Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України
Державний вищий навчальний заклад
"Ужгородський національний університет"
Математичний факультет
Кафедра системного аналізу і теорії оптимізації

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**
до практичних занять з курсів
«МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ» та «ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ І МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ»

Частина 1

# ЗАДАЧІ КЛАСИЧНОГО ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. МЕТОД ВАРІАЦІЙ ДЛЯ ЗАДАЧ З НЕРУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ

Ужгород – 2015

Гренджа В.І., Брила А.Ю., Ломага М.М. Методичні вказівки до практичних занять з курсів «Методи оптимізації» та «Варіаційне числення і методи оптимізації». Ч. І. Задачі класичного варіаційного числення. Метод варіацій для задач з нерухомими границями.– Ужгород, 2015 .– 55с.

Методичні вказівки призначені для проведення практичних занять з курсів "Методи оптимізації" і "Варіаційне числення і методи оптимізації" для студентів денної форми навчання спеціальностей "Прикладна математика" і "Математика" відповідно. По кожній темі коротко наводяться основні теоретичні відомості; розв'язуються класичні задачі варіаційного числення з закріпленими кінцями (задача Лагранжа, Больца, ізопериметрична задача тощо); пропонуються задачі та питання для самоконтролю.

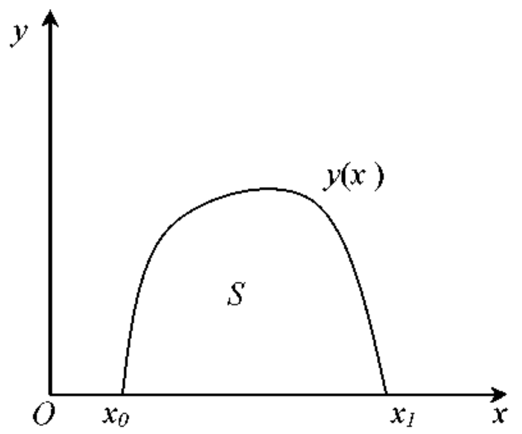
**Рецензенти:** к. ф.-м. н., доц. Червак О.О.,
к. ф.-м. н., доц. Мулеса О.Ю.

Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет" від 25 листопада 2015 року, протокол № 4.

# 1 ЗАДАЧІ, ЩО СПРИЧИНИЛИ ПОЯВУ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

В розвитку варіаційного числення важливу роль відіграли наступні класичні задачі.

**Приклад 1** (задача Дідони). В IX ст. до н. е. фінікійська царівна Дідона і декілька її супутників, рятуючись від переслідування тірської знаті, втекли з м. Тір і висадилися на африканському березі Середземного моря. Вирішивши поселиться саме тут, Дідона попросила місцевих жителів віддати в її розпорядження ділянку землі, яку можна охопити шкурою бика. Простодушний правитель тих місць не зрозумів всієї глибини задуму і погодився віддати утікачам ділянку землі, яка, за його розумінням, повинна була за площею бути рівною площі розпрямленої шкури бика. Дідона ж після укладення угоди розрізала шкуру бика на тонкі смужки, зв'язала їх у довгий ремінь і обмежила ним досить значну територію на березі моря. Так було закладено місто Карфаген.




Формальна постановка цієї задачі наступна: знайти таку криву заданої довжини $L$ ($L$ у згаданій вище історії – довжина ременя з шкури бика), яка обмежує на площині фігуру найбільшої площі.

Рахуючи берег моря прямолінійним, прямокутну систему координат $Oxy$ розташовуємо так, щоб вісь $Ox$ співпадала з берегом моря. Припустимо, що прямолінійна (морська) частина межі ділянки землі − відрізок $[x_0, x_1]$ осі $Ox$, а криволінійна частина є графіком гладкої (тобто неперервно диференційовної) функції $y = y(x)$, визначеної на відрізку $[x_0, x_1]$. При цьому

$$y(x_0) = y(x_1) = 0. \tag{1}$$

При зроблених припущеннях довжина $L$ криволінійної частини межі обчислюється за формулою

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x)}dx, \tag{2}$$

а площа $S$ земельної ділянки − за формулою

$$S = \int_{x_0}^{x_1} y(x)dx. \tag{3}$$

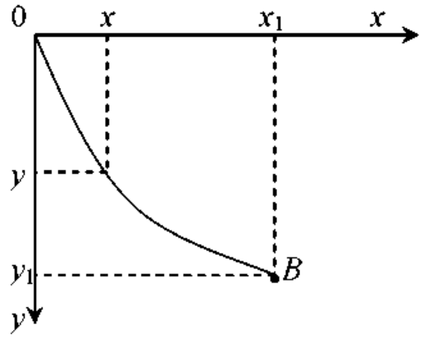
Отже, потрібно знайти таку гладку функцію $y = y(x)$, яка задовольняє умовам (1) і (2) ($L$ − фіксовано) і забезпечує інтегралу (3) максимальне значення.

Задачі подібного роду ставили і вирішували (своїми, оригінальними способами) ще Арістотель і Архімед. Так, Архімед встановив чудову властивість кола: із всіх замкнених кривих, довжини яких рівні деякому заданому значенню, коло охоплює плоску фігуру найбільшої площі.

Не дивлячись на наявність стародавніх прецедентів, моментом народження варіаційного числення як математичної дисципліни прийнято вважати 1696 рік, коли І.Бернуллі запропонував задачу:

**Приклад 2** (задача про брахістохрону). У вертикальній площині через дві задані точки $O$ і $B$, що не лежать на одній вертикалі, провести криву (тобто знайти її рівняння), рухаючись по якій матеріальна точка під дією сили тяжіння переміститься з верхньої точки в нижню за найкоротший час.

Припустимо, що початкова швидкість падаючої точки рівна нулю, а сили тертя відсутні. До моменту, коли відстань від початкового положення точки $O$ по вертикальній осі $Oy$ прямокутної системи координат $Oxy$ буде рівна $y$, точка втратить потенційну енергію, яка зменшиться на $mgy$ ($m$ − маса точки, $g$ − прискорення вільного падіння). Кінетична енергія при цьому збільшиться на $\frac{mv^2}{2}$ ($v$ − швидкість точки). За законом збереження енергії (з урахуванням відсутності тертя) маємо $\frac{mv^2}{2} = mgy$, звідки $v = \sqrt{2gy}$.




З припущення, що траєкторією руху є крива $y = y(x)$, причому $y(x)$ − гладка функція, визначена на відрізку $[0, x_1]$, отримуємо $v = \frac{ds}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}dx}{dt}$, де $ds$ − диференціал довжини дуги кривої, $t$ − час. Тому $\sqrt{2gy(x)}dt = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$ і приходимо до рівняння $dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{2gy(x)}}dx$.

З цього рівняння знаходимо час, необхідний для переходу з точки $O$ у точку $B$:

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}} dx. \tag{4}$$

Відомі координати початкової і кінцевої точок дають граничні умови для функції $y(x)$:

$$y(0) = 0, \; y(x_1) = y_1.$$

Таким чином, потрібно знайти гладку функцію $y(x)$, для якої час $T$ найменший за заданих краєвих умов.

**Приклад 3** (задача про геодезичні лінії). На поверхні, заданій в прямокутній системі координат $Oxyz$ рівнянням, потрібно провести криву, що сполучає дві точки А і В цієї поверхні найменшої довжини. Найменші по довжині лінії між двома точками деякої поверхні називаються геодезичними лініями цієї поверхні. Наприклад, геодезичними лініями площини є прямі, геодезичними лініями на сфері — дуги великого круга.

Припустимо, що поверхня $\varphi(x, y, z) = 0$ є гладкою, а шукана крива може бути задана параметричними рівняннями $y = y(x)$, $z = z(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ за допомогою гладких функцій $y(x)$ і $z(x)$. Тоді довжина кривої $L$ рівна:

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2(x) + z'^2(x)} dx. \tag{5}$$

Задача звелася до визначення таких гладких на відрізку $[x_0, x_1]$ функцій $y = y(x)$ і $z = z(x)$, що $\varphi(x, y(x), z(x)) \equiv 0$, $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$, $y(x_1) = y_1$, $z(x_1) = z_1$, а інтеграл (5) приймав найменше значення.

Оригінальність сформульованих задач в тому, що невідомими в них є функції, для яких значення інтеграла буде екстремальним. Першим, хто зробив спробу узагальнення всіх цих задач, був Л.Ейлер, який в 1744 р. опублікував мемуари по варіаційному численню. Проте Л.Ейлеру не вдалося аналітично обґрунтувати варіаційне числення. Це було зроблено в 1760 р. французьким математиком Г.Лагранжем. Подальші дослідження вже в XIX сторіччі рухалися у напрямку, наміченому Л.Ейлером, Г.Лагранжем і були завершені роботами К.Вейерштрасса і Д.Гільберта. В кінці XIX і початку XX ст. швейцарський фізик і математик В.Рітц відкрив, користуючись роботами Дж.Релея, новий розділ варіаційного числення, так звані „прямі методи". У цьому напрямі багато зробив американський математик Р.Курант, який до приходу влади Гітлера працював в Німеччині, радянські математики Л.В.Канторович, Б.Г.Гальоркін, І.Г.Бубнов, В.І.Крилов. Останній і обґрунтував метод Рітца. В кінці XIX ст. жінка-математик Н.Гернет, професор вищих жіночих курсів в Петербурзі, опублікувала роботу по варіаційному численню, де нею вирішувалися некласичні задачі варіаційного числення, але робота не була помічена, тому що значно випередила свій час. Тільки у наш час подібного роду задачі знайшли широке застосування в оптимальному керуванні.

# 2 НАЙПРОСТІША ЗАДАЧА ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ (ЗАДАЧА ЛАГРАНЖА НА МНОЖИНІ ФУНКЦІЙ З ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ)

## 2.1 Загальна постановка задачі і основні визначення

***Варіаційними задачами*** називаються задачі пошуку екстремуму функціоналів, тобто величин, чисельне значення яких визначається вибором однієї або декількох функцій із заданого класу і які задовольняють певним додатковим умовам.

Наведені вище задачі є типовими задачами варіаційного числення.

**Означення 1.** *Змінна величина $J$ називається **функціоналом**, залежним від функції $x(t)$ (позначається $J = J(x(t))$), якщо будь-якій функції $x(t)$ з деякого класу функцій $K$ відповідає значення $J$.*

*Клас функцій $K$, на яких визначений функціонал, називається **областю визначення функціоналу**.*

Функціонал є узагальненням поняття функції. Функція однієї змінної ставить у відповідність кожному числу $t$ єдине число $x$. Функція багатьох змінних ставить у відповідність сукупності змінних $t_1$, …, $t_n$ число $x$. Функціонал ставить у відповідність функції $x = x(t)$ (нескінченному числу її значень) число $J$.

Розглянемо функціональний простір $\mathbf{C}^k([t_0,t_1],\mathbf{R})$ (простір неперервно диференційованих на проміжку $[t_0,t_1]$ скалярних функцій разом з своїми $k$- першими похідними). Поняття норми функції напряму пов'язано з областю визначення функціоналу. Якщо область визначення функції є підмножиною простору $\mathbf{C}^k([t_0,t_1],\mathbf{R})$, то $\|x(\cdot)\| = \sum\limits_{i=0}^{k} \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} \left\|x^{(i)}(t)\right\|$, де через $x(\cdot)$ позначатимемо довільний елемент з цього простору. Надалі розглядатимемо функціональні простори $\mathbf{C}^0([t_0,t_1],\mathbf{R})$, $\mathbf{C}^1([t_0,t_1],\mathbf{R})$ та наступні норми $\|x(\cdot)\|_0 = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]} |x(t)|$, $\|x(\cdot)\|_1 = \max\{\|x(\cdot)\|_0, \|x'(\cdot)\|_0\}$.

**Означення 2.** *ε **- околом порядку** $k$ **кривої** $\hat{x}(t)$ на проміжку $[t_0,t_1]$ називають множину всіх кривих $x(t)$, для яких всюди на цьому проміжку виконуються нерівності*

$$\left|x(t)-\hat{x}(t)\right| \le \varepsilon,\ \left|x'(t)-\hat{x}'(t)\right| \le \varepsilon,\ \ldots,\ \left|x^{(k)}(t)-\hat{x}^{(k)}(t)\right| \le \varepsilon.$$

Число ε називають ***відстанню порядку** $k$ **між кривими** $x(t)$ **і** $\hat{x}(t)$*.

**Означення 3.** *Криві називають **близькими в розумінні** $k$**- го порядку близькості** $(k = 0,1,\ldots)$, якщо модулі різниць $x(t)-\hat{x}(t)$, $x'(t)-\hat{x}'(t),\ldots,$ $x^{(k)}(t)-\hat{x}^{(k)}(t)$ малі для всіх значень $t$, для яких визначені функції $x(t)$ і $\hat{x}(t)$.*

На рис.1 зображені криві, які близькі в розумінні близькості нульового порядку, але не близькі в розумінні близькості першого порядку, так як ординати у них близькі, а напрямки дотичних не близькі. На рис.2 зображені криві, які близькі в розумінні близькості першого порядку.

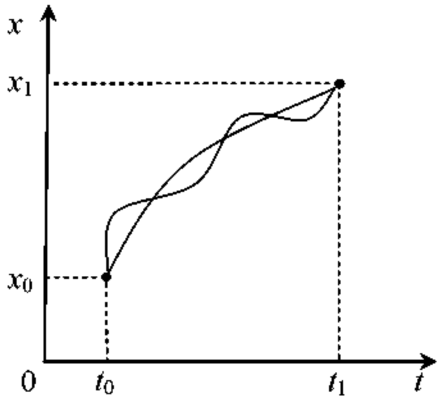



Рис.1

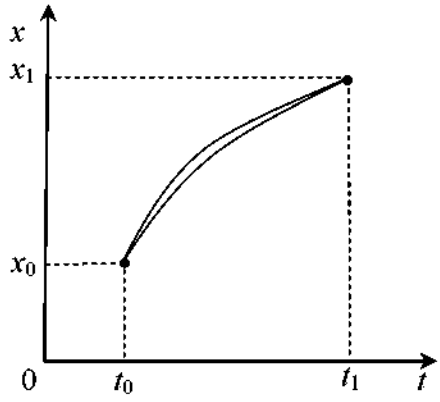



Рис.2

З означення 3 випливає, що крива, яка належить $\varepsilon$ - околу $k$ - го порядку, належить $\varepsilon$ - околу будь-якого меншого порядку.

Основна задача варіаційного числення полягає у відшуканні такої допустимої кривої (чи поверхні) $\hat{x}(t)$, для якої значення $J\left(\hat{x}(t)\right)$ заданого функціоналу є найменшим або найбільшим по відношенню до його значень $J(x(t))$ на всіх близьких до $\hat{x}(t)$ допустимих кривих $x(t)$ із заданого класу функцій. Кривих (поверхонь) із цією властивістю може бути декілька; вони називаються екстремалями функціоналу $J$.

**Означення 4**. *Функціонал $J(x(t))$, визначений в класі $K$ допустимих кривих $x(t)$, досягає на кривій $\hat{x}(t)$* ***глобального мінімуму (максимуму)****, якщо $J\left(\hat{x}(t)\right) \le J(x(t))$ ($J\left(\hat{x}(t)\right) \ge J(x(t))$) для всіх допустимих функцій $x(t) \in K$.*

Поняття локального мінімуму (максимуму) пов'язано з дослідженням поведінки функціоналу на близьких кривих. Розрізняють сильний і слабкий локальний мінімум (максимум).

**Означення 5**. *Функціонал $J(x(t))$ досягає на допустимій кривій $\hat{x}(t)$* ***сильного локального мінімуму (сильного локального максимуму)****, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для всіх допустимих функцій $x(t)$, які задовольняють умову $\left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|_0 = \max\limits_{t_0 \le t \le t_1} \left| x(t) - \hat{x}(t) \right| \le \varepsilon$, тобто в $\varepsilon$- околі нульового порядку кривої $\hat{x}(t)$, виконується нерівність $J\left(\hat{x}(t)\right) \le J(x(t))$ ($J\left(\hat{x}(t)\right) \ge J(x(t))$).*

**Означення 6**. *Функціонал $J(x(t))$ досягає на допустимій кривій $\hat{x}(t)$* ***слабкого локального мінімуму (слабкого локального максимуму)****, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для всіх допустимих функцій $x(t)$, які задовольняють умову*

$$\left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|_1 = \max\left( \max_{t_0 \le t \le t_1} \left| x(t) - \hat{x}(t) \right|, \max_{t_0 \le t \le t_1} \left| x'(t) - \hat{x}'(t) \right| \right) < \varepsilon \Leftrightarrow \left| x(t) - \hat{x}(t) \right| < \varepsilon, \left| x'(t) - \hat{x}'(t) \right| < \varepsilon$$

$\forall t \in [t_0, t_1]$, *тобто в* $\varepsilon$- *околі першого порядку кривої* $\hat{x}(t)$, *виконується нерівність* $J\left(\hat{x}(t)\right) \le J(x(t))$ ($J\left(\hat{x}(t)\right) \ge J(x(t))$).

Локальні мінімуми і максимуми функціоналу називаються його локальними екстремумами.

Зауваження. Будь-який сильний екстремум функціоналу є слабким. Обернене твердження невірно, оскільки сильний екстремум є екстремумом по відношенню до більш широкого класу кривих.

### 2.2 Метод варіацій. Необхідні умови оптимальності в термінах варіацій

Метод варіацій є основним методом розв'язання задач варіаційного числення, запропонований Лагранжем у 1760 році.

**Означення** 7. *Нехай* $\hat{x}(t)$ – *допустима крива, на якій функціонал досягає екстремуму, а* $x(t)$ – *довільна допустима крива. Різниця* $\delta x(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ *називається* ***приростом або варіацією аргументу*** $\hat{x}(t)$ *функціоналу* $J(x(t))$.

Варіація $\delta x(t)$ є функцією аргументу $t$ і належить тому ж функціональному простору, що й $x(t)$, тобто $\delta x(t) \in \mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R})$. З означення варіації аргументу випливає: $\delta x(t_0) = \delta x(t_1) = 0$.

