x$ підставимо значення $x=\dfrac{\pi}{2}$. Тоді, оскільки за умовою $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$, одержимо:

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots.$$

Приклад 4.2. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x$, $x\in[0,2\pi]$. Знайти суму $S(x)$ та написати рівність Парсеваля.

Розв'язання. Знайдемо спочатку коефіцієнти Фур'є для функції $f(x)$:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x dx=\frac{1}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{2\pi}=2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}dx \right) = \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^{2\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-x\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(-2\pi)\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2\pi}\sin nx\Big|_0^{2\pi} = -\frac{2}{n}.$$

Підставимо одержані коефіцієнти та отримаємо ряд Фур'є, сума $S(x)$ якого

$$S(x) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n} \right)\sin nx.$$

Тоді $S(x) = f(x) = x$, $0 < x < 2\pi$. В точках $x = 0$, $x = 2\pi$ сума ряду рівна $S(x) = \pi$.

Отже,

$$x = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n} \right)\sin nx,\ 0 < x < 2\pi.$$

Використовуючи рівність Парсеваля $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)dx$, отримаємо:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^3}{3}$$

та

$$\frac{(2\pi)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0^2 + \left(-\frac{2}{n} \right)^2 \right) = \frac{8\pi^2}{3}.$$

Отже, рівність Парсеваля має вигляд: $2\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{8}{3}\pi^2$. Зауважимо, що з даної рівності випливає, що $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Приклад 4.3. Використовуючи розклад в ряд Фур'є функції $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$ і теорему про інтегрування ряду Фур'є, одержати розклад в ряд Фур'є функції $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Розв'язання. Використаємо розклад в ряд Фур'є функції $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$, що одержаний у прикладі 1.1:

$$f(x) \sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Нехай $x \in [-\pi, \pi]$ і розглянемо проміжок $[0, x]$. За наслідком 4.3 справедлива рівність

$$\int_0^x t\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\int_0^x \sin nt\,dt,$$

$$\frac{x^2}{2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(-\frac{\cos nx - 1}{n}\right).$$

Отже,

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Оскільки,

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{a_0}{2}, \quad a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

і

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

§5 Ряди Фур'є по ортогональних системах комплексних функцій. Комплексна форма тригонометричного ряду Фур'є

Нехай $f(x) = u(x) + iv(x)$ – комплексна функція, $\overline{f(x)} = u(x) - iv(x)$ та $|f(x)|^2 = f(x)\cdot\overline{f(x)}$, $x \in R$. Функція $f(x)$ неперервна тоді і тільки тоді, коли $u(x)$, $v(x)$ – неперервні.

Зауважимо, що

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x),$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u(x)dx + i\int_a^b v(x)dx.$$

З попередньої рівності випливає, що $f(x)$ буде інтегровною на $[a,b]$, якщо $u(x)$, $v(x)$ – інтегровані на $[a,b]$. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a,b]$, то $|f(x)|^2 = f(x)\cdot\overline{f(x)}$ також інтегровна на $[a,b]$.

Скалярним добутком функцій $f(x)$ і $g(x)$ називається число $(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx$, причому $(f,g) = \overline{(g,f)}$. Число $\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ називають нормою $f(x)$.

Функції $f(x)$ і $g(x)$ називаються *ортогональними* на $[a,b]$, якщо $(f,g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx = 0$.

Послідовність функцій $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...$ називається *ортогональною* на $[a,b]$, якщо

$$(\varphi_i,\varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \|\varphi_i\|^2 > 0, & i = j. \end{cases}$$

Нехай $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$. Для знаходження коефіцієнтів a_n, скалярно помножимо попередню рівність на $\varphi_n(x)$

$$(f,\varphi_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\varphi_k,\varphi_n).$$

Враховуючи ортогональність послідовності функцій $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...$, одержуємо $(f,\varphi_n) = a_n\|\varphi_n\|^2$, тобто $a_n = \dfrac{(f,\varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$.

Отже, кожній інтегровній на $[a,b]$ функції $f(x)$ можна поставити у відповідність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ по ортогональній послідовності функцій

$\varphi_1(x),...,\varphi_n(x),...$. Такий ряд називається *рядом Фур'є по ортогональній системі комплексних функцій*, а коефіцієнти $a_n = \dfrac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2}$ – *коефіцієнтами Фур'є.*

Розглянемо послідовність $\varphi_n(x) = e^{i\frac{n\pi x}{l}}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$. Така послідовність функцій є ортогональною на відрізку $[-l, l]$:

$$(\varphi_n, \varphi_m) = \int_{-l}^{l} \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}dx = \int_{-l}^{l} e^{i\frac{n\pi x}{l}} e^{-i\frac{m\pi x}{l}} dx = \int_{-l}^{l} e^{i\frac{(n-m)\pi x}{l}} dx =$$

$$= \int_{-l}^{l} \cos\frac{(n-m)\pi x}{l} dx + i\int_{-l}^{l} \sin\frac{(n-m)\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 2l, & n = m. \end{cases}$$

Зокрема, $\|\varphi_n\|^2 = 2l$.