Часто функцію $\delta x(t)$ задають у вигляді $\delta x(t) = \alpha \cdot h(t)$, де $h(t) \in \mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R})$, $h(t_0) = h(t_1) = 0$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Підпростір у просторі $\mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R})$ функцій, що приймають на кінцях проміжку $[t_0, t_1]$ нульове значення, позначається $\mathbf{H}_0$ або $\mathbf{C}_0^1([t_0, t_1], \mathbf{R})$.

Використовуючи варіацію $\delta x(t)$, довільну допустиму криву $x(t)$ можна подати у вигляді

$$x(t) = \hat{x}(t) + \delta x(t),$$

або

$$x(t) = \hat{x}(t) + \alpha \delta x(t), \ \alpha \in \mathbf{R},$$

або

$$x(t) = \hat{x}(t) + \alpha h(t), \ h(t) \in \mathbf{H}_0, \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

**Означення 8**. ***Приростом функціоналу*** $\Delta J$ *називається різниця*

$$\Delta J = J(x(t)) - J\left(\hat{x}(t)\right) = J\left(\hat{x}(t) + \alpha h(t)\right) - J\left(\hat{x}(t)\right), \ h(t) \in \mathbf{H}_0, \ \alpha \in \mathbf{R}.$$

Зафіксуємо аргумент $x(t)$ функціоналу $J(x(t))$, задамо і зафіксуємо деяку варіацію $h(t)$ аргументу $x(t)$, $h(t) \in \mathbf{H}_0$.

**Означення 9**. *Якщо приріст функціоналу* $\Delta J$ *можна подати у вигляді*

$$\Delta J = \alpha \delta J\left(\hat{x}(t), h(t)\right) + \frac{\alpha^2}{2} \delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right) + o(\alpha^2), \ \forall\, h(t) \in \mathbf{H}_0, \ \alpha \in \mathbf{R},$$

*то головна лінійна частина* $\delta J\left(\hat{x}(t), h(t)\right)$ *приросту по відношенню до* $h(t)$ *називається* ***першою варіацією функціоналу****, а* $\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right)$ – ***другою варіацією функціоналу.***

Можна дати інше означення першої і другої варіацій функціоналу. Розглянемо сім'ю кривих $x(t,\alpha) = \hat{x}(t) + \alpha h(t)$, $\forall\, h(t) \in \mathbf{H}_0$, $\alpha \in \mathbf{R}$. На кривих $x(t,\alpha)$ функціонал $J(x(t,\alpha))$ перетворюється в функцію $J(\alpha)$ залежну від параметру $\alpha$. Нехай існують похідні $\dfrac{dJ(\alpha)}{d\alpha}$ і $\dfrac{d^2 J(\alpha)}{d\alpha^2}$.

<u>**Означення**</u> **10**. ***Першою варіацією*** $\delta J\left(\hat{x}(t), h(t)\right)$ *функціоналу* $J(x(t))$ *називається похідна* $\dfrac{dJ(\alpha)}{d\alpha}$ *при* $\alpha = 0$:

$$\delta J\left(\hat{x}(t), h(t)\right) = \frac{d}{d\alpha} J\left(\hat{x}(t) + \alpha h(t)\right)\Big\|_{\alpha=0},\ \forall\, h(t) \in \mathbf{H}_0,\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

<u>**Означення**</u> **11**. ***Другою варіацією*** $\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right)$ *функціоналу* $J(x(t))$ *називається похідна* $\dfrac{d^2 J(\alpha)}{d\alpha^2}$ *при* $\alpha = 0$:

$$\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right) = \frac{d^2}{d\alpha^2} J\left(\hat{x}(t) + \alpha h(t)\right)\Big\|_{\alpha=0},\ \forall\, h(t) \in \mathbf{H}_0,\ \alpha \in \mathbf{R}.$$

При дослідженні функціоналів варіація відіграє таку ж роль, як і диференціал при дослідженні функцій.

<u>Зауваження</u>. Друге означення варіації функціоналу ширше за перше в тому розумінні, що існують функціонали, з приросту яких не можна виділити головної лінійної частини, але варіація в розумінні другого означення існує. Друга варіація функціоналу (якщо вона існує) визначається однозначно.

**Приклад 4.** Знайти першу варіацію функціоналу $J(x(t)) = \int\limits_a^b x^2(t)dt$.

**Розв'язання**. *Перший спосіб.* Запишемо приріст функціоналу $\Delta J = \int\limits_a^b (x(t) + \delta x(t))^2 dt - \int\limits_a^b x^2(t)dt = \int\limits_a^b 2x(t)\delta x(t)dt + \int\limits_a^b (\delta x(t))^2 dt$. Врахувавши оцінку

$$\int\limits_a^b (\delta x(t))^2 dt \le \int\limits_a^b \left(\max_{t\in[a,b]}|\delta x(t)|\right)^2 dt = \left(\max_{t\in[a,b]}|\delta x(t)|\right)^2 (b-a) = (b-a)\|\delta x(t)\|^2 = (b-a)\|\delta x(t)\|\cdot\|\delta x(t)\|,$$

$\Delta J$ можна представити у вигляді $\Delta J = \underbrace{\int\limits_a^b 2x(t)\delta x(t)dt}_{\delta J} + \underbrace{(b-a)\|\delta x(t)\|}_{\beta}\|\delta x(t)\|$, де $\beta \to 0$ при

$\|\delta x(t)\| \to 0$. Звідси отримуємо вираз для першої варіації функціоналу: $\delta J(x(t), \delta x(t)) = \int\limits_a^b 2x(t)\delta x(t)dt$.

*Другий спосіб.* Використаємо формулу $\delta J(x(t), \delta x(t)) = \frac{d}{d\alpha} J(x(t) + \alpha\delta x(t))\Big|_{\alpha=0}$. Для нашого випадку $J(x(t) + \alpha\delta x(t)) = \int\limits_a^b (x(t) + \alpha\delta x(t))^2 dt$, $\delta J(x(t), \delta x(t)) =$

$$= \frac{d}{d\alpha} J(x(t) + \alpha\delta x(t))\Big|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b 2(x(t) + \alpha\delta x(t))\delta x(t)dt\Big|_{\alpha=0} = \int\limits_a^b 2x(t)\delta x(t)dt.$$

Необхідні умови локального екстремуму однакові для сильного і слабкого локальних екстремумів і визначаються наступною теоремою.

**Теорема 1**(необхідна умова оптимальності в термінах варіацій). *Якщо функціонал $J(x(t))$ досягає слабкого локального мінімуму на допустимій фіксованій кривій $\hat{x}(t)$ і на $\hat{x}(t)$ існують $\delta J\left(\hat{x}(t), h(t)\right)$, $\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right)$ $\forall\, h(t) \in \mathbf{H}_0$, то справедливі умови $\delta J\left(\hat{x}(t), h(t)\right) = 0$ і $\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right) \geq 0$ $\forall\, h(t) \in \mathbf{H}_0$.*

Достатні умови сильного локального екстремуму будуть також достатніми умовами слабкого екстремуму.

**Лема 1** (лема Лагранжа) [4]: *Нехай $a(t)$ неперервна на відрізку $[t_0, t_1]$ функція. Якщо $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)h(t)dt = 0$ для кожної неперервно диференційованої функції $h(t)$ з нульовими граничними умовами $h(t_0) = h(t_1) = 0$, то $a(t) = 0$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.*

**Лема 2** (лема Дюбуа - Реймона) [4]: *Нехай $a(t)$ неперервна на відрізку $[t_0, t_1]$ функція. Якщо для будь-якої неперервної на відрізку $[t_0, t_1]$ функції $\eta(t)$, що дорівнює нулю в середньому, тобто $\int\limits_{t_0}^{t_1} \eta(t)dt = 0$, виконується рівність $\int\limits_{t_0}^{t_1} a(t)\eta(t)dt = 0$, то $a(t)$ стала на $[t_0, t_1]$, тобто $a(t) = C = const$ для всіх $t \in [t_0, t_1]$.*

Леми 1 і 2 ще називають основними лемами варіаційного числення.

### 2.3 Необхідні умови екстремуму першого порядку для задачі Лагранжа з закріпленими кінцями

Найпростішою задачею варіаційного числення називається задача визначення екстремуму функціоналу

$$J(x(t)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt \to extr, \tag{6}$$

на множині скалярних функцій з простору $\mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R})$, що задовольняють граничним умовам

$$x(t_0) = x_0,\; x(t_1) = x_1. \tag{7}$$

Функція $L(t, x(t), x'(t))$ називається ***інтегрантом*** або ***Лагранжіаном*** задачі. Вважатимемо, що функція $L(t, x(t), x'(t))$ має неперервні частинні похідні по всім аргументам до другого порядку включно.

**Означення 12**. *Функції* $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *називаються* ***допустимими*** *в задачі* (6), (7) *якщо вони належать простору* $\mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R})$ *і задовольняють умовам* (7).

**Теорема 2** (про необхідну умову екстремуму в найпростішій задачі класичного варіаційного числення)[4]. *Нехай скалярна функція* $\hat{x}(t) \in \mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R})$ *– розв'язок задачі* (6), (7). *Тоді вона задовольняє рівняння*

$$L_x{}'(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} L_{x'}{}'(t, x(t), x'(t)) = 0. \qquad (8)$$

**Означення 13**. *Рівняння* (8) *називається* ***рівнянням Ейлера***.

**Означення 14**. *Допустима функція, що задовольняє рівняння Ейлера, називається* ***екстремаллю***.

В розгорнутій формі (8) має вигляд

$$L'_x(t, x(t), x'(t)) - L''_{x't}(t, x(t), x'(t)) - L''_{x'x}(t, x(t), x'(t)) \cdot x'(t) - L''_{x'x'}(t, x(t), x'(t)) \cdot x''(t) = 0.$$

Його загальний розв'язок $x = x(t, c_1, c_2)$ залежить від двох довільних сталих $c_1$ і $c_2$ та визначає двохпараметричну сім'ю екстремалей. Граничні умови дозволять знайти $c_1$, $c_2$ і, як наслідок, криву $\hat{x}(t)$, на якій може досягатися екстремум інтегрального функціоналу.

**Теорема 3** (Гільберта). *Нехай* $\hat{x} = \hat{x}(t)$ *є розв'язком рівняння Ейлера (8). Якщо функція* $L(t, x(t), x'(t))$ *має неперервні частинні похідні до другого порядку включно, то у всіх точках* $(t, x)$, *для яких* $L''_{x'x'}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right) \neq 0$, *функція* $\hat{x} = \hat{x}(t)$ *має неперервну другу похідну.*

**Означення 15**. *Будь-яка екстремаль* $\hat{x} = \hat{x}(t)$, *для якої виконується* $L''_{x'x'}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right) \neq 0$, *називається* ***неособливою***.

Всі неособливі екстремалі належать до класу $\mathbf{C}^2([t_0, t_1], \mathbf{R})$.

**Приклад 5.** Знайти допустимі екстремалі функціоналу

$$J(x(t)) = \int_0^{\pi} \left( (x'(t))^2 - (x(t))^2 \right) dt,$$

що задовольняють граничні умови $x(0) = 1$, $x(\pi) = -1$.

**Розв'язання**. Екстремалі функціоналу є розв'язками рівняння Ейлера. Надалі в прикладах використовуватимемо наступні позначення: $L(t) = L(t, x(t), x'(t))$, $L'_x(t) = L'_x(t, x(t), x'(t))$, $L'_{x'}(t) = L'_{x'}(t, x(t), x'(t))$.

В нашому випадку $L(t, x(t), x'(t)) = (x'(t))^2 - (x(t))^2$, $L'_x(t) = -2x(t)$, $L'_{x'}(t) = 2x'(t)$, $\frac{d}{dt} L'_{x'}(t) = 2x''(t)$. Рівняння Ейлера матиме вигляд

$$L'_x(t) - \frac{d}{dt} L'_{x'}(t) = 0 \Leftrightarrow x(t) + x''(t) = 0.$$

Ми отримали диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами, що має загальний розв'язок $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. З граничних умов знайдемо невідомі сталі:

$$\begin{matrix} x(0)=1 \\ x(\pi)=-1 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} c_1\cos 0+c_2\sin 0=1 \\ c_1\cos\pi+c_2\sin\pi=-1 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad c_1=1, c_2\in\mathbf{R}.$$

Отже, допустимими екстремалями є сім'я кривих $\hat{x}(t)=\cos t+c_2\sin t$, $c_2\in\mathbf{R}$.

У цьому прикладі рівняння Ейлера легко інтегрується, але це можливо не завжди.

### 2.4 Інтеграли рівняння Ейлера

Рівняння Ейлера загалом є диференціальним рівнянням другого порядку, тому знаходження його розв'язків є досить складною задачею, порівняно з розв'язанням диференціальних рівнянь першого порядку. У зв'язку з цим важливими є умови, що дають змогу понизити порядок рівняння чи аналітично його розв'язати.

Розглянемо деякі з них.

**Випадок 1**. Функція $L(t,x(t),x'(t))$ не залежить явно від $x(t)$: $L(t,x(t),x'(t))=L(t,x'(t))$. Рівняння (8) в цьому випадку матиме вигляд

$$-\frac{d}{dt}L'_{x'}(t,x'(t))=0,$$

звідки

$$L'_{x'}(t,x'(t))=c_1. \tag{9}$$

Відношення (9) називається першим інтегралом рівняння Ейлера або інтегралом імпульсу.

**Приклад 6.** Знайти допустимі екстремалі функціоналу

$$J(x(t))=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{1+(x'(t))^2}}{t}dt,$$

що задовольняють граничні умови $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$.

**Розв'язання.** Так як підінтегральна функція не залежить від $x(t)$ (перший випадок інтегровності), то рівняння Ейлера має перший інтеграл $\frac{x'(t)}{\sqrt{1+(x'(t))^2}\cdot t}=c$. Проінтегруємо отримане диференціальне рівняння шляхом введення параметру: $x'(t)=tgu$. Одержимо рівняння $\frac{tgu}{\sqrt{1+tg^2u}\cdot t}=c \Rightarrow \frac{\frac{\sin u}{\cos u}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 u}}\cdot t}=c \Rightarrow t=c_1\sin u$ ($c_1=\frac{1}{c}$). $x'(t)=\frac{dx}{dt}$, звідки отримаємо $\int dx=\int c_1\, tgu\cos u du \Rightarrow x(t)=-c_1\cos u+c_2$. Отже $\begin{cases} t=c_1\sin u, \\ x(t)=-c_1\cos u+c_2 \end{cases}$ – загальний параметричний розв'язок рівняння Ейлера. Виключивши параметр $u$ з нього, отримаємо рівняння кола $(x(t)-c_2)^2+t^2=c_1^2$.

**Випадок 2**. Функція $L(t,x(t),x'(t))$ не залежить явно від $t$ і $x(t)$: $L(t,x(t),x'(t))=L(x'(t))$. Рівняння Ейлера матиме вигляд $L''_{x'x'}(x'(t))\cdot x''(t)=0$.

Його загальним розв'язком є розв'язок рівняння $x''(t)=0$

$$x(t)=c_1t+c_2, \tag{10}$$

оскільки $L''_{x'x'}(x'(t))=0$ є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, що може мати один або декілька дійсних коренів виду $x'(t)=k_i$, звідки отримаємо однопараметричні сім'ї прямих $x(t)=k_it+c$, що містяться в двопараметричній сім'ї (10).

**Приклад 7.** Знайти допустимі екстремалі функціоналу

$$J(x(t))=\int_2^5\sqrt{1+(x'(t))^2}\,dt,$$

що задовольняють граничні умови $x(2)=3$, $x(5)=8$ .

**Розв'язання.** Інтегрант не залежить явно від $t$ і $x(t)$, отже маємо другий випадок інтегровності. Загальним розв'язком рівняння Ейлера є пряма $x(t)=c_1t+c_2$. Знайдемо з граничних умов сталі $c_1$ і $c_2$:

$\begin{cases}2c_1+c_2=3,\\5c_1+c_2=8\end{cases}\Rightarrow c_1=\frac{5}{3}, c_2=-\frac{1}{3}$. Отже, $\hat{x}(t)=\frac{5}{3}t-\frac{1}{3}$ – єдина допустима екстремаль функціоналу.

**Випадок 3**. Функція $L(t,x(t),x'(t))$ не залежить явно від $t$ і $x'(t)$ ($L(t,x(t),x'(t))=L(x(t))$), або не залежить явно від $x'(t)$ ($L(t,x(t),x'(t))=L(t,x(t))$). Задача (6), (7) в загальному випадку немає розв'язку, так як рівняння (8) не є диференціальним:

$$L'_x=0,$$

і не задовольняє граничним умовам. Однак якщо розв'язок рівняння $L'_x=0$ проходить через граничні точки $(t_0,x_0)$ і $(t_1,x_1)$, то екстремаль існує.

**Приклад 8**. Знайти допустимі екстремалі функціоналу

$$J(x(t))=\int_{t_0}^{t_1}(x(t))^2\,dt\to\min,$$

що задовольняють граничні умови $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$.

**Розв'язання.** Підінтегральна функція не залежить явно від $t$ і $x'(t)$ (третій випадок інтегровності). Складаємо рівняння Ейлера: $2x(t)=0$; $x(t)=0$ – його загальний розв'язок. Якщо $x_0=0$, $x_1=0$, то $\hat{x}(t)=0$ – розв'язок задачі; якщо ж граничні умови не виконуються, то в класі неперервних функцій задача розв'язку немає.

**Випадок 4**. Функція має вигляд $L(t,x(t),x'(t))=P(t,x(t))+Q(t,x(t))\cdot x'(t)$.

Шукаємо похідні функції $L(t,x(t),x'(t))$: $L'_x(t,x(t),x'(t))=\frac{\partial P(t,x(t))}{\partial x}+\frac{\partial Q(t,x(t))}{\partial x}\cdot x'(t)$, $L'_{x'}(t,x(t),x'(t))=Q(t,x(t))$, $\frac{d}{dt}L'_{x'}(t,x(t),x'(t))=\frac{\partial Q(t,x(t))}{\partial t}+\frac{\partial Q(t,x(t))}{\partial x}\cdot x'(t)$. Отже, рівняння Ейлера запишеться у вигляді

$$\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial t}=0. \tag{11}$$

Рівняння (11) не є диференціальним. Якщо його розв'язок задовольняє граничним умовам, то екстремаль існує. Якщо $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial t}$, то під знаком інтегралу (6) повний диференціал, отже величина інтегралу не залежить від шляху інтегрування, а варіаційна задача (6)-(7) не має змісту.

**Приклад 9**. Знайти допустимі екстремалі функціоналу

$$J(x(t))=\int_0^1\left((x(t))^2+t^2x'(t)\right)dt\to extr,$$

що задовольняють граничні умови $x(0)=0$, $x(1)=x_1$.

**Розв'язання.** Інтегрант є лінійною функцією від аргументу $x'(t)$, отже маємо четвертий випадок інтегровності. Складаємо рівняння Ейлера: $2x(t)-2t=0\ \Rightarrow\ x(t)=t$.

Перше граничне обмеження $x(0)=0$ задовольняється, але друга гранична умова задовольняється лише при $x_1=1$. Якщо ж $x_1 \neq 1$, то екстремалі, яка б задовольняла граничні умови, не існує.

**Приклад 10**. Знайти екстремаль функціоналу

$$J(x(t))=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^2(t)\cos t+2x(t)x'(t)\sin t\right)dt,$$

яка задовольняє граничні умови $x\left(\frac{\pi}{6}\right)=1,\ x\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$.

**Розв'язання.** В даному випадку $P(t,x(t))=x^2(t)\cos t$, $Q(t,x(t))=2x(t)\sin t$. Так як $\frac{\partial P(t.x)}{\partial x}=2x\cos t$, $\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}=2x\cos t$, то $\frac{\partial P(t,x)}{\partial x}=\frac{\partial Q(t,x)}{\partial t}$. Вираз під знаком інтеграла є повним диференціалом функції $U(t,x(t))=x^2(t)\sin t$. Значення функціоналу не залежить від шляху інтегрування, а варіаційна задача не має змісту. Значення функціоналу рівне

$$J(x(t))=\int_{\left(\frac{\pi}{6},1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},2\right)}x^2(t)\cos t dt+2x(t)\sin t dx=\int_{\left(\frac{\pi}{6},1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},2\right)}d\left(x^2(t)\sin t\right)dx=x^2(t)\sin t\Bigg|_{\left(\frac{\pi}{6},1\right)}^{\left(\frac{\pi}{2},2\right)}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

**Приклад 11.** Знайти екстремаль функціоналу $J(x(t))=\int_{t_0}^{t_1}(x(t)+tx'(t))dt$, яка задовольняє граничні умови $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x_1$.

**Розв'язання.** Рівняння Ейлера перетворюється в тотожність 1-1=0. Підінтегральний вираз є повним диференціалом функції $tx(t)$. Отже, $J(x(t))=\int_{t_0}^{t_1}(x(t)+tx'(t))dt=\int_{(t_0,x_0)}^{(t_1,x_1)}x(t)dt+tdx=\int_{(t_0,x_0)}^{(t_1,x_1)}d(tx(t))=t_1x_1-t_0x_0$ по якій кривій ми б не інтегрували. Задача не має розв'язку.

**Випадок 5**. Функція $L(t,x(t),x'(t))$ не залежить явно від $t$: $L(t,x(t),x'(t))=L(x(t),x'(t))$. Рівняння Ейлера матиме вигляд $L'_x(x(t),x'(t))-L''_{x'x}(x(t),x'(t))\cdot x'(t)-L''_{x'x'}(x(t),x'(t))\cdot x''(t)=0$. Помноживши обидві частини рівняння на $x'(t)$, перетворимо його ліву частину:

$$x'(t)\left(L'_x(x(t),x'(t))-L''_{x'x}(x(t),x'(t))\cdot x'(t)-L''_{x'x'}(x(t),x'(t))\cdot x''(t)\right)=$$

$$x'(t)L'_x(x(t),x'(t))+L'_{x'}(x(t),x'(t))x''(t)-L'_{x'}(x(t),x'(t))x''(t)-x'(t)L''_{x'x}(x(t),x'(t))\cdot x'(t)-$$

$$-x'(t)L''_{x'x'}(x(t),x'(t))\cdot x''(t)=\frac{d}{dt}\left[L(x(t),x'(t))-x'(t)\cdot L'_{x'}((x(t),x'(t)))\right].$$

Отже, в цьому випадку рівняння Ейлера запишеться у вигляді $\frac{d}{dt}\left[L(x(t),x'(t))-x'(t)\cdot L'_{x'}((x(t),x'(t)))\right]=0$ і матимемо перший інтеграл $L(x(t),x'(t))-x'(t)\cdot L'_{x'}((x(t),x'(t)))=c_1$, який називають ще інтегралом енергії.

Інтегрується рівняння або шляхом розділення змінних, або шляхом введення параметру.

**Приклад 12** (задача про брахістохрону).

$$J(x(t)) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{t_1} \frac{\sqrt{1+(x'(t))^2}}{\sqrt{x(t)}} dt \to \min ,$$

$$x(0) = 0 ,\ x(t_1) = x_1 .$$

**Розв'язання.** Запишемо перший інтеграл рівняння Ейлера:

$$\frac{\sqrt{1+(x'(t))^2}}{\sqrt{x(t)}} - \frac{(x'(t))^2}{\sqrt{x(t)}\sqrt{1+(x'(t))^2}} = c \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x(t)}\sqrt{1+(x'(t))^2}} = c \Rightarrow \left(1+(x'(t))^2\right)x(t) = c_1 ,$$

де $c_1 = \frac{1}{c^2}$. Виразимо $x(t)$ з останньої рівності: $x(t) = \frac{c_1}{1+(x'(t))^2}$.

Введемо параметр $u$, покладаючи $x'(t) = ctgu$, тоді одержимо $x = \frac{c_1}{1+(ctgu)^2} = c_1 \sin^2 u = c_1\left(\frac{1-\cos 2u}{2}\right)$;

$$dt = \frac{dx}{x'(t)} = \frac{2c_1 \sin u \cos u du}{ctgu} = 2c_1 \sin^2 u du = c_1(1-\cos 2u)du \Rightarrow t = \frac{c_1}{2}(2u - \sin 2u) + c_2 .$$

Отже, в параметричній формі рівняння шуканої кривої має вигляд:

$$\begin{cases} t = \frac{c_1}{2}(2u - \sin 2u) + c_2, \\ x = \frac{c_1}{2}(1-\cos 2u). \end{cases}$$

Якщо перетворити параметр підстановкою $v \overset{def}{=} 2u$ і прийняти до уваги, що крива проходить через точку $(0,0)$ (тобто $c_2 = 0$), то ми одержимо рівняння сім'ї циклоїд в параметричній формі $\begin{cases} t = \tilde{c}(v - \sin v) \\ x = \tilde{c}(1-\cos v) \end{cases}$, де $\tilde{c} = \frac{c_1}{2}$ – радіус круга, що котиться. Константа $\tilde{c}$ визначається з умови проходження кривої через точку $(t_1, x_1)$. Отже, брахістохрона є дугою циклоїди.

**Приклад 13.** Знайти екстремаль функціоналу

$$J(x(t)) = \int_0^2 \left((x'(t))^2 - 4x'(t)e^{2t} + \sin^2 t\right)dt ,$$

яка задовольняє граничні умови $x(0) = 1$, $x(2) = -2$.

**Розв'язання**. Рівняння Ейлера має перший інтеграл $x'(t) = \frac{c_1}{2} + 2e^{2t}$. Інтегруючи, отримаємо $x(t) = \frac{c_1}{2}t + e^{2t} + c_2$.

Знайдемо $c_1$ і $c_2$ із граничних умов:

$$\begin{cases} 1 + c_2 = 1, \\ c_1 + e^4 + c_2 = -2. \end{cases}$$

Звідси $c_1 = -2 - e^4$, $c_2 = 0$. В результаті отримаємо екстремаль $\hat{x}(t) = e^{2t} - \frac{(2+e^4)t}{2} + 1.$

<u>Зауваження</u>. Екстремальну криву можна шукати або розв'язуючи диференціальне рівняння другого порядку $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = 0$ або за допомогою перших інтегралів $\frac{\partial L(t,x')}{\partial x'} = C_1$ у випадку 1 та $L - x'\frac{\partial L}{\partial x'} = C_1$ у випадку 5 (якщо вони існують), тобто

інтегруючи відповідне диференціальне рівняння першого порядку. Вибір того чи іншого способу визначається міркуваннями простоти та зручності обчислень.

**2.5 Інваріантність рівняння Ейлера**

Якщо функціонал

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t))dt$$

перетворити заміною незалежної змінної або одночасною заміною шуканої функції і незалежної змінної, то екстремалі функціоналу як і раніше знаходяться з рівняння Ейлера, складеного для перетвореного підінтегрального виразу. В цьому і полягає інваріантність рівняння Ейлера.

Нехай $t = t(u,v)$, $x = x(u,v)$, причому $\begin{vmatrix} t_u & t_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} \neq 0$. Тоді

$$\int L(t, x(t), x'(t))dt = \int L\left(t(u,v), x(u,v), \frac{x_u + x_v v_u'}{t_u + t_v v_u'}\right)(t_u + t_v v_u')du = \int W(u, v, v_u')du$$

і екстремалі початкового функціоналу визначаються з рівняння Ейлера для функціоналу $\int W(u, v, v_u')du$:

$$W_v' - \frac{d}{du}W_{v'}' = 0.$$

**Приклад 14**. Знайти екстремалі функціоналу

$$J(r) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi, \text{ де } r = r(\varphi).$$

**Розв'язання.** Рівняння Ейлера для цього функціоналу

$$\frac{r}{\sqrt{r^2 + r'^2}} - \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}}\right) = 0.$$

Зробивши заміну змінних $t = r\cos\varphi$, $x = r\sin\varphi$ отримаємо $\sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi = \sqrt{1 + x'^2}\, dt$, $a = r(\varphi_0)\cos\varphi_0$, $b = r(\varphi_1)\cos\varphi_1$ і приходимо до функціоналу вигляду $J(x) = \int_a^b \sqrt{1 + x'^2}\, dt$. Рівняння Ейлера для останнього функціоналу $x'' = 0$ має загальний розв'язок $x = c_1 t + c_2$.

Таким чином, екстремалі початкового функціоналу задаються рівняннями $r\sin\varphi = c_1 r\cos\varphi + c_2$, де $c_1$ і $c_2$ – довільні сталі.

**2.6 Необхідні та достатні умови екстремуму другого порядку для найпростішої задачі варіаційного числення**

Для формулювання необхідних умов екстремуму другого порядку та достатніх умов екстремуму в задачі (6)-(7) використовуються наступні поняття.

1. ***Умова Якобі.***

Нехай $\hat{x}(t)$ − функція, на якій досягається локальний мінімум функціоналу $J(x(t))$ задачі (6)-(7), а $h(t) \in \mathbf{H}_0$ − допустима варіація аргументу функціоналу $J(x(t))$. Тоді

$$\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right) = \int_{t_0}^{t_1}\left[L''_{xx}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right)h^2(t) + 2L''_{xx'}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right)h(t)h'(t) + L''_{x'x'}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right)(h'(t))^2\right]dt.$$

Функціонал $\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right)$ внаслідок необхідної умови оптимальності в термінах варіацій набуває невід'ємних значень при всіх допустимих варіаціях $h(t) \in \mathbf{H}_0$:

$$\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right) \geq 0 \quad \forall\, h(t) \in \mathbf{H}_0.$$

<u>**Означення**</u> **16**. ***Спряженою задачею*** *в варіаційному численні називається задача мінімізації функціоналу* $\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h(t)\right)$ *в класі* $\mathbf{H}_0$:

$$\int_{t_0}^{t_1} W(t, h(t), h'(t))dt \to \min, \tag{12}$$

$$h(t_0) = h(t_1) = 0, \tag{13}$$

*де*

$$W(t, h(t, h'(t))) = \hat{L}''_{xx}(t)h^2(t) + 2\hat{L}''_{xx'}(t)h(t)h'(t) + \hat{L}''_{x'x'}(t)(h'(t))^2, \tag{14}$$

$$\hat{L}''_{xx}(t) = L''_{xx}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right),\ \hat{L}''_{xx'}(t) = L''_{xx'}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right),\ \hat{L}''_{x'x'}(t) = L''_{x'x'}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right).$$

Спряжена задача завжди має тривіальний розв'язок: $h_0(t) \equiv 0$, $\delta^2 J\left(\hat{x}(t), h_0(t)\right) = 0$.

<u>**Означення**</u> **17**. *Рівняння Ейлера*

$$W'_h - \frac{d}{dt}W'_{h'} = 0$$

*фунціоналу спряженої задачі на мінімум* (12)-(13) *називається* ***рівняння Якобі*** *основної задачі варіаційного числення.*

Враховуючи (14) рівняння Якобі при $h(t) \in \mathbf{C}^2[t_0, t_1]$ можна записати у вигляді

$$a(t)h''(t) + b(t)h'(t) + c(t)h(t) = 0, \tag{15}$$

де $a(t) = \hat{L}''_{xx}(t)$, $b(t) = \dfrac{d}{dt}\hat{L}''_{xx'}(t)$, $c(t) = \dfrac{d}{dt}\hat{L}''_{xx'}(t) - \hat{L}''_{xx}(t)$.

Рівняння Якобі (15) – це диференціальне рівняння другого порядку зі змінними коефіцієнтами. Щоб запобігти тривіального розв'язку цього рівняння, визначають такі розв'язки $h(t)$, які задовільняють ненульові початкові умови:

$$h(t_0) = 0,\ h'(t_0) = 1. \tag{16}$$

<u>**Означення**</u> **18**. *Точка* $t^*$ *називається* ***спряженою з точкою*** $t_0$, *якщо існує такий нетривіальний розв'язок* $h(t)$ *рівняння Якобі* (15) *з початковими умовами* (16), *що* $h(t_0) = h(t^*) = 0$.

<u>**Теорема**</u> **4**(про умову Якобі). *Нехай* $\hat{x}(t)$ – *допустима крива, на якій досягається локальний мінімум основної варіаційної задачі, тоді на інтервалі* $(t_0, t_1)$ *не існує точок, спряжених з* $t_0$.

Умова Якобі є умовою включення екстремалі $\hat{x}(t)$ в центральне поле екстремалей з центром в точці $T_0(t_0, x_0)$.

**Означення** **19**. ***Центральним полем екстремалей*** *називається сім'я екстремалей* $x = x(t,c)$, *які покривають деяку область і ніде не перетинаються в цій області, окрім центру.*

Передбачається, що при деякому значенні $c$ сім'я $x = x(t,c)$ містить екстремаль $\hat{x}(t)$, яка не має спільних точок з границями області за виключенням, можливо, точок $T_0(t_0, x_0)$ і $T_1(t_1, x_1)$.

**Означення 20**. *Кутовий коефіцієнт* $p(t,x)$ *дотичної до кривої сім'ї* $x = x(t,c)$, *що проходить через точку* $(t,x)$, *називається* ***нахилом поля*** *в цій точці.*

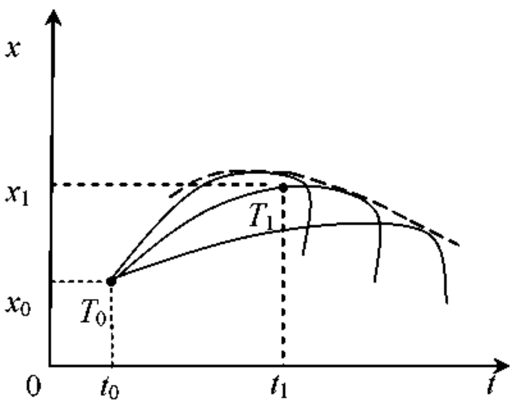



Рис.3

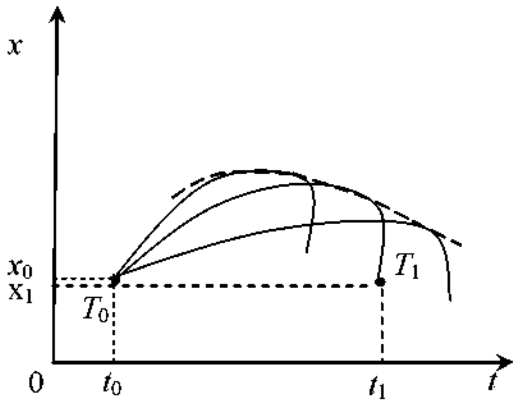



Рис.4

На рис. 3 показаний випадок, коли сім'я екстремалей, що включає екстремаль $T_0T_1$, утворює центральне поле, а на рис. 4 – сім'ю, що не створює центральне поле, оскільки екстремалі, близькі до $T_0T_1$, перетинаються.

2. **Означення 21**. *Функція виду*

$$E(t, x(t), x'(t), p) = L(t, x(t), x'(t)) - L(t, x(t), p) - (x'(t) - p)L'_p(t, x(t), p) \qquad (17)$$

*називається* ***функцією Вейерштрасса.***

3. **Означення 22**. *Умова* $L''_{x'x'} \geq 0$ $(L''_{x'x'} \leq 0)$ *називається* ***умовою Лежандра***, *а умова* $L''_{x'x'} > 0$ $(L''_{x'x'} < 0)$ – ***посиленою умовою Лежандра.*** При цьому передбачається, що функція $L(t, x(t), x'(t))$ тричі диференційовна по $x'(t)$ для будь-яких $x'(t)$.

**Теорема 5**(про умову Лежандра). *Нехай* $\hat{x}(t)$ – *допустима крива, на якій досягається локальний мінімум основної варіаційної задачі, тоді справедлива умова* $L''_{x'x'}\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t)\right) \geq 0$, *для* $\forall\, t \in [t_0, t_1]$.