Нехай $f(x)$ – довільна інтегровна на $[-l, l]$ функція. Такій функції можна поставити у відповідність ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}, \tag{5.1}$$

де

$$c_n = \frac{(f, \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x) e^{-i\frac{n\pi x}{l}} dx. \tag{5.2}$$

Нехай $f(x)$ – дійсна інтегровна на $[-l, l]$ функція. Для такої функції можна побудувати ряд Фур'є:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{5.3}$$

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} dx, & n = 0, 1, ...; \\ b_n = \dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l} dx, & n = 1, 2, ... \end{cases} \tag{5.4}$$

Теорема 5.1. *Якщо $f(x)$ – дійсна інтегровна на $[-l, l]$ функція, то рівності (5.1)-(5.2) і (5.3)-(5.4) – еквівалентні.*

У зв'язку з цим (5.1) називається *комплексною формою тригонометричного ряду Фур'є.*

Доведення. Дійсно, розглянемо ряд (5.1)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-i\frac{n\pi x}{l}}, \tag{5.5}$$

де

$$c_0 = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx = \frac{a_0}{2}. \tag{5.6}$$

Нехай $n \geq 1$, $n \in N$, тоді з рівності (5.2) випливає:

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\left(a_n - ib_n\right),$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{i\frac{n\pi x}{l}}dx = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}\right)dx = \frac{1}{2}\left(a_n + ib_n\right).$$

Вирази для c_n і c_{-n} підставимо у (5.5), тоді

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}e^{i\frac{n\pi x}{l}} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{l}} =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - ib_n}{2}\left(\cos\frac{n\pi x}{l} + i\sin\frac{n\pi x}{l}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + ib_n}{2}\left(\cos\frac{n\pi x}{l} - i\sin\frac{n\pi x}{l}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Отже,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

Теорема 5.1 доведена.

Із пункту 1.5 випливає наступне твердження.

Наслідок. Якщо функція $f(x)$ – кусково-диференційовна на $[-l,l]$, періодична $(T = 2l)$, то для будь-якого $x \in [-l,l]$ такого, що x є точкою неперервності $f(x)$, справедлива рівність

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}.$$

Якщо точка x_0 – точка розриву $f(x)$, то сума ряду $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{l}}$ в цій точці дорівнює

$$S(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}.$$

Приклад 5.1. Розкласти в комплексний ряд Фур'є функцію $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \end{cases}$ періодичну з періодом $T = 2\pi$.

Розв'язання. За формулами (5.2), (5.6) знайдемо коефіцієнти Фур'є цієї функції:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} dx = \frac{1}{2},$$

а для $n \neq 0$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(\cos nx - i\sin nx)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin nx}{n} + i\frac{\cos nx}{n}\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$

$$= i\frac{\cos n\pi - 1}{2\pi n} = i\frac{(-1)^n - 1}{2\pi n} = \begin{cases} 0, & n = 2k, k \neq 0, \\ -\dfrac{i}{\pi n}, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Отже,

$$c_0 = \frac{1}{2},\ c_{2n} = 0, \quad n \neq 0,\ c_{2n-1} = -\frac{i}{\pi(2n-1)}.$$

Підставляючи знайдені коефіцієнти в ряд Фур’є у комплексній формі, отримаємо:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{i}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1}, \qquad x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi).$$

У точках $x = \pi, x = 0, x = -\pi$ сума ряду така:

$$S(0) = \frac{1}{2},\ S(\pm\pi) = \frac{1}{2}.$$

§6 Інтеграл Фур'є

6.1. Поняття про інтеграл Фур'є. Нехай функція $f(x)$ – інтегровна на $[-l,l]$ для будь-якого $l>0$. При певних умовах, що містяться у пункті 1.5, функцію $f(x)$ на відрізку $[-l,l]$ можна зобразити у вигляді суми ряду Фур'є

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{6.1}$$

де коефіцієнти Фур'є знаходяться за формулами

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(u)\cos\dfrac{n\pi u}{l}du, & n=0,1,2,...,\\ b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(u)\sin\dfrac{n\pi u}{l}du, & n=1,2,... . \end{cases} \tag{6.2}$$

Підставимо коефіцієнти Фур'є (6.2) в (6.1):

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(u)du+\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi x}{l}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{n\pi u}{l}du+\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(u)\sin\frac{n\pi u}{l}du=$$

$$=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(u)du+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}f(u)\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi u}{l}+\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi u}{l}\right)du=$$

$$=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(u)du+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}f(u)\cos\frac{n\pi(u-x)}{l}du,\quad x\in[-l,l]. \tag{6.3}$$

Розглянемо функцію

$$g(t)=\int\limits_{-l}^{l}f(u)\cos t(u-x)du,\quad t\in[0,\infty).$$

Тоді (6.3) запишемо у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(u)du+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}g\left(\frac{n\pi}{l}\right). \tag{6.4}$$

Нехай $f(x)$ абсолютно інтегровна на $(-\infty,\infty)$. Розглянемо розбиття додатної півосі набором точок $t_n=\dfrac{n\pi}{l}$, $n=0,1,2,...$, $t_n-t_{n-1}=\Delta t_n=\dfrac{\pi}{l}$, $\Delta t_n\to 0,\quad l\to\infty$. Другий доданок в рівності (6.4) є аналогом інтегральної суми для функції $g(t)$, що відповідає заданому розбиттю проміжка $[0,\infty)$:

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{l}g\left(\frac{n\pi}{l}\right)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}g(t_n)\Delta t_n .$$