**Теорема 6** (Достатні умови слабкого локального мінімуму (максимуму))[6]. *Якщо на екстремалі* $\hat{x}(t)$, *що задовольняє рівнянню Ейлера* (8) *і граничним умовам, виконуються:*

*а) умова Якобі;*

*б) або умова Вейерштрасса: функція Вейерштрасса* $E(t, x(t), x'(t), p) \geq 0$ ($E(t, x(t), x'(t), p) \leq 0$) *для точок* $(t, x(t))$, *близьких до точок на екстремалі* $\hat{x}(t)$, *і для* $x'(t)$, *близьких до $p$; або посилена умова Лежандра: $L''_{x'x'} > 0$ ($L''_{x'x'} < 0$) на екстремалі $\hat{x}(t)$, то на $\hat{x}(t)$ досягається слабкий локальний мінімум (максимум).*

Зауваження.

1. Окремо умова Якобі є необхідною умовою слабкого екстремуму другого порядку, тобто якщо розв'язок рівняння Якобі $u(t)$ перетворюється в нуль при якому-небудь значенні $t$ з інтервалу $(t_0, t_1)$, то на екстремалі $\hat{x}(t)$ слабкий екстремум не досягається.

2. Окремо умова Вейерштрасса також є необхідною, тобто якщо функція Вейерштрасса в точках екстремалі при $x'(t)$, близьких до $p$, має протилежні знаки, то слабкий екстремум не досягається.

3. Дослідження знаку функції Вейерштрасса часто зв'язане з певними труднощами. У випадку коли функція $L(t, x(t), x'(t))$ тричі диференційовна по $x'(t)$, умову Вейерштрасса можна замінити посиленою умовою Лежандра, що легко перевіряється.

**<u>Теорема</u>** 7 (Достатні умови сильного локального мінімуму (максимуму)). *Якщо на екстремалі $\hat{x}(t)$, що задовольняє рівняння Ейлера* (8) *і граничним умовам, виконуються:*

*а) умова Якобі;*

*б) або умова Вейерштрасса: функція Вейерштрасса $E(t, x(t), x'(t), p) \geq 0$ ($E(t, x(t), x'(t), p) \leq 0$) для точок $(t, x(t))$, близьких до точок на екстремалі $\hat{x}(t)$, і для довільних $x'(t)$; або умова Лежандра: $L''_{x'x'} > 0$ ($L''_{x'x'} < 0$) для точок $(t, x(t))$, близьких до точок на досліджуваній екстремалі $\hat{x}(t)$ і для довільних $x'(t)$, то на $\hat{x}(t)$ досягається сильний мінімум (максимум).*

Зауваження.

1. Умова Якобі окремо є необхідною умовою сильного локального екстремуму другого порядку, тобто якщо розв'язок рівняння Якобі $u(t)$ перетворюється в нуль при якому-небудь значенні $t$ з інтервалу $(t_0, t_1)$, то на екстремалі $\hat{x}(t)$ сильний локальний екстремум не досягається.

2. Умова Вейерштрасса окремо також є необхідною, тобто, якщо функція Вейерштрасса в точках екстремалі при деяких $x'(t)$ має протилежні знаки, сильний локальний екстремум не досягається.

3. У випадку коли функція $L(t, x(t), x'(t))$ тричі диференційована по $x'(t)$, умову Вейерштрасса можна замінити умовою Лежандра, що легко перевіряється. Якщо достатні умови виконуються, робиться висновок про досягнення сильного або слабкого локального мінімуму або максимуму. Якщо достатні умови не виконуються, враховуються п.1 і 2 зауважень до теорем 6 і 7. У випадку невиконання умов Лежандра висновок про відсутність екстремуму зробити не можна. Якщо достатні умови екстремуму виконуються, обчислюються значення функціоналу на знайденому розв'язку ( якщо це потрібно).

**Алгоритм розв'язання найпростішої задачі варіаційного числення**

1. Виписуємо рівняння Ейлера.
2. Знаходимо його загальний розв'язок.
3. Значення невідомих констант шукаємо з граничних умов, розв'язуючи систему рівнянь $\begin{cases} x(t_0, c_1, c_2) = x_0, \\ x(t_1, c_1, c_2) = x_1. \end{cases}$

В результаті одержимо екстремалі, на яких може досягатися екстремум функціоналу.

4. За означенням або використовуючи достатні умови перевіряємо, чи досягається на екстремалях розв'язок задачі (6)-(7).

Отже, екстремаль не обов'язково є розв'язком основної варіаційної задачі. Щоб переконатись в тому, що екстремаль є розв'язком, потрібно перевірити достатні умови оптимальності. В багатьох прикладних задачах з фізичного або геометричного змісту задач зрозуміло, що їх розв'язок існує. Якщо в таких випадках екстремаль єдина, то достатні умови екстремуму не перевіряють. Встановити, що певна екстремаль є розв'язком задачі Лагранжа на множині функцій з закріпленими кінцями можна також на основі означення локального екстремуму.

**Приклад 15**. Довести, що на функції $x_0(t) \equiv 0$ функціонал

$$J(x(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} (x'(t))^2 \left(1 - (x(t))^2\right) dt$$

досягає сильного локального мінімуму в класі функцій $K = \left\{x(t) \in C^1[-\pi, \pi] : x(-\pi) = x(\pi) = 0\right\}$.

**Розв'язання**. Нехай $x(t) \in K$ – довільна функція, близька до $x_0(t)$ в розумінні близькості нульового порядку, тобто $\exists\, \varepsilon > 0$ таке, що $|x(t) - x_0(t)| < \varepsilon$, $t \in [-\pi, \pi]$.

Нехай $\varepsilon = 1$, тоді для всіх функцій $x(t)$ з $\varepsilon$ - околу нульового порядку функції $x_0(t)$ виконується умова $|x(t)| < \varepsilon = 1$. Тому $0 \le (x(t))^2 < 1$, звідки $1 - (x(t))^2 > 0$ для всіх $t \in [-\pi, \pi]$. Тоді $\Delta J = J(x(t)) - J(x_0(t)) = \int_{-\pi}^{\pi} (x'(t))^2 \left(1 - (x(t))^2\right) dt \ge 0$, а це означає, що на функції $x_0(t) \equiv 0$ функціонал досягає сильного локального мінімуму.

**Приклад 16**. Довести, що на функції $x_0(t) \equiv 0$ функціонал

$$J(x(t)) = \int_{0}^{\pi} (x(t))^2 \left(1 - (x'(t))^2\right) dt$$

досягає слабкого локального мінімуму в класі функцій $K = \left\{x(t) \in C^1[0, \pi] : x(0) = x(\pi) = 0\right\}$.

**Розв'язання**. Так як $J(x_0(t)) = 0$, то за означенням треба довести, що $\exists\, \varepsilon > 0$ таке, що для всіх $x(t) \in K$, які задовольняють умови $|x(t)| < \varepsilon$, $|x'(t)| < \varepsilon$, $t \in [0, \pi]$, виконується нерівність $J(x(t)) \ge J(x_0(t)) = 0$.

Нехай $\varepsilon = 1$, тоді для всіх функцій $x(t)$ з $\varepsilon$ - околу першого порядку функції $x_0(t)$ виконуються умови $|x(t)| < 1$, $|x'(t)| < 1$. Тому $0 \le (x(t))^2 < 1$ і $1 - (x'(t))^2 > 0$ для всіх $t \in [0, \pi]$. Тоді $\Delta J = J(x(t)) - J(x_0(t)) = \int_{0}^{\pi} (x(t))^2 \left(1 - (x'(t))^2\right) dt \ge 0$, що й треба було довести. Отже, на функції $x_0(t) \equiv 0$ функціонал досягає слабкого локального мінімуму.

Дослідимо функціонал на наявність сильного локального мінімуму. При $\varepsilon > 0$ $\varepsilon$ - окіл нульового порядку функції $x_0(t) \equiv 0$ утворюють функції, що задовольняють умову $|x(t)| < \varepsilon$ для всіх $t \in [0, \pi]$. Але серед них можна вибрати таку функцію, наприклад $x(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nt$, що $J(x(t)) = \frac{1}{n} \int_{0}^{\pi} \sin^2 nt \left(1 - n \cos^2 nt\right) dt = \frac{1}{n} \int_{0}^{\pi} \sin^2 nt dt - \frac{1}{4} \int_{0}^{\pi} \sin^2 2nt dt =$

$=\frac{1}{2n}\int_0^{\pi}(1-\cos 2nt)dt-\frac{1}{8}\int_0^{\pi}(1-\cos 4nt)dt==\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8}<0$ при $n>4$. Таким чином, умова $J(x(t))\geq J(x_0(t))=0$ для деяких функцій з $\varepsilon$ - околу нульового порядку функції $x_0(t)\equiv 0$ може не виконуватися. Звідси випливає, що на функції $x_0(t)\equiv 0$ функціонал не досягає сильного локального мінімуму.

**Приклад 17**. Розв'язати задачу:

$$J(x(t))=\int_0^1\left(x(t)-(x'(t))^2\right)dt\to extr,\ x(0)=x(1)=0.$$

**Розв'язання**. Рівняння Ейлера $L'_x(t)-\frac{d}{dt}L'_{x'}(t)=0$.

Для нашого випадку $L'_{x'}(t)=-2x'$, $L'_x(t)=1 \Rightarrow 1+2x''=0 \Rightarrow x''=-\frac{1}{2} \Rightarrow$

$x'=-\frac{1}{2}t+c_1 \Rightarrow x=-\frac{t^2}{4}+c_1t+c_2$.

З граничних умов шукаємо невідомі константи:

$x(0)=0 \Rightarrow c_2=0$, $x(1)=0 \Rightarrow c_1=\frac{1}{4} \Rightarrow \hat{x}=-\frac{t^2}{4}+\frac{1}{4}t=\frac{t}{4}(1-t)$ – єдина допустима екстремаль.

Перевіримо, чи дійсно знайдена екстремаль є розв'язком задачі. Для цього розглянемо $\Delta J=J\left(\hat{x}+h\right)-J\left(\hat{x}\right)$, де $h\in \mathbf{C}_0^1[0,1]$:

$$\Delta J=\int_0^1\left(\left(\hat{x}+h\right)-\left(\hat{x}'+h'\right)^2\right)dt-\int_0^1\left(\hat{x}-\left(\hat{x}'\right)^2\right)dt=\int_0^1 hdt-2\int_0^1\hat{x}'h'dt-\int_0^1(h')^2dt\leq\int_0^1 hdt-2\int_0^1\hat{x}'h'dt.$$

$\int_0^1\hat{x}'h'dt>\int_0^1\hat{x}'dh=\hat{x}'h\Big|_0^1-\int_0^1 h\hat{x}''dt=\frac{1}{2}\int_0^1 hdt$. Остання рівність випливає з того, що $h(0)=h(1)=0$ і $\hat{x}''=\left(\frac{t}{4}(1-t)\right)''=-\frac{1}{2}$.

Отже $\Delta J\leq\int_0^1 hdt-\int_0^1 hdt=0 \Rightarrow \hat{x}\in abs\max$.

**Приклад 18.** Розв'язати задачу

$$J(x(t))=\int_0^{3/2}\left((x'(t))^3+2x(t)\right)dt\to extr,\ x(0)=0,\ x\left(\frac{3}{2}\right)=1.$$

**Розв'язання**. Рівняння Ейлера $2-\frac{d}{dt}\left(3(x')^2\right)=0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(3(x')^2\right)=2 \Rightarrow$

$3(x')^2=2t+c_1 \Rightarrow (x')^2=\frac{2}{3}t+c \Rightarrow x'=\pm\left(\frac{2}{3}t+c\right)^{1/2} \Rightarrow x(t)=\pm\left(\frac{2}{3}t+c\right)^{3/2}+c_1$ – загальний розв'язок рівняння Ейлера.

Знайдемо сталі з граничних умов:

$x(0)=0 \;\Rightarrow\; \pm c^{3/2}+c_1=0$, $x\left(\frac{3}{2}\right)=1 \;\Rightarrow\; \pm(1+c)^{3/2}+c_1=1$. З системи двох останніх рівнянь випливає, що $c=c_1=0$. Отже, єдиною допустимою екстремаллю є екстремаль $\hat{x}(t)=\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ ( Екстремаль $\hat{x}(t)=-\left(\frac{2}{3}t\right)^{3/2}$ не задовольняє умові $\hat{x}\left(\frac{3}{2}\right)=1$). Для перевірки того, чи є $\hat{x}(t)$ розв'язком задачі розглянемо різницю $\Delta J=J\left(\hat{x}+h\right)-J\left(\hat{x}\right)=\int\limits_0^{3/2}\left(3\left(\hat{x}'\right)^2h'+3\hat{x}'(h')^2+(h')^3+2h\right)dt$, де $h\in \mathbf{C}_0^1\left[0,\frac{3}{2}\right]$.

$$3\int\limits_0^{3/2}\left(\left(\hat{x}'\right)^2h'\right)dt=3\int\limits_0^{3/2}\left(\hat{x}'\right)^2dh=3\left(\hat{x}'\right)^2h\Big|_0^{3/2}-3\int\limits_0^{3/2}h\cdot 2\hat{x}'\hat{x}''dt=-6\int\limits_0^{3/2}h\sqrt{\frac{2}{3}t}\,\frac{1}{3\sqrt{2/3\cdot t}}dt=-2\int\limits_0^{3/2}hdt$$

Отже $\Delta J=\int\limits_0^{3/2}\left(3\hat{x}'(h')^2+(h')^3\right)dt=\int\limits_0^{3/2}\left(3\sqrt{\frac{2}{3}t}(h')^2+(h')^3\right)dt\ge 0$ при малих $h'$ $\Rightarrow$ $\hat{x}\in loc\min$.

Легко побудувати послідовність функцій з як завгодно великими і малими значеннями $J(x_n(t))$, звідки випливає, що $S_{\min}=-\infty$, $S_{\max}=\infty$.

**Приклад 19.** Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(t))=\int\limits_0^a (x'(t))^3dt,\; x(0)=0,\; x(a)=b$$

при різних значеннях параметрів $a>0$, $b>0$.

**Розв'язання.**

Знайдемо екстремаль, що задовольняє рівнянню Ейлера і граничним умовам. Так як підінтегральна функція $L=x'^3$ не залежить від $t$ та $x$ явно, рівняння Ейлера має загальний розв'язок $x(t)=c_1t+c_2$. Із граничних умов $x(0)=c_2=0$, $x(a)=c_1a+c_2=b$ отримаємо $c_1=\frac{b}{a}$, $c_2=0$. Таким чином, екстремаль $\hat{x}(t)=\frac{b}{a}t$.

Перевіримо достатні умови сильного екстремуму:

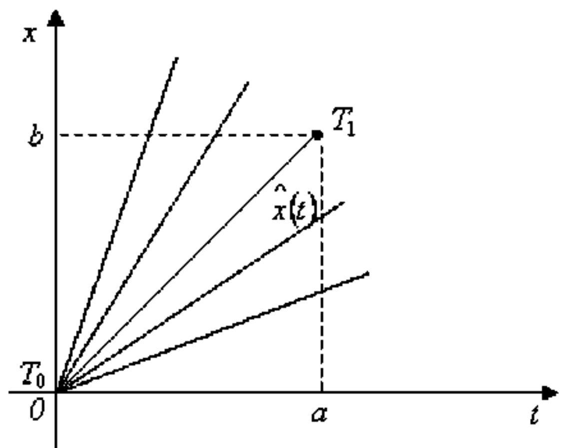



Рис. 5

а) екстремаль $\hat{x}(t)=\frac{b}{a}t$ може бути включена в центральне поле екстремалей $x(t)=c_1t$ з центром в точці $T_0(0{,}0)$(рис. 5).

Для перевірки умов Якобі складемо рівняння Якобі. Оскільки $L''_{xx}=0$, $L''_{xx'}=0$, $L''_{x'x''}=6x'$ (на екстремалі $\hat{x}(t)=\frac{b}{a}t$ похідна $\hat{x}'(t)=\frac{b}{a}$, $L_{x'x''}=\frac{6b}{a}$), то $\frac{d}{dt}\left\{\frac{6b}{a}h'\right\}=0$ або $h''=0$. Звідси $h(t)=c_1t+c_2$. Із умови $h(0)=c_2=0$ отримуємо $h(t)=c_1t$. Оскільки

нетривіальний розв'язок $(c_1 \neq 0)$ рівняння Якобі $h(t) = c_1 t \neq 0$ при $t \in (0, a]$, умова Якобі виконується;
б) оскільки функція $L$ тричі диференційована по $x'$, то перевіримо умову Лежандра. Так як $L''_{x'x''} = 6x'$ для довільних $x'$ не зберігає знак, то умова Лежандра не виконується.

Перевіримо умову Вейєрштрасса. Функція Вейєрштрасса

$$E(t, x, x', p) = x'^3 - p^3 - (x' - p)3p^2 = (x' - p)^2 (x' + 2p)$$

не зберігає знак, оскільки вираз $(x' + 2p)$ при довільних $x'$ може мати довільний знак. Отже, умова Вейєрштрасса для сильного екстремуму не виконується, а так як вона є необхідною умовою, то можна зробити висновок: на прямій $\hat{x}(t) = \frac{b}{a} t$ сильний локальний екстремум не досягається.

Перевіримо достатні умови слабкого екстремуму:
а) умови Якобі виконуються;
б) так як підінтегральна функція тричі диференційована по $x'$, перевіримо посилену умову Лежандра. Оскільки на екстремалі $\hat{x}(t) = \frac{b}{a} t$ справедливо $L''_{x'x''} = \frac{6b}{a} > 0$, то на ній досягається слабкий локальний мінімум.

Обчислимо мінімальне значення функціонала $J\left(\hat{x}(t)\right) = \int_0^a \left[\frac{b}{a}\right]^3 dt = \frac{b^3}{a^2}$.

**Приклад 20.** Дослідити на екстремум функціонал

$$J(x(t)) = \int_0^a \left(6(x'(t))^2 - (x'(t))^4 + x'(t)x(t)\right) dt$$

в класі функцій $K = \{x(t) \in C^1[0, a] : x(0) = 0,\ x(a) = b\},\ a > 0,\ b > 0$.

**Розв'язання.** Підінтегральна функція явно не залежить від $x$, відповідно, рівняння Ейлера має перший інтеграл $L - x'L'_{x'} = c$:

$$6x'^2 - x'^4 + xx' - x'\left(12x' - 4x'^3 + x\right) = c \Rightarrow -6x'^2 + 3x'^4 = c \Rightarrow x' = c_1 \Rightarrow x = c_1 t + c_2,$$

тобто екстремалями є прямі. Граничним умовам задовольняє пряма $x = \frac{b}{a} t$, яка включається в пучок екстремалей, що утворюють центральне поле. Функція Вейєрштрасса

$$E(t, x, x', p) = 6x'^2 - x'^4 + xx' - 6p^2 + p^4 - xp - (x' - p)\left(12p - 4p^3 + x\right) =$$
$$= (x' - p)\left(6(x' + p) - \left(x'^2 + p^2\right)(x' + p) + x - 12p + 4p^3 - x\right) =$$
$$= (x' - p)\left(6x' + 6p - x'^3 - x'^2 p - p^3 - 12p + 4p^3\right) = -(x' - p)^2\left(x'^2 + 2x'p + \left(3p^2 - 6\right)\right).$$

Рис 6

Знак функції $E(t, x, x', p)$ протилежний знаку останнього множника $(x' - p)^2\left(x'^2 + 2x'p + \left(3p^2 - 6\right)\right)$. Цей множник перетворюється в нуль і може змінити знак лише при переході $x'$ через значення $x' = -p \pm \sqrt{6 - 2p^2}$. При $6 - 2p^2 \le 0$ $\left(p = \frac{b}{a} \ge \sqrt{3}\right)$ і будь-якому $x'$ отримаємо $x'^2 + 2x'p + \left(3p^2 - 6\right) > 0$. Якщо $6 - 2p^2 > 0$ $\left(p = \frac{b}{a} < \sqrt{3}\right)$, то вираз

$x'^2 + 2x'p + \left(3p^2 - 6\right) > 0$ змінює знак. Якщо ж при цьому $x'$ достатньо близько до $p$, то вираз $x'^2 + 2x'p + \left(3p^2 - 6\right) \approx p^2 + 2p^2 + 3p^2 - 6 = 6\left(p^2 - 1\right)$ зберігає знак “+” при $p > 1$ і знак “-” при $p < 1$ .

Відповідно, при $p = \dfrac{b}{a} < 1$ (або $b < a$) одержимо локальний мінімум, так як $E(t, x, x', p) \geq 0$ при значеннях $x'$ достатньо близьких до $p$; при $1 < p < \sqrt{3}$ (або $a < b < a\sqrt{3}$) маємо слабкий локальний максимум; при $p \geq \sqrt{3}$ (або $b \geq a\sqrt{3}$) досягається сильний локальний максимум, так як $E(t, x, x', p) \leq 0$ при будь-яких значеннях $x'$. При $p < \sqrt{3}$ з необхідної умови Вейєрштрасса випливає, що сильний екстремум не досягається.

**Приклад 21.** Дослідити на екстремум функціонал $J(x(t)) = \int\limits_0^a \left((x'(t))^2 - (x(t))^2\right)dx$ в класі функцій $K = \left\{x(t) \in C^1[0, a] : x(0) = 0,\ x(a) = b\right\},\ a > 0, b > 0$.

**Розв’язання**. Рівняння Ейлера має вигляд $-2x - \dfrac{d}{dx}(2x') = 0$ або $x'' + x = 0$. Його загальний розв’язок $x = c_1 cos\, t + c_2 \sin t$. Використовуючи граничні умови, отримаємо $c_1 = 0$ і $c_2 = 0$ якщо $a \neq k\pi, k \in \mathrm{Z}$. Отже, при $a \neq k\pi$ екстремум може досягатися лише на прямій $x = 0$. Якщо $a < \pi$, то пучок екстремалей $x = c \sin t$ з центром в точці $(0,0)$ утворює центральне поле. При $a \geq \pi$ умова Якобі не виконується.

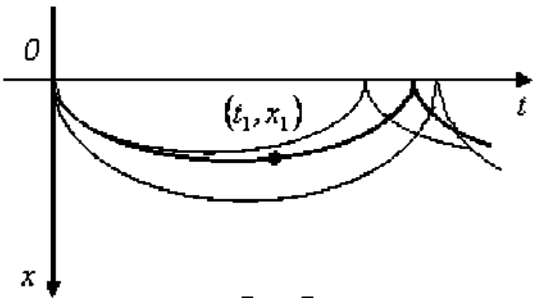



Рис 7

Так як підінтегральна функція $L = x'^2 - x^2$ така, що $L''_{x'x'} = 2 > 0$ при будь-яких значеннях $x'$, то на прямій $x = 0$ при $a < \pi$ реалізується сильний локальний мінімум.

Якщо $a > \pi$ мінімум на прямій $x = 0$ не досягається, так як не виконується необхідна умова Якобі.

**Приклад 22.** Дослідити на екстремум функціонал $J(x(t)) = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \int\limits_0^{t_1} \dfrac{\sqrt{1 + (x'(t))^2}}{\sqrt{x(t)}} dt$ в класі гладких функцій, які задовольняють граничні умови $x(0) = 0$, $x(t_1) = x_1$.

**Розв’язання.** Екстремалями є циклоїди (приклад 12). Пучок циклоїд $t = c(v - \sin v)$, $x = c(1 - \cos v)$ з центром в точці $(0,0)$ утворює центральне поле, що включає екстремаль $t = a(v - \sin v)$, $x = a(1 - \cos v)$, де $a$ визначено з умови проходження циклоїди через граничну точку $(t_1, x_1)$, якщо $t_1 < 2\pi a$.

Маємо $L'_{x'} = \dfrac{x'}{\sqrt{x}\sqrt{1 + x'^2}}$, $L''_{x'x'} = \dfrac{\sqrt{1 + x'^2} - \dfrac{x'^2}{\sqrt{1 + x'^2}}}{\sqrt{x}\left(1 + x'^2\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x}\left(1 + x'^2\right)^{3/2}} > 0$ для будь-якого $x'$.

Таким чином, при $t_1 < 2\pi a$ на циклоїді $t = a(v - \sin v)$, $x = a(1 - \cos v)$ реалізується сильний мінімум.

**Питання для самоконтролю**

1. Які задачі називають варіаційними?
2. Дайте означення функціоналу?
3. Дайте означення $\varepsilon$ -околу $k$ - го порядку кривої $x(t)$.
4. Які криві називаються близькими в розумінні $k$ - го порядку близькості?
5. Сформулюйте означення глобального екстремуму функціоналу?
6. Сформулюйте означення сильного локального максимуму (мінімуму) функціоналу?
7. Сформулюйте означення слабкого локального максимуму (мінімуму) функціоналу?
8. Яку функцію називають варіацією аргументу функціоналу?
9. Дайте означення першої варіації функціоналу?
10. Дайте означення другої варіації функціоналу.
11. В чому полягає метод варіацій?
12. Сформулюйте необхідну умову оптимальності 1-го порядку в термінах варіацій для задач варіаційного числення.
13. Яку задачу називають найпростішою варіаційною задачею?
14. Які функції називають допустимими в найпростішій варіаційній задачі?
15. Що називають інтегрантом в найпростішій варіаційній задачі?
16. Сформулюйте необхідну умову екстремуму в найпростішій задачі класичного варіаційного числення.
17. Які функції називають екстремалями?
18. В чому полягає інваріантність рівняння Ейлера?
19. Яку задачу називають спряженою у варіаційному численні?
20. Яке рівняння називають рівнянням Якобі?
21. Дайте визначення центрального поля екстремалей?
22. Сформулюйте теорему про умову Якобі.
23. Яку функцію називають функцією Веєрштрасса?
24. Яку умову називають умовою Лежандра (посиленою умовою Лежандра).
25. Сформулюйте необхідну умову оптимальності другого порядку для найпростішої варіаційної задачі.
26. Сформулюйте достатні умови слабкого локального максимуму (мінімуму).
27. Сформулюйте достатні умови сильного локального мінімуму (максимуму).
28. Опишіть алгоритм розв'язання найпростішої задачі варіаційного числення.

**Завдання для самостійного виконання**

Знайти допустимі екстремалі варіаційної задачі.

1. $J(x(t)) = \int\limits_0^3 (3t - x)x dt$, $x(0) = 1$, $x(3) = \dfrac{9}{2}$.

2. $J(x(t)) = \int\limits_0^{2\pi} \left(x'^2 - x^2\right) dt$, $x(0) = 1$, $x(2\pi) = 1$.

3. $J(x(t)) = \int\limits_{-1}^{0} \left(12tx - x'^2\right) dt$, $x(-1) = 1$, $x(0) = 0$.

4. $J(x(t)) = \int\limits_1^2 \left(x'^2 + 2xx' + x^2\right) dt$, $x(1) = 1$, $x(2) = 0$.

5. $J(x(t)) = \int\limits_0^1 xx'^2 dt$, $x(0) = 1$, $x(1) = \sqrt[3]{4}$.

6. $J(x(t)) = \int\limits_0^{\pi} \left(4x\cos t + x'^2 - x^2\right)dt$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$.

7. $J(x(t)) = \int\limits_0^{1} \left(x'^2 - x^2 - x\right)e^{2t}dt$, $x(0) = 0$, $x(1) = e^{-1}$.

8. $J(x(t)) = \int\limits_{-1}^{1} \left(x'^2 - 2tx\right)dt$, $x(-1) = -1$, $x(1) = 1$.

9. $J(x(t)) = \int\limits_{-1}^{0} \left(x'^2 - 2tx\right)dt$, $x(-1) = 0$, $x(0) = 2$.

10. $J(x(t)) = \int\limits_1^{e} \left(tx'^2 + xx'\right)dt$, $x(1) = 0$, $x(e) = 1$.

11. $J(x(t)) = \int\limits_a^{b} \left[2tx + \left(t^2 + e^x\right)x'\right]dt$, $x(a) = A$, $x(b) = B$.

12. $J(x(t)) = \int\limits_0^{1} \left(e^t + tx'\right)dt$, $x(0) = 0$, $x(1) = \alpha$.

13. $J(x(t)) = \int\limits_0^{\pi/4} \left(x'^2 - x^2\right)dt$, $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

14. $J(x(t)) = \int\limits_0^{\pi} \left(x'^2 - x^2\right)dt$, $x(0) = 1$, $x(\pi) = -1$.

15. $J(x(t)) = \int\limits_0^{1} \left(t + x'^2\right)dt$, $x(0) = 1$, $x(1) = 2$.

16. $J(x(t)) = \int\limits_0^{1} \left(x^2 + x'^2\right)dt$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

17. $J(x(t)) = \int\limits_0^{1} \left(x'^2 + 4x^2\right)dt$, $x(0) = e^2$, $x(1) = 1$.

18. $J(x(t)) = \int\limits_0^{1} \left(2e^x - x^2\right)dt$, $x(0) = 1$, $x(1) = e$.

Розв’язати задачі:

1. $\int\limits_0^{1} x'^2(t)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

2. $\int\limits_0^{1} \left(x'^2(t) - x(t)\right)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(1) = -1$.

3. $\int\limits_0^{\pi} \left(x'^2(t) - x(t) + 4x(t)\cos t\right)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 1$.

4. $\int\limits_0^1 \left(2tx(t) - x'^2(t)\right)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

5. $\int\limits_0^1 x'^3(t)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

6. $\int\limits_0^{3\pi/2} \left(x'^2(t) - x^2(t)\right)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(3\pi/2) = 0$.

7. $\int\limits_0^T \left(x'^3(t) - x'^2(t)\right)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(T) = \xi$.

8. $\int\limits_0^T \left(x'^2(t) - x^2(t)\right)e^{2t}dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(T) = \xi$.

9. $\int\limits_0^T \left(x'^2(t) - x^2(t)\right)dt \to extr$, $x(0) = 0$, $x(T) = 0$.

# 3 УЗАГАЛЬНЕННЯ НАЙПРОСТІШОЇ ЗАДАЧІ ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

## 3.1 Функціонали, залежні від векторозначних функцій

Розглянемо задачу на екстремум функціоналу

$$J(\overline{x}(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(\overline{x}(t), \overline{x}'(t))dt \to extr, \qquad \overline{x}(t_0) = \overline{x}_0, \quad \overline{x}(t_1) = \overline{x}_1. \tag{18}$$

в класі функцій $\overline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$ з простору $\mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$.

Будемо вважати, що функція $L : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ під знаком інтегралу неперервна і має неперервні частинні похідні першого порядку по всім $2n+1$ аргументам.

**<u>Означення</u> 23**. *Функції $\overline{x}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, називаються **допустимими** в задачі* (18), *якщо вони належать простору $\mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ і задовольняють граничні умови $\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0$, $\overline{x}(t_1) = \overline{x}_1$.*

**<u>Означення</u> 24**. *Функція $\overline{h}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ є **допустимою варіацією** функції $\overline{x}(t)$, якщо вона належить простору $\mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ і задовольняє нульові граничні умови $\overline{h}(t_0) = \overline{h}(t_1) = \overline{0}$.*

Як і в основній задачі варіаційного числення підпростір простору $\mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ функцій, що задовольняють граничні умови $\overline{h}(t_0) = \overline{h}(t_1) = \overline{0}$ будемо позначати $\mathbf{H}_0$ або $\mathbf{C}_0^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$. Якщо $\overline{x}(t)$ − допустима функція в задачі (18), то такими ж будуть і функції $\overline{x}(t) + \overline{h}(t)$, $\overline{h}(t) \in \mathbf{H}_0$.

**<u>Означення</u> 25**. *Функціонал $J(\overline{x}(t))$ досягає на кривій $\hat{\overline{x}}(t)$ **сильного локального мінімуму (сильного локального максимуму)**, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для всіх допустимих функцій $\overline{x}(t)$, які задовольняють умову $\left\| \overline{x}(t) - \hat{\overline{x}}(t) \right\|_0 \le \varepsilon$, виконується нерівність $J\left(\hat{\overline{x}}(t)\right) \le J(\overline{x}(t))$ ($J\left(\hat{\overline{x}}(t)\right) \ge J(\overline{x}(t))$). Тут $\left\| \overline{x}(t) \right\|_0 = \max\limits_{t \in [t_0, t_1]} \left\| \overline{x}(t) \right\|$.*

**<u>Означення</u> 26**. *Функціонал $J(\overline{x}(t))$ досягає на кривій $\hat{\overline{x}}(t)$ **слабкого локального мінімуму (слабкого локального максимуму)**, якщо існує таке число $\varepsilon > 0$, що для всіх допустимих функцій $\overline{x}(t)$, які задовольняють умову $\left\| \overline{x}(t) - \hat{\overline{x}}(t) \right\|_1 < \varepsilon$ виконується нерівність $J\left(\hat{\overline{x}}(t)\right) \le J(\overline{x}(t))$ ($J\left(\hat{\overline{x}}(t)\right) \ge J(\overline{x}(t))$). Тут $\left\| \overline{x}(t) \right\|_1 = \max\left\{ \left\| \overline{x}(t) \right\|_0, \left\| \overline{x}'(t) \right\|_0 \right\}$.*

**<u>Теорема</u> 8** (необхідна умова оптимальності)[4]. *Нехай на допустимій функції $\overline{x}(t) \in \mathbf{C}^1([t_0, t_1], \mathbf{R}^n)$ досягається слабкий локальний екстремум задачі* (18). *Тоді вона задовольняє систему рівнянь Ейлера*

$$L'_{x_k}(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t)) - \frac{d}{dt} L'_{x'_k}(t, \overline{x}(t), \overline{x}'(t)) = 0, \ k = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Загальний розв'язок системи $n$ рівнянь другого порядку (19) залежить від $2n$ довільних сталих, визначених із граничних умов $\overline{x}(t_0)=\overline{x}_0$, $\overline{x}(t_1)=\overline{x}_1$.

**Алгоритм застосування необхідних умов екстремуму в задачі (18)**

1. Записати систему рівнянь Ейлера.
2. Знайти загальний розв'язок системи (19): $x_i = x_i(t,c_1,c_2,\ldots,c_{2n})$, $i=1,2,\ldots,n$.

Визначити сталі $c_1,c_2,\ldots,c_{2n}$ з граничних умов і записати вираз для екстремалі $\hat{x}(t)=\left(\hat{x}_1(t),\hat{x}_2(t),\cdots,\hat{x}_n(t)\right)$.

**Приклад. 23.** Знайти екстремаль функціоналу

$$J(x_1(t),x_2(t))=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[x_1'^2(t)+x_2'^2(t)+2x_1(t)x_2(t)\right]dt,$$

що задовольняє граничним умовам: $x_1(0)=x_2(0)=0$, $x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$.

**Розв'язання.**

Запишемо систему рівнянь Ейлера $L'_{x_i}-\frac{d}{dt}L'_{x_i'}=0$, $i=1,2$.

Оскільки $L=x_1'^2(t)+x_2'^2(t)+2x_1(t)x_2(t)$, $L'_{x_1}=2x_2$, $L'_{x_2}=2x_1$, $L'_{x_1'}=2x_1'$, $L'_{x_2'}=2x_2'$ $\frac{d}{dt}L'_{x_1'}=2x_1''$, $\frac{d}{dt}L'_{x_2'}=2x_2''$, то система має вигляд

$$\begin{cases} L'_{x_1}-\dfrac{d}{dt}L'_{x_1'}\equiv 2x_2-2x_1''=0, \\ L'_{x_2}-\dfrac{d}{dt}L'_{x_2'}\equiv 2x_1-2x_2''=0. \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x_1''=x_2, \\ x_2''=x_1. \end{cases}$$

Розв'язуємо систему, звівши її до одного рівняння відносно змінної $x_1$. Отримуємо $x_1'''=x_2'$, $x_1^{(4)}=x_2''$, $x_1^{(4)}=x_1$ або $x_1^{(4)}-x_1=0$. Оскільки характеристичне рівняння $\lambda^4-1=0$ або $(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0$ має корені $\lambda_1=1$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_{3,4}=\pm i$, то загальний розв'язок отриманого однорідного рівняння записується у вигляді:

$$x_1(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}+c_3\cos t+c_4\sin t.$$

Тоді $x_2(t)=x_1''(t)=c_1e^t+c_2e^{-t}-c_3\cos t-c_4\sin t$.