Перший доданок в рівності (6.4) $\dfrac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(u)du\to 0$ при $l\to\infty$. Із абсолютної інтегрованості $f(x)$ на $(-\infty,\infty)$ одержуємо, що

$$g(t)=\int\limits_{-l}^{l}f(u)\cos t(u-x)du\to\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos t(u-x)du .$$

Тому, перейшовши в рівності (6.4) до границі при $l\to\infty$, можна чекати, що права частина збігається до інтеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)du .$$

Ці міркування приводять нас до рівності:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)du , \tag{6.5}$$

яку можна записати у вигляді

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)(\cos tu\cos tx+\sin tu\sin tx)du =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\cos tx\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos tudu+\sin tx\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin tudu\right)dt .$$

Позначимо

$$a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos tudu ,\ b(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin tudu . \tag{6.6}$$

Тоді

$$f(u)=\int_0^{\infty}(a(t)\cos tx+b(t)\sin tx)dt . \tag{6.7}$$

Кожна із рівностей (6.5) і (6.7) називається *інтегральною формулою Фур'є для функції* $f(x)$. Інтеграли в правій частині рівностей (6.5) і (6.7) називаються *інтегралами Фур'є для функції* $f(x)$.

Кожній інтегрованій на R функції ми можемо поставити у відповідність інтеграл Фур'є:

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)du ,$$

$$f(x)\sim\int_0^{\infty}(a(t)\cos tx+b(t)\sin tx)dt .$$

Виникає питання, коли $f(x)$ є значенням свого інтегралу Фур'є.

Оскільки $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)du$ буде парною функцією від t, то

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)du .$$

Якщо ми врахуємо, що $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin t(u-x)du$, як функція від t є непарною, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin t(u-x)du=0 .$$

І тому рівність (6.5) можна записати у вигляді:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)(\cos t(u-x)+i\sin t(u-x))du =$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{it(u-x)}du . \tag{6.8}$$

Інтеграл в правій частині рівності (6.8) називається *комплексною формою інтегралу Фур'є.*

6.2. Умови зображення функції інтегралом Фур'є. Ми вже показали, що якщо $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$, то

$$f(x) \sim \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x)du = \int_0^\infty \big(a(t)\cos tx + b(t)\sin tx\big)dt,$$

$$a(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos tu du, \; b(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\sin tu du.$$

Постає питання, коли можна поставити знак рівності, тобто $f(x)$ є значенням свого інтегралу Фур'є.

Зафіксуємо довільне $x_0 \in R$ та позначимо

$$I(A) = \frac{1}{\pi}\int_0^A dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x_0)du.$$

Тоді $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\cos t(u-x_0)du = \lim\limits_{A\to\infty} I(A)$. Вираз для $I(A)$ можна також записати у вигляді:

$$I(A) = \int_0^A \big(a(t)\cos tx_0 + b(t)\sin tx_0\big)dt.$$

Із абсолютної інтегровності функції $f(x)$ випливає, що невласні інтеграли $a(t)$, $b(t)$ будуть рівномірно збіжні за ознакою Вейєрштраса. Оскільки функції $\cos tu$ і $\sin tu$ є неперервними функціями змінної t, то $a(t)$, $b(t)$ – неперервні, крім цього, із леми Рімана випливає, що $a(t)\to 0$, $b(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Із цих умов випливає, що в інтегралі $I(A)$ можна змінити порядок інтегрування:

$$I(A) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^A f(u)\cos t(u-x_0)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\left(\left.\frac{\sin t(u-x_0)}{u-x_0}\right|_0^A\right)du =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\frac{\sin A(u-x_0)}{u-x_0}du = \left|\begin{matrix} u-x_0 = z \\ du = dz \end{matrix}\right| = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+z)\frac{\sin Az}{z}dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0} f(x_0+z)\frac{\sin Az}{z}dz + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x_0+z)\frac{\sin Az}{z}dz =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \big(f(x_0+t)+f(x_0-t)\big)\frac{\sin At}{t}dt. \tag{6.9}$$

Позначимо $S_0 = \dfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$. Якщо точка x_0 – точка неперервності функції $f(x)$, то $S_0 = f(x_0)$. Оскільки інтеграл Діріхле $\int_0^\infty \frac{\sin At}{t}dt = \frac{\pi}{2}$, при $A>0$, то $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin At}{t}dt = 1$. Помножимо цю рівність на S_0 і віднімемо від рівності (6.9). Тоді

$$I(A) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \big(f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0\big)\frac{\sin At}{t}dt. \tag{6.10}$$

Позначимо $\varphi(t) = f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2S_0$. Очевидно, що $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = 0$, це випливає із визначення $\varphi(t)$.

Теорема 6.1 (Діні). Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на $(-\infty,+\infty)$, існує $\delta > 0$ таке, що інтеграл

$$\int_0^{\delta} \frac{|\varphi(t)|}{t} dt < \infty, \tag{6.11}$$

тоді

$$\lim_{A\to\infty} I(A) = S_0,$$

або

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} du \int_0^{+\infty} f(u)\cos t(u - x_0)dt = S_0$$

(інтеграл Фур'є для функції $f(x)$ в точці x_0 збігається і має значення S_0).