Визначаємо сталі $c_1,c_2,c_3,c_4$ із граничних умов:

$$x_1(0)\equiv c_1+c_2+c_3=0,$$
$$x_2(0)\equiv c_1+c_2-c_3=0,$$
$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)\equiv c_1e^{\frac{\pi}{2}}+c_2e^{-\frac{\pi}{2}}+c_4=1,$$
$$x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)\equiv c_1e^{\frac{\pi}{2}}+c_2e^{-\frac{\pi}{2}}-c_4=-1.$$

Маємо: $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $c_4 = 1$. Записуємо компоненти екстремалі $\hat{x}(t) = \left(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)\right)$:

$\hat{x}_1(t) = \sin t$, $\hat{x}_2(t) = -\sin t$.

**Приклад. 24.** Знайти екстремаль функціоналу

$$J(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \int_1^2 \left[12tx_1(t) + x_1'^2(t) + x_2'^2(t) + 2x_2(t)x_3'(t) + x_3'^2(t) + 2x_3(t)x_2'(t)\right]dt,$$

що задовольняє граничним умовам: $x_1(1) = 0$, $x_2(1) = 2$, $x_3(1) = 0$, $x_1(2) = 6$, $x_2(2) = 3$, $x_3(2) = 2$.

**Розв'язання.**

Запишемо систему рівнянь Ейлера $L'_{x_i} - \dfrac{d}{dt}L'_{x'_i} = 0$, $i = 1,2,3$. Для цього знайдемо $L'_{x_1} = 12t$, $L'_{x_2} = 2x'_3$, $L'_{x_3} = 2x'_2$, $L'_{x'_1} = 2x'_1$, $L'_{x'_2} = 2x'_2 + 2x_3$, $L'_{x'_3} = 2x'_3 + 2x_2$, $\dfrac{d}{dt}L'_{x'_1} = 2x''_1$, $\dfrac{d}{dt}L'_{x'_2} = 2x''_2 + 2x'_3$, $\dfrac{d}{dt}L'_{x'_3} = 2x''_3 + 2x'_2$. Одержимо систему

$$\begin{cases} 12t - 2x''_1 = 0, \\ 2x'_3 - (2x''_2 + 2x'_3) = 0, \\ 2x'_2 - (2x'_2 + 2x''_3) = 0 \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} x''_1 = 6t, \\ x''_2 = 0, \\ x''_3 = 0. \end{cases}$$

Знайдемо загальний розв'язок системи:

$$x_1(t) = t^3 + c_1 t + c_2,\ x_2(t) = c_3 t + c_4,\ x_3(t) = c_5 t + c_6.$$

Визначаємо сталі $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$, $c_5$, $c_6$ із граничних умов:

$$x_1(1) \equiv 1 + c_1 + c_2 = 0,\ x_1(2) \equiv 8 + 2c_1 + c_2 = 6,$$
$$x_2(1) \equiv c_3 + c_4 = 2,\ x_2(2) \equiv 2c_3 + c_4 = 3,$$
$$x_3(1) \equiv c_5 + c_6 = 0,\ x_3(2) \equiv 2c_5 + c_6 = 2.$$

Звідси $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, $c_5 = 2$, $c_6 = -2$. В результаті одержимо екстремаль $\hat{x}(t) = \left(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t), \hat{x}_3(t)\right)$: $\hat{x}_1(t) = t^3 - t$, $\hat{x}_2(t) = t + 1$, $\hat{x}_3(t) = 2t - 2$.

### 3.2 Функціонали, залежні від похідних вищих порядків однієї функції

Розглянемо функціонал

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t))dt \tag{20}$$

з граничними умовами

$$\begin{gathered} x(t_0) = x_{00},\ x'(t_0) = x_{10},\ \ldots,\ x^{(m-1)}(t_0) = x_{(m-1)0}, \\ x(t_1) = x_{01},\ x'(t_1) = x_{11},\ \ldots,\ x^{(m-1)}(t_1) = x_{(m-1)1} \end{gathered} \tag{21}$$

у просторі $\mathbf{C}^m([t_0, t_1], \mathbf{R})$ $m$ раз неперервно диференційованих функцій.

Вважатимемо, що функція $L(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t))$ має неперервні частинні похідні першого порядку по всім аргументам.

**Означення 27**. *Функції* $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *називаються* ***допустимими*** *в задачі* (20), (21) *якщо вони належать простору* $\mathbf{C}^m([t_0, t_1], \mathbf{R})$ *і задовольняють умови* (21).

**Означення 28**. *Функція* $h(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ *є* ***допустимою варіацією*** *функції* $x(t)$, *якщо вона належить простору* $\mathbf{C}^m([t_0, t_1], \mathbf{R})$ *і* $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.

Підпростір простору $\mathbf{C}^m([t_0, t_1], \mathbf{R})$ функцій, що задовольняють граничні умови $h^{(k)}(t_0) = h^{(k)}(t_1) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ будемо позначати $\mathbf{H}_0^m$ або $\mathbf{C}_0^m([t_0, t_1], \mathbf{R})$. Якщо $x(t)$ − допустима функція в задачі (20)-(21), то такими ж будуть і функції $x(t) + h(t)$, $h(t) \in \mathbf{H}_0^m$.

**Означення 29**. *Функціонал* $J(x(t))$ *досягає на кривій* $\hat{x}(t)$ ***сильного локального мінімуму (сильного локального максимуму)***, *якщо існує таке число* $\varepsilon > 0$, *що для всіх допустимих функцій* $x(t)$, *які задовольняють умову* $\left| x(t) - \hat{x}(t) \right| \le \varepsilon$, *виконується нерівність* $J\left(\hat{x}(t)\right) \le J(x(t))$ ($J\left(\hat{x}(t)\right) \ge J(x(t))$).

**Означення 30**. *Функціонал* $J(x(t))$ *досягає на кривій* $\hat{x}(t)$ ***слабкого локального мінімуму (слабкого локального максимуму)***, *якщо існує таке число* $\varepsilon > 0$, *що для всіх допустимих функцій* $x(t)$, *які задовольняють умови* $\left| x(t) - \hat{x}(t) \right| < \varepsilon$, $\left| x'(t) - \hat{x}'(t) \right| < \varepsilon$, ..., $\left| x^{(m)}(t) - \hat{x}^{(m)}(t) \right| < \varepsilon \quad \forall t \in [t_0, t_1]$, *тобто в* $\varepsilon$- *околі* $m$ *порядку кривої* $\hat{x}(t)$ *виконується нерівність* $J\left(\hat{x}(t)\right) \le J(x(t))$ ($J\left(\hat{x}(t)\right) \ge J(x(t))$).

**Теорема 9** (необхідна умова оптимальності)[4]. *Нехай на скалярній функції* $\hat{x}(t) \in \mathbf{C}^m([t_0, t_1], \mathbf{R})$ *досягається слабкий локальний екстремум задачі* (20)-(21). *Тоді вона задовольняє рівняння Ейлера - Пуассона*

$$
\begin{aligned}
&L'_x\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)\right) - \frac{d}{dt} L'_{x'}\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)\right) + \frac{d^2}{dt^2} L'_{x''}\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)\right) - \ldots + \\
&+ (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} L'_{x^{(n)}}\left(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(m)}(t)\right) = 0.
\end{aligned} \tag{22}
$$

**Означення 31**. *Розв'язки рівняння Ейлера-Пуассона, які мають похідну порядку* $2m$, *називають* ***екстремалями*** *функціоналу* (20).

Загальний розв'язок рівняння (22) залежить від $2m$ довільних сталих, які визначаються з умов (21).

**Алгоритм застосування необхідних умов екстремуму в задачі (20)-(21)**

1. Записати рівняння Ейлера-Пуассона.
2. Знайти загальний розв'язок рівняння (20): $x = x(t, c_1, c_2, \ldots, c_{2m})$.
3. Визначити сталі $c_1, c_2, \ldots, c_{2m}$ з граничних умов і записати вираз для екстремалі $\hat{x}(t)$.

**Приклад. 25.** Знайти екстремаль функціоналу

$$J(x(t)) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[ x''^2(t) - 16x^2(t) + te^{-1} \right] dt,$$

що задовольняє граничним умовам: $x(0) = 1$, $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $x'(0) = 0$, $x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$.

**Розв'язання.**

Запишемо рівняння Ейлера-Пуассона. Оскільки $L = x''^2 - 16x^2 + te^{-t}$, $L'_x = -32x$, $L'_{x'} = 0$, $L'_{x''} = 2x''$, $\frac{d}{dt}L'_{x'} = 0$, $\frac{d^2}{dt^2}L'_{x''} = 2x^{(4)}$, то

$$L'_x - \frac{d}{dt}L'_{x'} + \frac{d^2}{dt^2}L'_{x''} = -32x + 2x^{(4)} = 0 \text{ або } x^{(4)} - 16x = 0.$$

Знаходимо загальний розв'язок рівняння Ейлера-Пуассона. Оскільки характеристичне рівняння $\lambda^4 - 16 = (\lambda^2 - 4)(\lambda^2 + 4) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 4) = 0$ має корені $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$, то $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 \cos 2t + c_4 \sin 2t$.

Визначимо коефіцієнти $c_1, \ldots, c_4$ із граничних умов з врахуванням того, що $x'(t) = 2c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{-2t} - 2c_3 \sin 2t + 2c_4 \cos 2t$:

$$x(0) \equiv c_1 + c_2 + c_3 = 1,$$

$$x'(0) \equiv 2c_1 - 2c_2 + 2c_4 = 0,$$

$$x\left(\frac{\pi}{4}\right) \equiv c_1 e^{\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} + c_4 = 0,$$

$$x'\left(\frac{\pi}{4}\right) \equiv 2c_1 e^{\frac{\pi}{2}} - 2c_2 e^{-\frac{\pi}{2}} - 2c_3 = -2.$$

Звідси знаходимо $c_1 = c_2 = c_4 = 0$, $c_3 = 1$ та шукану екстремаль $\hat{x}(t) = \cos 2t$.

**Приклад 26.** Знайти сім'ю екстремалей функціоналу

$$J(x(t)) = \int_{t_0}^{T} \left[ x'''^2(t) + 4x''^2(t) + 120tx(t) + 64x(t) + te^{-2t} \right] dt.$$

**Розв'язання.** Запишемо рівняння Ейлера – Пуассона. Так як $L = x'''^2(t) + 4x''^2(t) + 120tx(t) + 64x(t) + te^{-2t}$, $L'_x = 120t + 64$, $L'_{x'} = 0$, $L'_{x''} = 8x''$, $\frac{d}{dt}L'_{x'} = 0$, $\frac{d^2}{dt^2}L'_{x''} = 8x^{(4)}$, $L'_{x'''} = 2x'''$, $\frac{d^2}{dt^2}L'_{x'''} = 2x^{(6)}$ то рівняння має вигляд

$$L'_x - \frac{d}{dt}L'_{x'} + \frac{d^2}{dt^2}L'_{x''} - \frac{d}{dt^3}L'_{x'''} = 120t + 64 + 8x^{(4)} - 2x^{(6)} = 0 \text{ або } x^{(6)} - 4x^{(4)} - 60t - 32 = 0.$$

Знайдемо загальний розв'язок рівняння Ейлера – Пуассона $x^{(6)} - 4x^{(4)} = 60t + 32$:

а) визначимо загальний розв'язок однорідного рівняння $x^{(6)} - 4x^{(4)} = 0$. Так як характеристичне рівняння $\lambda^6 - 4\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 4) = 0$ має дійсні корені $\lambda_{1,2,3,4} = 0$, $\lambda_5 = 2$, $\lambda_6 = -2$, то $x_{зо}(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 e^{2t} + c_6 e^{-2t}$;

б) знайдемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Будемо шукати його у вигляді $x_{чн}(t) = t^4(At+B)$, де $A$ і $B$ – невідомі коефіцієнти. Тоді $x_{чн}(t) = At^5 + Bt^4$, $x'_{чн}(t) = 5At^4 + 4Bt^3$, $x''_{чн}(t) = 20At^3 + 12Bt^2$, $x'''_{чн}(t) = 60At^2 + 24Bt$, $x^{(4)}_{чн}(t) = 120At + 24B$, $x^{(5)}_{чн}(t) = 120A$, $x^{(6)}_{чн}(t) = 0$. Отримані вирази підставляємо в неоднорідне рівняння: $-4(120At + 24B) = 60t + 32$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $t$, одержимо $A = -\frac{60}{4\cdot 120} = -\frac{1}{8}$, $B = -\frac{32}{4\cdot 24} = -\frac{1}{3}$ і $x_{чн}(t) = -\frac{1}{8}t^5 - \frac{1}{3}t^4$;

в) загальний розв'язок неоднорідного рівняння знаходимо у вигляді суми результатів пунктів а) і б):

$$x(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + c_4 t^3 + c_5 e^{2t} + c_6 e^{-2t} - \frac{1}{8}t^5 - \frac{1}{3}t^4.$$

Це і є шукана сім'я екстремалей функціоналу.

### 3.3 Функціонали, залежні від похідних вищих порядків векторозначних функцій

Розглянемо задачу зі старшими похідними на множині векторних функцій $\overline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$:

$$\begin{gathered} J(\overline{x}(t)) = \int_{t_0}^{t_1} L\left(t, x_1(t), \ldots, x_1^{(m_1)}(t), x_2(t), \ldots, x_n^{(m_n)}(t)\right) dt \to extr \\ x_k^{(j)}(t_0) = x_{0kj},\ x_k^{(j)}(t_1) = x_{1kj},\ k = \overline{1,n},\ j = \overline{0, m_k - 1}, \end{gathered} \tag{23}$$

де $x_k(t) \in \mathbf{C}^{m_k}([t_0, t_1], \mathbf{R})$, $k = \overline{1,n}$.

**Означення** 32. *Функції* $\overline{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, *називаються* ***допустимими*** *в задачі* (23), *якщо* $x_k(t) \in \mathbf{C}^{m_k}([t_0, t_1], \mathbf{R})$ *і задовольняють граничні умови* $x_k^{(j)}(t_0) = x_{0kj}$, $x_k^{(j)}(t_1) = x_{1kj}$, $j = \overline{0, m_k - 1}$, $k = \overline{1,n}$.

**Означення** 33. *Функція* $\overline{h}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ *є* ***допустимою варіацією*** *функції* $\overline{x}(t)$, *якщо* $h_k(t) \in \mathbf{H}_0^{m_k}$, $k = 0,1,\ldots,n$.

**Означення** 34. *Функціонал* $J(\overline{x}(t))$ *досягає на кривій* $\overset{\wedge}{\overline{x}}(t)$ ***сильного локального мінімуму (сильного локального максимуму)***, *якщо існує таке число* $\varepsilon > 0$, *що для всіх допустимих функцій* $\overline{x}(t)$, *які задовольняють умову* $\left\| \overline{x}(t) - \overset{\wedge}{\overline{x}}(t) \right\|_0 \le \varepsilon$, *виконується нерівність* $J\left(\overset{\wedge}{\overline{x}}(t)\right) \le J(\overline{x}(t))$ ($J\left(\overset{\wedge}{\overline{x}}(t)\right) \ge J(\overline{x}(t))$).

**Означення** 35. *Функціонал* $J(\overline{x}(t))$ *досягає на кривій* $\overset{\wedge}{\overline{x}}(t)$ ***слабкого локального мінімуму (слабкого локального максимуму)***, *якщо існує таке число* $\varepsilon > 0$, *що для всіх допустимих функцій* $\overline{x}(t)$, *які задовольняють умови* $\left| x_k(t) - \overset{\wedge}{x}_k(t) \right| < \varepsilon$, $\left| x'_k(t) - \overset{\wedge}{x}'_k(t) \right| < \varepsilon$, ...,

$\left|x_k^{(m_k)}(t)-\overset{\wedge}{x}_k^{(m_k)}(t)\right|<\varepsilon$, $k=\overline{1,n}$ $\forall t\in[t_0,t_1]$ *виконується нерівність* $J\left(\overset{\wedge}{x}(t)\right)\le J(\overline{x}(t))$ $\left(J\left(\overset{\wedge}{x}(t)\right)\ge J(\overline{x}(t))\right)$.

**<u>Теорема</u> 10**[4]. *Нехай* $\overset{\wedge}{x}_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, *− розв'язок екстремальної задачі* (23). *Тоді функції* $\overset{\wedge}{x}_k(t)$ *задовольняють систему рівнянь Ейлера - Пуассона*

$$\sum_{j=0}^{m_k}(-1)^j\frac{d^j}{dt^j}L'_{x_k^{(j)}}\left(t,x_1(t),\ldots,x_1^{(m_1)}(t),\ldots,x_n^{(m_n)}(t)\right)=0,\ k=\overline{1,n}. \tag{24}$$

**<u>Означення</u> 36**. *Розв'язки системи диференціальних рівнянь* (24), *які задовольняють граничні умови, називають* ***екстремалями*** *задачі* (23).

Зауважимо, що порядки старших похідних функцій $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$ в задачі (23) можуть бути різними. Це приводить до різних порядків в системі (24). Кількість заданих граничних умов для кожної функції відповідає порядку її старшої похідної в підінтегральному виразі функціоналу задачі (23).

**Алгоритм застосування необхідних умов екстремуму в задачі (23)**.

1. Записати систему рівнянь Ейлера-Пуассона.
2. Знайти загальний розв'язок системи (24): $x_i=x_i(t,c_1,c_2,\ldots,c_{2nm})$, $i=1,2,\ldots,n$.
3. Визначити сталі $c_1,c_2,\ldots,c_{2nm}$ з граничних умов і записати вираз для екстремалі $\overset{\wedge}{x}(t)=\left(\overset{\wedge}{x}_1(t),\overset{\wedge}{x}_2(t),\cdots,\overset{\wedge}{x}_n(t)\right)$.