Доведення. Із рівності (6.10) одержимо:

$$I(A) - S_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}\sin Atdt + \frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\sin Atdt.$$

Із умов теореми, збіжності інтеграла $\int_0^{\delta}\frac{|\varphi(t)|}{t}dt$ і леми Рімана маємо:

$$\int_0^{\delta}\frac{\varphi(t)}{t}\sin Atdt \to 0, \quad A\to\infty.$$

Тоді

$$\int_{\delta}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\sin Atdt = \int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin Atdt - 2S_0\int_{\delta}^{\infty}\frac{\sin At}{t}dt =$$

$$= \int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin Atdt - 2S_0\int_{A\delta}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz.$$

Функція $f(x_0+t)+f(x_0-t)$ – абсолютно інтегровна на $[\delta,+\infty)$. Функція $\frac{1}{t}$ на цьому проміжку неперервна. Тоді і функція $\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}$ буде абсолютно інтегровною на $[\delta,+\infty)$. Тому за лемою Рімана

$$\int_{\delta}^{\infty}\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{t}\sin Atdt \to 0, \quad A\to\infty.$$

Оскільки $\int_0^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz = \frac{\pi}{2}$, то для $\delta > 0$ при $A\to+\infty$ і $\delta A\to+\infty$, тому $\int_{A\delta}^{\infty}\frac{\sin z}{z}dz \to 0$, як залишок збіжного інтеграла Діріхле. Отже, $\lim\limits_{A\to\infty} I(A) = S_0$. Теорема доведена.

Теорема 6.2 (Ліпшица). *Нехай* $f(x)$ *– абсолютно інтегровна на* $(-\infty,+\infty)$*, існують* $\delta>0$*,* $L>0$*,* $\alpha\in(0,1]$ *такі, що при* $|t|<\delta$ $|f(x_0+t)-f(x_0)|\le L|t|^{\alpha}$*, тоді* $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A)=f(x_0)$.

Випливає із теореми Діні.

Наслідок 6.1. *Нехай* $f(x)$ *– абсолютно інтегровна на* $(-\infty,+\infty)$ *і в точці* x_0 *має похідну* $f'(x_0)$*, тоді* $\lim\limits_{A\to\infty} I(A)=f(x_0)$.

Випливає із теореми6.2.

Наслідок 6.2. *Нехай* $f(x)$ *– абсолютно інтегровна на* $(-\infty,+\infty)$ *і нехай існують скінченні границі* $\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$*,* $\lim\limits_{t\to0+0}\dfrac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t}$*, тоді* $\lim\limits_{A\to\infty} I(A)=S_0$.

Випливає із теореми Діні.

Приклад 6.1. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}1, |x|\le1,\\ 0, |x|>1.\end{cases}$

Розв'язання. Інтеграл Фур'є для функції $f(x)$ має вигляд

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos t(u-x)du=\int_0^{\infty}\big(a(t)\cos tx+b(t)\sin tx\big)dt,$$

де $a(t)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos tudu$, $b(t)=\dfrac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin tudu$.

Знайдемо функції $a(t)$ і $b(t)$:

$$a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\cos tudu=\frac{1}{\pi}\frac{\sin tu}{t}\bigg|_{-1}^{1}=\frac{2\sin t}{\pi t},$$

$$b(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sin tudu=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\cos tu}{t}\bigg|_{-1}^{1}\right)=0.$$

Отже, $f(x)=\int\limits_0^{\infty}\dfrac{2\sin t}{\pi t}\cos txdt,\quad x\ne\pm1$.

У точках розриву $x=\pm1$ інтеграл Фур'є дорівнює значенню

$$\frac{f(-1-0)+f(-1+0)}{2}=\frac{f(1+0)+f(1-0)}{2}=\frac{1}{2},$$

тобто, $\dfrac{1}{2}=\int\limits_0^{\infty}\dfrac{2\sin t}{\pi t}\cos tdt$.

Приклад 6.2. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}h\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right), & |x|\le a,\\ 0, & |x|>a.\end{cases}$

Розв'язання. Аналогічно до приклада 6.1, знайдемо функції $a(t)$ і $b(t)$:

$$a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}h\left(1-\frac{|u|}{a}\right)\cos tudu=\frac{2h}{\pi}\int_{0}^{a}\left(1-\frac{u}{a}\right)\cos tudu=$$

$$=\frac{2h}{\pi}\left(\left(1-\frac{u}{a}\right)\frac{\sin tu}{t}\Bigg|_0^a+\frac{1}{a}\int_0^a\frac{\sin tu}{t}du\right)=\frac{2h}{\pi a}\int_0^a\frac{\sin tu}{t}du=\frac{2h}{\pi a t^2}(1-\cos ta),$$

$$b(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}h\left(1-\frac{|u|}{a}\right)\sin tu=0.$$

Функція $f(x)$ є неперервною, тому для всіх x одержимо

$$f(x)=\int_0^\infty\frac{2h}{\pi a t^2}(1-\cos ta)\cos txdt.$$

Приклад 6.3. Зобразити інтегралом Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}\sin x, |x|\le\pi,\\ 0, |x|>\pi.\end{cases}$

Розв'язання. Знайдемо функції $a(t)$ і $b(t)$:

$$a(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin u\cos tudu=0,$$

$$b(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin u\sin tudu=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin u\sin tudu=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cos u(1-t)-\cos u(1+t))du=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin u(1-t)}{1-t}\Bigg|_0^\pi-\frac{\sin u(1+t)}{1+t}\Bigg|_0^\pi\right)=$$

$$=\frac{2\sin\pi t}{\pi\left(1-t^2\right)}.$$

Функція $f(x)$ є неперервною, тому $f(x)=\int_0^\infty\frac{2\sin\pi t}{\pi\left(1-t^2\right)}\sin txdt$, $\forall x\in R$.

6.3. Перетворення Фур'є, його основні властивості.

Означення 6.1. Нехай $f(x)$ – абсолютно інтегровна на R, тоді функція

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx$$

називається *перетворенням Фур'є функції* $f(x)$.

Теорема 6.3. *Нехай* $f(x)$ *– абсолютно інтегровна на* R*, неперервна в точці* x *і задовольняє умовам теореми Діні в точці* x*, тоді справедлива рівність*

$$f(x)=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}e^{-itx}F(t)dt.$$

Доведення. Оскільки $f(x)$ неперервна в точці x, то за теоремою Діні

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{0}^{+\infty}f(u)\cos t(u-x)dt = f(x).$$

Враховуючи (6.8), маємо:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos t(u-x)du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos t(u-x)du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{it(u-x)}du=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}dt\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)e^{itu}du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}F(t)dt=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}e^{-itx}F(t)dt.$$

Теорема доведена.

Інтеграл $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-itx}F(t)dt = f(x)$ називається *оберненим перетворенням Фур'є*.

Нехай $f(x)$ – парна, тоді

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx = 2\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos txdx,$$

а функцію

$$F_c(t)=2\int_{0}^{+\infty}f(x)\cos txdx$$

називають *прямим косинус-перетворенням Фур'є* функції $f(x)$. В цьому випадку $F_c(t)$ також є парною і

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}F_c(t)\cos txdx.$$

Цю рівність називають *оберненим косинус-перетворенням Фур'є.*

Нехай $f(x)$ – непарна, тоді

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}f(x)dx = 2i\int_{0}^{+\infty}f(x)\sin txdx,$$

а функцію

$$F_s(t)=2\int_{0}^{+\infty}f(x)\sin txdx$$

називають *прямим синус-перетворенням Фур'є* функції $f(x)$. В цьому випадку функція $F_s(t)$ також є непарною і

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}F_s(t)\sin txdx$$

називають *оберненим синус-перетворенням Фур'є.*

Розглянемо деякі властивості перетворення Фур'є.

Властивість 1. Функція $F(t)$ рівномірно неперервна на R, при цьому $\lim_{t\to\pm\infty}F(t)=0$.

Доведення. За означенням

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos tx\, f(x)dx+i\int_{-\infty}^{+\infty}\sin tx\, f(x)dx\,.$$

Оскільки $f(x)$ – абсолютно інтегровна на R, то за лемою Рімана $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos txdx \to 0$ і $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin txdx \to 0$ при $t\to\infty$. Це означає, що $F(t)\to 0, t\to\infty$. Функції $\cos tx$ та $\sin tx$ – неперервні як функції від t, за умовою $\int_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ – збіжний, тому за ознакою Вейєрштраса інтеграли $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos txf(x)dx$ та $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin txf(x)dx$ - рівномірно збіжні на R, тому є неперервними функціями від t. Отже, функція $F(t)$ неперервна на R. Із неперервності на R і того, що $\lim\limits_{t\to\pm\infty} F(t)=0$ випливає, що $F(t)$ – рівномірно неперервна.

Властивість 2. Якщо існує $n\in N$ таке, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x^n||f(x)|dx \tag{6.12}$$

збіжний, то функція $F(t)$ буде мати неперервні на R похідні всіх порядків, при цьому

$$F^{(k)}(t)=(i)^k\int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{itx} f(x)dx\,,\ \forall k=1,...,n\,. \tag{6.13}$$

Доведення. Із збіжності інтегралу (6.12) випливає, що для довільного $k=1,...,n$ $\int_{-\infty}^{+\infty}|x^k||f(x)|dx<\infty$. Застосовуючи послідовно теорему про диференціювання невласного інтегралу по параметру одержуємо (6.13).

Нехай $f_1(x)$, $f_2(x)$ – абсолютно інтегровані на R, тоді

$$f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u)f_2(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(u)f_2(x-u)du$$

називається *згорткою* функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$.

Властивість 3. Нехай $F_i(t)$ – перетворення Фур'є функції $f_i(x)$, $i=1,2$, $f(x)$ – згортка функцій $f_1(x)$ та $f_2(x)$. Нехай $F(t)$ – перетворення Фур'є функції $f(x)$, тоді $F(t)=F_1(t)\cdot F_2(t)$.

Доведення.

$$F(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}dx\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-u)f_2(u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}du\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f_1(x-u)f_2(u)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(u)du\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}f_1(x-u)dx=\left|\begin{matrix} x-u=z \\ dx=dz\end{matrix}\right|=\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(u)du\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it(z+u)}f_1(z)dz=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itu} f_2(u)du\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itz}f_1(z)dz=F_1(t)\cdot F_2(t)\,.$$

Приклад 6.4. Знайти перетворення Фур'є для функцій:

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, |x|\le a,\\ 0, |x|>a;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}0, x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, x>0;\end{cases}$

в) $f(x)=e^{-\lambda|x|}$, $(\lambda>0)$.