**Приклад 27.** Знайти екстремаль функціоналу

$$J(\overline{x}(t))=\int_0^1\left[(t+1)^3x_1''^2(t)+x_2'''^2(t)\right]dt,$$

яка задовольняє граничним умовам:

$$x_1(0)=1,\ x_2(0)=0,\ x_1(1)=\frac{1}{2},\ x_2(1)=1,$$

$$x_1'(0)=-1,\ x_2'(0)=0,\ x_1'(1)=-\frac{1}{4},\ x_2'(1)=3,\ x_2''(0)=0,\ x_2''(1)=6.$$

**Розв'язання.** Запишемо систему рівнянь Ейлера-Пуассона. Врахуємо, що порядок старшої похідної функції $x_1(t)$ рівний двом, а функції $x_2(t)$ − трьом. Так як

$$L=(t+1)^3x_1''^2+x_2'''^2,\ L'_{x_1}=0,\ L'_{x_1'}=0,\ L'_{x_1''}=2(t+1)^3x_1'',$$

$$L'_{x_2}=0,\ L'_{x_2'}=0,\ L'_{x_2''}=0,\ L'_{x_2'''}=2x_2''',$$

$$\frac{d}{dt}L'_{x_1'}=0,\ \frac{d}{dt}L'_{x_2'}=0,\ \frac{d}{dt}L'_{x_1''}=6(t+1)^2x_1''+2(t+1)^3x_1''',$$

$$\frac{d^2}{dt^2}L'_{x_1''}=12(t+1)x_1''+12(t+1)^2x_1'''+2(t+1)^3x_1^{(4)},\ \frac{d^2}{dt^2}L'_{x_2''}=0,\ \frac{d^3}{dt^3}L'_{x_2'''}=2x_2^{(6)},$$

то отримуємо:

$$L'_{x_1}-\frac{d}{dt}L'_{x_1'}+\frac{d^2}{dt^2}L'_{x_1''}=2(t+1)^3x_1^{(4)}+12(t+1)^2x_1'''+12(t+1)x_1''=0,$$

$$L'_{x_2}-\frac{d}{dt}L'_{x'_2}+\frac{d^2}{dt^2}L'_{x''_2}-\frac{d^3}{dt^3}L'_{x'''_2}=-2x_2^{(6)}=0.$$

Розв'яжемо систему рівнянь Ейлера-Пуассона:

$$x_2^{(6)}(t)=0,\ x_2^{(5)}(t)=\overline{c_1},\ x_2^{(4)}(t)=\overline{c_1}t+\overline{c_2},\ x_2'''(t)=\frac{\overline{c_1}}{2}t^2+\overline{c_2}t+\overline{c_3},$$

$$x_2''(t)=\frac{\overline{c_1}}{6}t^3+\frac{\overline{c_2}}{2}t^2+\overline{c_3}t+\overline{c_4},\ x_2'(t)=\frac{\overline{c_1}}{24}t^4+\frac{\overline{c_2}}{6}t^3+\frac{\overline{c_3}}{2}t^2+\overline{c_4}t+\overline{c_5},$$

$$x_2(t)=\frac{\overline{c_1}}{120}t^5+\frac{\overline{c_2}}{24}t^4+\frac{\overline{c_3}}{6}t^3+\frac{\overline{c_4}}{2}t^2+\overline{c_5}t+\overline{c_6}.$$

Розв'язуємо рівняння $2(t+1)^3x_1^{(4)}+12(t+1)^2x_1'''+12(t+1)x_1''=0$. Відмітимо, що воно має вигляд $\frac{d^2}{dt^2}L'_{x''_1}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}L'_{x''_1}\right)=0$, тому може бути переписано у формі

$$\frac{d}{dt}\left(6(t+1)^2x_1''+2(t+1)^3x_1'''\right)=0.$$

Звідси $6(t+1)^2x_1''+2(t+1)^3x_1'''=c_1$. Позначимо $y=x_1''$. Тоді отримаємо

$$6(t+1)^2y+2(t+1)^3y'=c_1,\ (t+1)^3y'+3(t+1)^2y=\frac{c_1}{2}.$$

Це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння першого порядку. Тому спочатку розв'язуємо відповідне однорідне рівняння:

$$(t+1)^3y'+3(t+1)^2y=0.$$

Очевидно, воно є рівнянням з розділеними змінними:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{3}{t+1}dt.$$

Інтегруючи обидві частини рівняння отримуємо

$$\ln|y|=-3\ln|t+1|+\ln c \text{ або } y_{зо}(t)=\frac{c}{(t+1)^3}.$$

Знайдемо загальний розв'язок неоднорідного рівняння методом варіації довільної сталої

$$y(t)=\frac{c(t)}{(t+1)^3},\ y'(t)=\frac{c'(t)}{(t+1)^3}-\frac{3c(t)\cdot(t+1)^2}{(t+1)^6}.$$

Підстановка $y$ та $y'$ в неоднорідне рівняння $(t+1)^3y'+3(t+1)^2y=\frac{c_1}{2}$ дає

$$c'(t)-\frac{3c(t)}{(t+1)}+\frac{3c(t)}{(t+1)}=\frac{c_1}{2} \text{ або } c'(t)=\frac{c_1}{2}.$$

Інтегруючи, отримаємо $c(t)=\frac{c_1}{2}t+c_2$. Звідси $y(t)=\left(\frac{c_1}{2}t+c_2\right)\frac{1}{(t+1)^3}$.

Переходимо до змінної $x_1$. Маємо $x_1''(t)=\left[\frac{c_1}{2}t+c_2\right]\frac{1}{(t+1)^3}=\frac{c_1t+2c_2}{2(t+1)^3}$. Звідси

$$x_1'(t)=-\frac{c_1(2t+1)}{4(t+1)^2}-\frac{c_2}{2}\frac{1}{(t+1)^2}+c_3,$$

$$x_1(t)=-\frac{c_1}{4}\left[\frac{1}{t+1}+2\ln|t+1|\right]+\frac{c_2}{2(t+1)}+c_3t+c_4.$$

Визначимо сталі інтегрування із граничних умов:

$$x_2''(0)=\overline{c_4}=0,\ x_2'(0)=\overline{c_5}=0,\ x_2(0)=\overline{c_6}=0,$$

$$x_2(1)\equiv\frac{\overline{c_1}}{120}+\frac{\overline{c_2}}{24}+\frac{\overline{c_3}}{6}=1,\ x_2'(1)\equiv\frac{\overline{c_1}}{24}+\frac{\overline{c_2}}{6}+\frac{\overline{c_3}}{2}=3,\ x_2''(1)\equiv\frac{\overline{c_1}}{6}+\frac{\overline{c_2}}{2}+\overline{c_3}=6,$$

звідси $\overline{c_1}=\overline{c_2}=\overline{c_4}=\overline{c_5}=\overline{c_6}=0$, $\overline{c_3}=6$.

Знаходимо сталі інтегрування $c_1,\dots,c_4$ з умов:

$$x_1(0)\equiv-\frac{c_1}{4}+\frac{c_2}{2}+c_4=1,\ x_1'(0)\equiv-\frac{c_1}{4}-\frac{c_2}{2}+c_3=-1,$$

$$x_1(1)\equiv-\frac{c_1}{4}\left[\frac{1}{2}+2\ln 2\right]+\frac{c_2}{4}+c_3+c_4=\frac{1}{2},\ x_1'(1)\equiv-\frac{c_1}{4}\cdot\frac{3}{4}-\frac{c_2}{2}\cdot\frac{1}{4}+c_3=-\frac{1}{4}.$$

Маємо: $c_1=0$, $c_2=2$, $c_3=0$, $c_4=0$. Запишемо рівняння шуканої екстремалі $\hat{x}(t)=\left(\hat{x}_1(t),\hat{x}_2(t)\right)$: $\hat{x}_1(t)=\dfrac{1}{t+1}$, $\hat{x}_2(t)=t^3$.

### 3.4 Функціонали, залежні від функцій декількох змінних

Нехай $G$ – замкнена обмежена область у просторі $\mathbf{R}^n$ з гладкою межею $\Gamma$. Розглянемо варіаційну задачу

$$J(z(x_1,x_2,\dots,x_n))=\int\limits_G\int L\left(x_1,\dots,x_n,z,\frac{\partial}{\partial x_1}z(x_1,\dots,x_n),\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}z(x_1,\dots,x_n)\right)dx_1\dots dx_n\to extr$$

(25)

у класі один раз неперервно диференційованих по всіх $n$ змінних функцій $z(x_1,x_2,\dots,x_n)$ з простору $\mathbf{C}^1(G)$, що набувають на границі $\Gamma$ області $G$ фіксованих значень

$$z(x_1,x_2,\dots,x_n)\big|_\Gamma=\varphi(x_1,x_2,\dots,x_n) \qquad (26).$$

Як і раніше, вважатимемо, що функція $L$ неперервно диференційована по сукупності змінних. Простір $\mathbf{C}^1(G)$ є лінійним нормованим простором з нормою

$$\|z(x_1,\dots,x_n)\|_1=\max\left\{\max_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in G}|z(x_1,\dots,x_n)|,\max_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in G}\left|\frac{\partial}{\partial x_1}z(x_1,\dots,x_n)\right|,\dots,\right.$$

$$\left.\max_{(x_1,x_2,\dots,x_n)\in G}\left|\frac{\partial}{\partial x_n}z(x_1,\dots,x_n)\right|\right\}.$$

$\mathbf{H}_0(G)$ – підпростір простору $\mathbf{C}^1(G)$ функцій $h(x_1,x_2,\dots,x_n)$, що задовольняють нульові граничні умови $h(x_1,x_2,\dots,x_n)=0$, $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\Gamma$. Якщо $z(x_1,x_2,\dots,x_n)$ допустима функція задачі (25), (26), то функції $z(x_1,x_2,\dots,x_n)+h(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $h(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbf{H}_0(G)$ також допустимі.

**Теорема 11**[4]. *Нехай* $\hat{z}(x_1,\dots,z_n)$, *– розв'язок варіаційної задачі* (25), (26). *Тоді функція* $\hat{z}(x_1,\dots,z_n)$ *задовольняє рівняння Ейлера - Остроградського*

$$L_z'-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{L_{p_k}'\right\}=0, \qquad (27)$$

де $p_k=\dfrac{\partial z}{\partial x_k}$, $k=\overline{1,n}$.

Із загального розв'язку рівняння в частинних похідних $n$-го порядку (27) виділяється частковий розв'язок $z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, який приймає на границі $\Gamma$ задані значення (26).

**Приклад 28.** Визначити екстремалі функціоналу

$$J(z(x,y)) = \iint_G \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2zf(x,y) \right] dxdy \to extr \, ,$$

$$z(x,y) = \varphi(x,y), \; (x,y) \in \Gamma .$$

**Розв'язання**. Складемо рівняння Ейлера – Остроградського. Воно має вигляд

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f(x,y) \text{ або } \Delta z = f(x,y).$$

Рівняння Ейлера – Остроградського цієї задачі перетворюється у рівняння Пуассона. Отже, екстремаль функціоналу – це неперервна функція $z(x,y)$, яка задовольняє рівняння Пуассона і набуває заданих значень $\varphi(x,y)$ на границі області $\Gamma$ .

**Питання для самоконтролю**

1. Дайте загальну постановку задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від векторозначних функцій.
2. Які криві називаються допустимими в найпростішій задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від векторозначних функцій?
3. Яким умовам має задовольняти підінтегральна функція в найпростішій задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від векторозначних функцій?
4. Яка функція називається допустимою варіацією в найпростішій задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від векторозначних функцій?
5. Сформулюйте означення сильного локального максимуму (мінімуму) функціоналу, залежного від векторозначних функцій.
6. Сформулюйте означення слабкого локального максимуму (мінімуму) функціоналу, залежного від векторозначних функцій.
7. Сформулюйте необхідну умову екстремуму в найпростішій задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від векторозначних функцій.
8. Опишіть алгоритм використання необхідних умов в найпростішій задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від векторозначних функцій.
9. Дайте загальну постановку задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від похідних вищих порядків однієї функції.
10. Які криві називаються допустимими в задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від похідних вищих порядків однієї функції?
11. Яка функція називається допустимою варіацією в найпростішій задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від похідних вищих порядків однієї функції?
12. Сформулюйте означення сильного локального максимуму (мінімуму) функціоналу, залежного від похідних вищих порядків однієї функції.
13. Сформулюйте означення слабкого локального максимуму (мінімуму) функціоналу, залежного від похідних вищих порядків однієї функції.
14. Сформулюйте необхідну умову екстремуму в найпростішій задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від похідних вищих порядків однієї функції.
15. Як називають розв'язки рівняння Ейлера – Пуассона?
16. Опишіть алгоритм використання необхідних умов в найпростішій задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від похідних вищих порядків однієї функції.
17. Дайте загальну постановку задачі варіаційного числення зі старшими похідними на множині векторних функцій.

18. Які криві називаються допустимими в задачі варіаційного числення зі старшими похідними на множині векторних функцій?

19. Яка функція називається допустимою варіацією в задачі зі старшими похідними на множині векторних функцій?

20. Сформулюйте означення сильного локального максимуму (мінімуму) функціоналу, залежного від похідних вищих порядків векторозначних функцій.

21. Сформулюйте означення слабкого локального максимуму (мінімуму) функціоналу, залежного від похідних вищих порядків векторозначних функцій.

22. Сформулюйте необхідну умову екстремуму в задачі варіаційного числення зі старшими похідними на множині векторних функцій.

23. Як називають розв'язки системи диференціальних рівнянь Ейлера – Пуассона?

24. Опишіть алгоритм використання необхідних умов в найпростішій задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від похідних вищих порядків векторозначних функцій.

25. Дайте загальну постановку задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від функцій багатьох змінних.

26. Яким умовам має задовольняти підінтегральна функція в задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від функцій багатьох змінних?

27. Сформулюйте необхідну умову екстремуму в задачі варіаційного числення для функціоналів, залежних від функцій багатьох змінних.

28. Який загальний вигляд має рівняння Ейлера – Остроградського?

**Завдання для самостійного виконання**

Знайти екстремалі функціоналів, залежних від похідних вищих порядків.

1. $J(x(t)) = \int\limits_0^1 \left(x^2 + 2x'^2 + x''^2\right)dt$,

$x(0) = 0$, $x(1) = 0$, $x'(0) = 1$, $x'(1) = -sh(1)$.

2. $J(x(t)) = \int\limits_{-1}^0 \left(240x - x'''^2\right)dt$,

$x(-1) = 1$, $x(0) = 0$, $x'(-1) = -4{,}5$, $x'(1) = -sh(1)$, $x''(-1) = 16$, $x''(0) = 0$.

3. $J(x(t)) = \int\limits_a^b (x + x'')dt$,

$x(a) = x_0$, $x(b) = x_1$, $x'(a) = x_0'$, $x'(b) = x_1'$.

4. $J(x(t)) = \int\limits_a^b \left(x'^2 + xx''\right)dt$,

$x(a) = A_1$, $x'(a) = A_2$, $x(b) = B_1$, $x'(b) = B_2$.

5. $J(x(t)) = \int\limits_0^1 \left(x'^2 + x''^2\right)dt$,

$x(0) = 0$, $x(1) = sh(1)$, $x'(0) = 1$, $x'(1) = ch(1)$.

6. $J(x(t)) = \int\limits_0^1 x''^2(t)dt \to extr$,

$x(0) = 0$, $x(1) = 1$, $x'(0) = 0$, $x'(1) = 0$.

7. $J(x(t)) = \int\limits_0^1 (x''(t) - 48x(t))dt \to extr$,

$x(0)=1$, $x(1)=0$, $x'(0)=-4$, $x'(1)=0$.

8. $J(x(t))=\int\limits_0^1 (t+1)^2 x''^2(t)dt \to extr$,

$x(0)=0$, $x(1)=\ln 2$, $x'(0)=1$, $x'(1)=1/2$.

9. $J(x(t))=\int\limits_0^1 e^{-t} x''^2(t)dt \to extr$,

$x(0)=0$, $x(1)=e$, $x'(0)=1$, $x'(1)=2e$.

Знайти екстремалі функціоналів, залежних від декількох функцій.

10. $J(x_1(t),x_2(t))=\int\limits_0^{\pi/4}\left(2x_2-4x_1^2+x_1'^2-x_2'^2\right)dt$,

$x_1(0)=0$, $x_1\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$, $x_2(0)=0$, $x_2\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$.

11. $J(x_1(t),x_2(t))=\int\limits_{-1}^{1}\left(2tx_1-x_1'^2+\frac{x_2'^3}{3}\right)dt$,

$x_1(1)=0$, $x_1(-1)=2$, $x_2(1)=1$, $x_2(-1)=-1$.

12. $J(x_1(t),x_2(t))=\int\limits_0^{\pi/2}\left(x_1'^2+x_2'^2-2x_1x_2\right)dt$,

$x_1(0)=0$, $x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $x_2(0)=0$, $x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

13. $J(x_1(t),x_2(t))=\int\limits_0^1\left(x_1'^2+x_2'^2+2x_1\right)dt$,

$x_1(0)=1$, $x_1(1)=\frac{3}{2}$, $x_2(0)=0$, $x_2(1)=1$.

14. $J(x_1(t),x_2(t))=\int\limits_{1/2}^1\left(x_1'^2-2tx_1x_2'\right)dt$,

$x_1\left(\frac{1}{2}\right)=2$, $x_1(1)=1$, $x_2\left(\frac{1}{2}\right)=15$, $x_2(1)=1$.

15. $\int\limits_0^{\pi/2}\left(x_1'^2(t)+x_2'^2(t)+2x_1(t)x_2(t)\right)dt \to extr$

$x_1(0)=0$, $x_1\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$, $x_2(0)=0$, $x_2\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.

16. $\int\limits_0^{\pi}\left(-2x_1^2(t)+x_1'^2(t)-x_2'^2(t)+2x_1(t)x_2(t)\right)dt \to extr$

$x_1(0)=0$, $x_1(\pi)=1$, $x_2(0)=0$, $x_2(\pi)=-1$.

17. $\int\limits_0^1\left(x_1'(t)x_2'(t)+6x_1(t)t+12x_2(t)t^2\right)dt \to extr$

$x_1(0)=0$, $x_1(1)=1$, $x_2(0)=0$, $x_2(1)=1$.

Написати рівняння Ейлера-Остроградського для наступних функціоналів.

18. $J[z(x,y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^4 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^4 + 12 z f(x,y) \right] dxdy$.

19. $J[z(x,y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy$.

20. $J[z(x,y)] = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 + 2z\varphi(x,y) \right] dxdy$.