Розв'язання. Задані функції абсолютно інтегровні на R, тому за означенням перетворення Фур'є

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx .$$

а) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}, & |x|\le a,\\ 0, & |x|>a.\end{cases}$ Тоді

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx=\int\limits_{-a}^{a} e^{itx}\frac{1}{2a}dx=\frac{1}{2a}\frac{e^{itx}}{it}\Bigg|_{-a}^{a}=\frac{1}{2ait}\left(e^{ita}-e^{-ita}\right)=\frac{\sin at}{at}.$$

б) $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$ Аналогічно,

$$F(t)=\int\limits_{0}^{\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int\limits_{0}^{\infty} e^{x(it-\lambda)}dx=\frac{\lambda e^{x(it-\lambda)}}{(it-\lambda)}\Bigg|_{0}^{\infty}=\frac{\lambda}{\lambda-it}.$$

в) $f(x)=e^{-\lambda|x|}$, $(\lambda>0)$. Знайдемо:

$$F(t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}e^{-\lambda|x|}dx=\int\limits_{-\infty}^{0} e^{itx}e^{\lambda x}dx+\int\limits_{0}^{\infty} e^{itx}e^{-\lambda x}dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0} e^{x(it+\lambda)}dx+\int\limits_{0}^{\infty} e^{x(it-\lambda)}dx=\frac{e^{x(it+\lambda)}}{it+\lambda}\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{e^{x(it-\lambda)}}{it-\lambda}\Bigg|_{0}^{\infty}=\frac{1}{it+\lambda}-\frac{1}{it-\lambda}=\frac{2\lambda}{\lambda^2+t^2}.$$

Завдання для модульних контрольних робіт

1. Розкладіть в ряд Фур'є задані функції з періодом $T = 2\pi$:

(1.1) $f(x) = 1 + \frac{x}{2}, x \in [-\pi, \pi]$; (1.2) $f(x) = 2x - 3, x \in [-\pi, \pi]$;

(1.3) $f(x) = 5x + 2, x \in [-\pi, \pi]$; (1.4) $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$;

(1.5) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}, -\pi < x < 0, \\ 1, 0 < x \leq \pi; \end{cases}$ (1.6) $f(x) = \begin{cases} 3, -\pi < x < 0, \\ -1, 0 \leq x < \pi; \end{cases}$

(1.7) $f(x) = \sin\frac{x}{2}, x \in (-\pi, \pi)$; (1.8) $f(x) = \cos\frac{x}{3}, x \in (-\pi, \pi)$;

(1.9) $f(x) = x - \pi, x \in (-\pi, \pi]$; (1.10) $f(x) = x^3, x \in (-\pi, \pi)$;

(1.11) $f(x) = e^x - 1, x \in (0, 2\pi)$; (1.12) $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi)$;

(1.13) $f(x) = \begin{cases} 0, -\pi < x < 0, \\ x + 2, 0 \leq x < \pi; \end{cases}$ (1.14) $f(x) = \begin{cases} 1 - x, -\pi < x < 0, \\ -1, 0 \leq x < \pi. \end{cases}$

2. Розкладіть в ряд Фур'є функції періоду T:

(2.1) $f(x) = \begin{cases} 1, -1 \leq x < 0, \\ -1, 0 \leq x < 1, \end{cases} T = 2$; (2.2) $f(x) = \begin{cases} 0, -3 \leq x < 1, \\ x, 1 \leq x \leq 3, \end{cases} T = 6$;

(2.3) $f(x) = \begin{cases} 0, -2 < x < 0, \\ 2, 0 \leq x \leq 2, \end{cases} T = 4$; (2.4) $f(x) = \begin{cases} -x, -2 < x < 0, \\ 0, 0 \leq x \leq 2, \end{cases} T = 4$;

(2.5) $f(x) = x, x \in (-1, 1]$, $T = 2$;

(2.6) $f(x) = 4 - x^2, x \in (-2, 2]$, $T = 4$;

(2.7) $f(x) = 2x - 3, x \in (-3, 3)$, $T = 6$;

(2.8) $f(x) = 5x - 1, x \in (-5, 5)$, $T = 10$;

(2.9) $f(x) = |x| - 5, x \in (-2, 2)$, $T = 4$;

(2.10) $f(x) = 3 - |x|, x \in (-5, 5)$, $T = 10$.

3. Розкладіть задані функції в ряд Фур'є по косинусах на заданому проміжку:

(3.1) $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, x \in (0, \pi)$; (3.2) $f(x) = \sin x, x \in (0, \pi)$;

(3.3) $f(x) = 1 - x, x \in [0, 1]$; (3.4) $f(x) = \operatorname{ch} x, x \in (0, \pi)$;

(3.5) $f(x) = 4x - 2, x \in (0, 2)$; (3.6) $f(x) = 2x - 1, x \in (0, 1)$.

4. Розкладіть задані функції в ряд Фур'є по синусах на заданому проміжку:

(4.1) $f(x) = \frac{\pi}{8} x(\pi - x), x \in (0, \pi)$; (4.2) $f(x) = \cos 2x, x \in (0, \pi)$;

(4.3) $f(x)=\begin{cases} x, 0\le x<1, \\ 0, 1\le x\le 2; \end{cases}$ (4.4) $f(x)=\begin{cases} 1, 0<x\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \dfrac{\pi}{2}<x<\pi; \end{cases}$

(4.5) $f(x)=2x, x\in(0,1);$ (4.6) $f(x)=x-x^2, x\in(0,\pi).$

5. Розкладіть задані функції в ряд Фур'є на заданому проміжку: а) по косинусах; б) по синусах

(5.1) $f(x)=\begin{cases} x, 0<x\le 1, \\ 2-x, 1<x<2; \end{cases}$ (5.2) $f(x)=\begin{cases} x-1, 0\le x<2, \\ 1, 2\le x\le 4; \end{cases}$

(5.3) $f(x)=\begin{cases} 2-x, 0\le x<2, \\ 0, 2\le x\le 3; \end{cases}$ (5.4) $f(x)=\begin{cases} -2, 0\le x<2, \\ 3, 2\le x\le 3. \end{cases}$

6. Довести ортогональність наступних систем функцій:

(6.1) $\cos\frac{3}{2}x, \cos\frac{5}{2}x, \cos\frac{7}{2}x, \ldots, x\in[0,\pi];$

(6.2) $\sin\frac{3}{2}x, \sin\frac{5}{2}x, \sin\frac{7}{2}x, \ldots, x\in[0,\pi];$

(6.3) $\cos\frac{3}{2}x, \sin\frac{3}{2}x, \cos\frac{5}{2}x, \sin\frac{5}{2}x, \cos\frac{7}{2}x, \sin\frac{7}{2}x\ldots, x\in[0,\pi];$

(6.4) $\cos\pi x, \cos 2\pi x, \cos 3\pi x, \ldots, x\in[-1,1];$

(6.5) $\sin\pi x, \sin 2\pi x, \sin 3\pi x, \ldots, x\in[0,1];$

(6.6) $\cos\pi x, \sin\pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 3\pi x, \sin 3\pi x, \ldots, x\in[-1,1];$

(6.7) $\cos\frac{\pi}{2}x, \sin\frac{\pi}{2}x, \cos\pi x, \sin\pi x, \ldots, x\in[-2,2];$

(6.8) $\sin\frac{\pi}{3}x, \sin\frac{2\pi}{3}x, \sin\pi x, \ldots, x\in[0,3].$

7. Знайти інтеграл Фур'є для функцій:

(7.1) $f(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{x}{2}, 0\le x\le 2, \\ 0, x>2; \end{cases}$ (7.2) $f(x)=\begin{cases} \cos x, |x|\le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, |x|>\dfrac{\pi}{2}; \end{cases}$

(7.3) $f(x)=\begin{cases} 2, |x|\le 2, \\ 0, |x|>2; \end{cases}$ (7.4) $f(x)=\begin{cases} |x|, |x|<3, \\ 0, |x|\ge 3; \end{cases}$

(7.5) $f(x)=e^{-x^2}, x\in(-\infty,\infty);$ (7.6) $f(x)=e^{-x}, x\in(0,\infty).$

8. Знайти перетворення Фур'є для функцій:

(8.1) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{x}{2}, |x|\le \pi, \\ 0, |x|>\pi; \end{cases}$ (8.2) $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}.$

Завдання для самостійної роботи

1. Знайти границю $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\cos^2 nx dx$, де $f(x)$ – інтегровна на $[a,b]$.

2. Перевірити, чи буде ортогональною на [0,π] система функцій $\cos\frac{3}{2}x, \sin\frac{3}{2}x, \cos\frac{5}{2}x, \sin\frac{5}{2}x, \ldots$.

3. Довести ортогональність на [-1,1] системи функцій $\cos\pi x, \sin\pi x, \cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \ldots$.

4. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}-1, -2<x<0,\\ 2,\ 0\le x\le 2.\end{cases}$

5. Розкласти функцію $f(x)=|\cos x|$, $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ в ряд Фур'є з періодом $T=\pi$.

6. Розкласти функцію $f(x)=e^{ax}$ ($a=\text{const}, a\ne 0$) в ряд Фур'є на проміжку $(-\pi,\pi]$.

7. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[-4,0]$ функцію $f(x)=\begin{cases}3,\ x\in[-4,-1],\\ -2x,\ x\in(-1,0].\end{cases}$

Знайти суму ряду Фур'є.

8. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[0,5]$ функцію $f(x)=\begin{cases}3x,\ x\in[0,2],\\ 1,\ x\in(2,5].\end{cases}$

Знайти суму ряду Фур'є.

9. Розкласти в ряд Фур'є на відрізку $[-4,0]$ функцію $f(x)=\begin{cases}3,\ x\in[-4,-1],\\ -2,\ x\in(-1,0].\end{cases}$ Побудувати графік суми ряду.

10. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=x^2$, $-2\pi\le x\le 0$. Побудувати графік $f(x)$ і суми ряду.

11. Для функції $f(x)=\begin{cases}0,\ x\in[-\pi,0],\\ 1,\ x\in(0,\pi]\end{cases}$ знайти ряд Фур'є, його суму $S(x)$.

12. Розкласти функцію $f(x)=\pi-x, -\pi\le x\le 0$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

13. Розкласти функцію $f(x)=x-\frac{x^2}{2}, 0\le x\le 2$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

14. Розкласти функцію $f(x)=\begin{cases}0.3, & 0\le x\le 0.5,\\ -0.3, & 0.5<x<1\end{cases}$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

15. Розкласти функцію $f(x)=x\cos x$ на проміжку $(0,\pi)$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах. Знайти суму ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{4n^2+1}{\left(4n^2-1\right)^2}$.

16. Для функції $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0],\\ 1, & x\in(0,\pi]\end{cases}$ знайти ряд Фур'є, його суму $S(x)$. Написати рівність Парсеваля.

17. Розкласти функцію $f(x)=\pi-x, -\pi\le x\le 0$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

18. Розкласти функцію $f(x)=x-\frac{x^2}{2}, 0\le x\le 2$ в ряд Фур'є: а) по косинусах; б) по синусах.

19. Для функції $f(x)=\begin{cases}0, & x\in[-\pi,0],\\ x, & x\in(0,\pi]\end{cases}$ знайти ряд Фур'є, його суму $S(x)$. Написати рівність Парсеваля.

20. Використовуючи розклад в ряд Фур'є функції $f(x)=x$ в ряд Фур'є на $[0,2\pi]$ і теорему про інтегрування ряду Фур'є, одержати розклад в ряд Фур'є функції $f(x)=x^2$ в ряд Фур'є на $[0,2\pi]$.

21. Нехай $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$, $x\in\mathrm{R}$. Довести, що $f(x)$ – неперервна на R, причому ряд для $f'(x)$ можна одержати почленним диференціюванням.

22. Для функції $f(x)=\frac{1}{2}(\pi-x)$, $x\in[-\pi,\pi]$ і заданого $n\in N$ знайти тригонометричний многочлен вигляду $T_n(x)=\alpha_0+\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx\right)$, де α_k,β_k – дійсні, $x\in[-\pi,\pi]$, що мінімізує віддаль $\|f-T_n\|=\sqrt{(f-T_n,f-T_n)}$.

23. Довести, що збіжний на R ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos\pi x}{\sqrt{n}}$ не є рядом Фур'є для функції із $\mathrm{R}([-\pi,\pi])$.

24. Розкласти в комплексний ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}0, -\pi<x<0,\\ x, 0<x<\pi.\end{cases}$

25. Зобразити інтегралом Фур'є функції:

а) $f(x)=\begin{cases}1, 0<x<1,\\ 0.5, x=0, x=1,\\ 0, x<0, x>1.\end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, 0<x<\infty,\\ -e^{x}, -\infty<x<0,\\ 0, x=0.\end{cases}$

26. Знайти перетворення Фур'є для функцій:

а) $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\ge 0,\\ 0, x<0.\end{cases}$

б) $f(x)=e^{-\lambda|x|}$, $\lambda>0$,

в) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, $x\in R$,

г) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, $x\in R, a\in R, \sigma>0$.

27. Довести рівності:

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{\cos\lambda x}{a^2+\lambda^2}d\lambda=\frac{\pi}{2a}e^{-|a|x}$, $x\in\mathrm{R}, a>0$,

б) $\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda}\cos\lambda x d\lambda=\frac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathrm{R}$.

Література

1. Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Федорова Л. Б. Ряди. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Практикум. – К.: НТУУ «КПІ», 2013. – 160 с.
2. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. – М.: Наука, 1967. – 608с.
3. Воробьев Н.Н. Теория рядов. – М.: Наука, 1979. – 408с.
4. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1979. – 527 с.
5. Денисьєвський М. О., Чайковський А. В. Збірник задач з математичного аналізу. Функції кількох змінних. – К.: ВПЦ «Київський університет», 2012. – 276 с.
6. Дороговцев А. Я. Математичний аналіз. Підручник. У двох частинах: Частина 2. – К.: Либідь, 1994. – 304 с.
7. Дороговцев А. Я. Математический анализ. Сборник задач. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1987. – 408 с.
8. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз: Підручник. – К.: Знання, 2008. – 421с.
9. Зорич В. А. Математический анализ: В 2-х частях. – Москва: Наука, 1981. – Ч. 1. – 544 с.; 1984. – Ч. 2. – 495 с.
10. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. 2. – М.: Высшая школа, 1973. – 470 с.
11. Ляшко І. І., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Калайда А. Ф. Математичний аналіз: У 3-х ч. – Київ: Вища школа, 1983. – Ч. 1. – 495 с.; Ч. 2. – 551 с.
12. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. и др. Справочное пособие по математическому анализу: В 2-х ч. – Київ: Вища школа, 1978. – Ч. 1. – 696 с.; Ч. 2. – 736 с.
13. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ в примерах: В 2-х ч. – Київ: Вища школа, 1974. – Ч. 1. – 680 с.; Ч. 2. – 670 с.
14. Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г., Головач Г. П. Математический анализ: ряды, функции векторного аргумента. Справочное пособие по высшей математике. Т. 2. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 224 с.
15. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.2. – М.: Наука, 1964. – 464с.
16. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т 3. – М.: Наука, 1970. – 656 с.
17. Шкіль М. І. Математичний аналіз: У 2-х частинах. – Київ: Вища школа, 1978. – Ч. 1. – 384 с.; 1981. – Ч. 2. – 456 с.