## 4 ЗАДАЧА БОЛЬЦА. УМОВИ ТРАНСВЕРСАЛЬНОСТІ

Задачею Больца називається екстремальна задача без обмежень в просторі $\mathbf{C}^1([t_0,t_1],\mathbf{R})$:

$$B(x(t))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x(t),x'(t))dt+\varphi(x(t_0),x(t_1))\to extr \qquad (28)$$

Вважається, що підінтегральна функція $L(t,x(t),x'(t))$ задовольняє такі самі умови, як і в найпростішій задачі варіаційного числення, а функція $\varphi(x(t_0),x(t_1))$ неперервно диференційовна по кожній з двох змінних.

Функціонал $B$ називається ***функціоналом Больца***, функція $\varphi(x(t_0),x(t_1))$ – ***термінантом***. Допустимими є всі скалярні функції з простору $\mathbf{C}^1([t_0,t_1],\mathbf{R})$.

Аналогічно до найпростішої задачі варіаційного числення (задачі Лагранжа на множині функцій з закріпленими кінцями) формулюються означення слабкого і сильного екстремуму задачі (28).

**Теорема** 12 (необхідні умови екстремуму в задачі Больца). *Нехай функція* $\hat{x}(t)\in\mathbf{C}^1([t_0,t_1],\mathbf{R})$ *– розв'язок задачі* (28). *Тоді вона задовольняє рівняння Ейлера*

$$L'_x(t,x(t),x'(t))=\frac{d}{dt}L'_{x'}(t,x(t),x'(t))$$

*і умови трансверсальності*

$$L'_{x'}(t_0,x(t_0),x'(t_0))=\frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(x(t_0),x(t_1)),$$
$$L'_{x'}(t_1,x(t_1),x'(t_1))=-\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x(t_0),x(t_1)).$$

Як і в задачі Лагранжа на множині функцій з закріпленими кінцями, отримуємо диференціальне рівняння другого порядку і дві граничні умови – умови трансверсальності, з яких визначаються невідомі сталі в загальному розв'язку диференціального рівняння другого порядку.

Якщо в (28) $\varphi(x(t_0),x(t_1))=0$, то задача Больца перетворюється в задачу Лагранжа на множині функцій з вільними кінцями.

Необхідні умови екстремуму у векторній задачі Больца

$$B(\bar{x}(t))=\int_{t_0}^{t_1}L(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t))dt+\varphi(x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0),x_1(t_1),\ldots,x_n(t_1))\to extr \quad (29)$$

мають такий же вигляд, як і в скалярній задачі.

**Теорема** 13. *Нехай векторозначна функція* $\hat{\bar{x}}(t)\in\mathbf{C}^1([t_0,t_1],\mathbf{R}^n)$ *– розв'язок задачі (29). Тоді компоненти* $\hat{x}_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, *функції* $\hat{\bar{x}}(t)$ *задовольняють систему рівнянь Ейлера*

$$L'_{x_j}(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t))=\frac{d}{dt}L'_{x_j'}(t,x_1(t),\ldots,x_n(t),x_1'(t),\ldots,x_n'(t)),\ j=1,2,\ldots,n,$$

*і умови трансверсальності*

$$L'_{x_j'}\left(t_k,x_1(t_k),\ldots,x_n(t_k),x_1'(t_k),\ldots,x_n'(t_k)\right)=(-1)^k\frac{\partial}{\partial x_j(t_k)}\varphi(x_1(t_0),\ldots,x_n(t_0),x_1(t_1),\ldots,x_n(t_1)),$$

$k=0,1,\ j=1,2,\ldots,n.$

Розглянемо задачу Больца на множині функцій багатьох змінних. Для зручності (простоти) будемо досліджувати на екстремум функціонал

$$B(z(x,y)) = \iint_G L(x,y,z,z_x,z_y)dxdy + \int_{\partial G} F(s,z,z_s)ds \tag{30}$$

у класі $\mathbf{C}^1(G)$ один раз неперервно диференційовних в області $G$ функцій $z(x,y)$ двох змінних, $(x,y)\in G$. Функція $L(x,y,z,z_x,z_y)$ як і функція $F(s,z,z_s)$ неперервно диференційована.

**<u>Теорема</u> 14**. *Якщо функція* $\hat{z}(x,y)\in \mathbf{C}^1(G)$ − *розв'язок задачі* (30), *то вона задовольняє рівняння Ейлера- Остроградського*

$$L'_z - \frac{\partial}{dx}\{L'_p\} - \frac{\partial}{dy}\{L'_q\} = 0,$$

де $p = \frac{\partial}{\partial x}z(x,y)$, $q = \frac{\partial}{\partial y}z(x,y)$, $L = L(x,y,z,z_x,z_y)$,

*та граничні умови*

$$L'_{z_x}\frac{dy}{ds} - L'_{z_y}\frac{dx}{ds} + F'_z - \frac{d}{ds}F'_{z_s} = 0,\ (x,y)\in \partial G.$$

**Алгоритм розв'язання задачі Больца.**

1. Записати необхідні умови екстремуму:
   а) рівняння Ейлера;
   б) умови трансверсальності.
2. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера. Обчисливши значення невідомих констант з умов трансверсальності, отримуємо допустимі екстремалі.
3. Перевірити допустимі екстремалі, чи будуть вони розв'язками задачі Больца.

У випадку функціоналів Больца, що залежать від функцій багатьох змінних або векторозначних функцій в пункті 1 алгоритму записуємо рівняння Ейлера − Остроградського в першому випадку, систему рівнянь Ейлера − в другому відповідно.

**Приклад 29**. Розв'язати задачу

$$B(x(t)) = \int_0^1 \left((x'(t))^2 + (x(t))^2\right)dt - 2x(1)sh(1) \to extr.$$

**Розв'язання.** Необхідні умови екстремуму:

а) рівняння Ейлера

$L'_x - \frac{d}{dt}L'_{x'} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x - \frac{d}{dt}(2x') = 0 \quad \Rightarrow \quad x'' - x = 0$, загальний розв'язок $x = c_1 ch(t) + c_2 sh(t)$;

б) умови трансверсальності $L'_{x'}(0) = \varphi'_{x(0)}$, $L'_{x'}(1) = -\varphi'_{x(1)}$ $\Rightarrow$ $x'(0) = 0$, $2x'(1) = 2sh(1)$ $\Rightarrow$ $x'(0) = 0$, $x'(1) = sh(1)$.

$x' = c_1 sh(t) + c_2 ch(t) \Rightarrow x'(0) = c_2 \Rightarrow c_2 = 0$.

$x'(1) = c_1 sh(1) = sh(1) \Rightarrow c_1 = 1 \Rightarrow \hat{x} = sh(t)$ − екстремаль.

Покажемо, що на цій екстремалі досягається локальний мінімум задачі. Дійсно, для будь-якої функції $h \in \mathbf{C}^1([0,1],\mathbf{R})$

$$\Delta B = B\left(\hat{x} + h\right) - B\left(\hat{x}\right) = \int_0^1 \left(2\hat{x}'h' + (h')^2 + 2\hat{x}h + h^2\right)dt - 2h(1)sh(1).$$

$2\int_0^1 \hat{x}'h'dt = 2\int_0^1 \hat{x}'dh = 2\hat{x}'h\Big|_0^1 - 2\int_0^1 h\hat{x}''dt = 2sh(1)\cdot h(1) - 2\int_0^1 \hat{x}hdt$. Скористаємось тим, що $\hat{x}'(0) = sh(0) = 0$ і $\hat{x}'' = \hat{x}$. Підставивши в $\Delta B$, одержимо:

$$\Delta B = 2sh(1)\cdot h(1)+\int_0^1\left((h')^2+2\hat{x}h+h^2-2\hat{x}h\right)dt-2h(1)sh(1)=\int_0^1\left((h')^2+h^2\right)dt\geq 0 \quad\Rightarrow$$

$\hat{x}\in loc\min$. Легко бачити, що $S_{\max}=\infty$.

**Приклад 30**. Розв'язати задачу

$$B(x(t))=\int_0^{\pi/2}\left((x'(t))^2-(x(t))^2\right)dt+x^2(0)-x^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+4x\left(\frac{\pi}{2}\right)\to extr.$$

**Розв'язання.** Необхідні умови екстремуму:

а) рівняння Ейлера

$-2x-\dfrac{d}{dt}(2x')=0 \quad\Rightarrow\quad x''+x=0$, загальний розв'язок $x'=c_1\cos t-c_2\sin t$; $x=c_1\sin t+c_2\cos t$

б) умови трансверсальності $L'_{x'}(0)=\varphi'_{x(0)}$, $L'_{x'}\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\varphi'_{x\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ $\Rightarrow$ $x'(0)=x(0)$, $2x'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2x\left(\frac{\pi}{2}\right)-4$ $\Rightarrow$ $c_1=c_2$, $-c_2=c_1-2$ $\Rightarrow$ $c_1=c_2=1$ $\Rightarrow$ $\hat{x}=\sin t+\cos t$ − шукана єдина допустима екстремаль. Для перевірки того, чи є $\hat{x}(t)$ розв'язком задачі складемо різницю

$$\Delta B=B\left(\hat{x}+h\right)-B\left(\hat{x}\right)=\int_0^{\pi/2}\left(2\hat{x}'h'+(h')^2-2\hat{x}h-h^2\right)dt+2x(0)h(0)-h^2(0)-$$
$$-2x\left(\frac{\pi}{2}\right)h\left(\frac{\pi}{2}\right)-h^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+4h\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Скориставшись тим, що $\hat{x}''+\hat{x}=0$, отримаємо

$$2\int_0^{\pi/2}\hat{x}'h'dt=2\int_0^{\pi/2}\hat{x}'dh=2\hat{x}'h\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}h\hat{x}''dt=2(\cos t-\sin t)\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\pi/2}\hat{x}''hdt=-2h\left(\frac{\pi}{2}\right)-2h(0)+$$
$$+2\int_0^{\pi/2}\hat{x}hdt.$$

$$\Delta B=-2h\left(\frac{\pi}{2}\right)-2h(0)++2\int_0^{\pi/2}\hat{x}hdt+\int_0^{\pi/2}(h')^2dt-2\int_0^{\pi/2}\hat{x}hdt-\int_0^{\pi/2}h^2dt+2h(0)-h^2(0)-2h\left(\frac{\pi}{2}\right)-h^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+$$
$$+4h\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\pi/2}(h')^2dt-\int_0^{\pi/2}h^2dt+2h(0)+h^2(0)-h^2\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Якщо $h\equiv\varepsilon$, то $\Delta B=-\frac{\pi}{2}\cdot\varepsilon^2<0$, якщо $h=\begin{cases}\varepsilon(1-t),\ 0\leq t\leq 1,\\ 0,\ 1\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$, то $\Delta B=\varepsilon^2-\varepsilon^2/2+\varepsilon^2-0>0$.

Таким чином, $\hat{x}\notin loc\ extr$.

**Приклад 31.** Знайти екстремалі функціоналу

$$B(x_1(t),x_2(t))=\int_0^1\left(x_1'(t)x_2'(t)+x_1(t)x_2(t)\right)dt+x_1(0)x_2(1)+x_1(1)x_2(0).$$

**Розв'язання**. Складемо систему рівнянь Ейлера. Оскільки

$$L'_{x_1} = x_2,\ L'_{x'_1} = x'_2,\ \frac{d}{dt}L'_{x'_1} = x''_2,$$

$$L'_{x_2} = x_1,\ L'_{x'_2} = x'_1,\ \frac{d}{dt}L'_{x'_2} = x''_1,$$

то $\begin{cases} x''_1 = x_1, \\ x''_2 = x_2. \end{cases}$ Загальний розв'язок системи: $\hat{x}_1(t) = c_1e^t + c_2e^t$, $\hat{x}_2(t) = c_3e^t + c_4e^t$.

Введемо позначення: $\hat{L}'_{x'_i}(t_0) = L'_{x'_i}\left(t_0, \hat{\bar{x}}(t_0), \hat{\bar{x}}'(t_0)\right)$, $\hat{L}'_{x'_i}(t_1) = L'_{x'_i}\left(t_1, \hat{\bar{x}}(t_1), \hat{\bar{x}}'(t_1)\right)$, $\hat{\varphi}'_{x_i(t_0)} = \varphi'_{x_i}\left(\hat{\bar{x}}(t_0), \hat{\bar{x}}'(t_0)\right)$, $\hat{\varphi}'_{x_i(t_1)} = \varphi'_{x_i}\left(\hat{\bar{x}}(t_1), \hat{\bar{x}}'(t_1)\right)$, $i = 1,2$. Щоб скласти умови трансверсальності, обчислимо

$$\hat{L}'_{x'_1}(0) \equiv \hat{x}'_2(0) = c_3 - c_4,\ \hat{\varphi}'_{x_1(0)} \equiv \hat{x}_2(1) = c_3e + c_4e^{-1},$$
$$\hat{L}'_{x'_1}(1) \equiv \hat{x}'_2(1) = c_3e - c_4e^{-1},\ \hat{\varphi}'_{x_1(1)} \equiv \hat{x}_2(0) = c_3 + c_4,$$
$$\hat{L}'_{x'_2}(0) \equiv \hat{x}'_1(0) = c_1 - c_2,\ \hat{\varphi}'_{x_2(0)} \equiv \hat{x}_1(1) = c_1e + c_2e^{-1},$$
$$\hat{L}'_{x'_2}(1) \equiv \hat{x}'_1(1) = c_1e + c_2e^{-1},\ \hat{\varphi}'_{x_2(1)} \equiv \hat{x}_1(0) = c_1 + c_2.$$

Умови трансверсальності матимуть вигляд

$$\hat{L}'_{x'_1}(0) = \hat{\varphi}'_{x_1(0)} \Leftrightarrow c_3 - c_4 = c_3e + c_4e^{-1},$$
$$\hat{L}'_{x'_1}(1) = -\hat{\varphi}'_{x_1(1)} \Leftrightarrow c_3e - c_4e^{-1} = -c_3 - c_4,$$
$$\hat{L}'_{x'_2}(0) = \hat{\varphi}'_{x_2(0)} \Leftrightarrow c_1 - c_2 = c_1e + c_2e^{-1},$$
$$\hat{L}'_{x'_2}(1) = -\hat{\varphi}'_{x_2(1)} \Leftrightarrow c_1e + c_2e^{-1} = -c_1 - c_2.$$

Отримали систему рівнянь

$$\begin{cases} c_3(1-e) - c_4\left(1+e^{-1}\right) = 0, \\ c_3(1+e) + c_4\left(1-e^{-1}\right) = 0, \\ c_1(1-e) - c_2\left(1+e^{-1}\right) = 0, \\ c_1(1+e) + c_2\left(1-e^{-1}\right) = 0, \end{cases}$$

з яких випливає, що $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Отже, допустима екстремаль задачі Больца $\hat{\bar{x}}(t) = \left(\hat{x}_1(t), \hat{x}_2(t)\right)$: $\hat{x}_1(t) \equiv 0$, $\hat{x}_2(t) \equiv 0$.

**Приклад 32.** Визначити екстремалі функціоналу

$$B(z(x,y)) = \iint\limits_G \left(z_x^2 + z_y^2\right)dxdy + \iint\limits_\Gamma \sigma z^2 ds \to extr.$$

**Розв'язання**. Складемо рівняння Ейлера – Остроградського. Воно має вигляд $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$. Отже, екстремалі функціоналу – це розв'язки задачі Діріхле з граничними умовами $\dfrac{\partial z}{\partial n} + \sigma z = 0$, $(x,y) \in \Gamma$, де через $\dfrac{\partial z}{\partial n}$ позначена операція диференціювання по зовнішній нормалі до кривої $\hat{z}(x,y)$.

**Питання для самоконтролю**

1. Яку екстремальну задачу називають задачею Больца?
2. Що називають термінантом в задачі Больца?
3. Яким умовам має задовольняти підінтегральна функція в задачі Больца?
4. Яким умовам має задовольняти термінант в задачі Больца?
5. Яка функція називається допустимою варіацією в задачі Больца?
6. Сформулюйте означення сильного локального максимуму (мінімуму) для задачі Больца.
7. Сформулюйте означення слабкого локального максимуму (мінімуму) для задачі Больца.
8. Сформулюйте необхідну умову екстремуму в задачі Больца.
9. Дайте означення екстремалей задачі Больца.
10. Які умови називаються умовами трансверсальності?
11. Дайте загальну постановку задачі Больца від векторних функцій.
12. Сформулюйте необхідну умову оптимальності для задачі Больца у випадку векторних функцій.
13. Дайте загальну постановку задачі Больца на множині функцій багатьох змінних.
14. Сформулюйте необхідну умову оптимальності для задачі Больца на множині функцій багатьох змінних.
15. Опишіть алгоритм розв'язання задачі Больца.

**Завдання для самостійного виконання**

Розв'язати задачі:

1. $\int_0^1 \left(x'^2(t) - x(t)\right)dt + x^2(1) \to extr$.

2. $\int_0^1 x'^2(t)dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \to extr$.

3. $\int_0^1 \left(x'^2(t) + x^2(t)\right)dt - 2sh(1)x(1) \to extr$.

4. $\int_1^2 t^2 x'^2(t)dt - 2x(1) + x^2(2) \to extr$.

5. $\int_0^\pi \frac{x'^2(t) - x(t)}{2}dt - x^2(0) - \frac{1}{2}x^2(\pi) \to extr$.

6. $\int_0^1 \left(x'^2(t) - 2x(t)\right)dt \to extr$.

7. $\int_0^\pi \left(x'^2(t) + x^2(t) - 4x(t)\sin t\right)dt + 2x^2(0) + 2x(\pi) - x^2(\pi) \to extr$.

8. $\int_0^{\pi/2} \left(x'^2(t) - x^2(t)\right)dt + x^2(0) - x^2\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4x\left(\frac{\pi}{2}\right) \to extr$.

9. $\int_1^e 2x'(t)\left(tx'(t) + x(t)\right)dt + 3x^2(1) - x^2(e) - 4x(e) \to extr$.

10. $\int_0^T \left(x'^2(t)+x^2(t)\right)dt+\alpha x^2(T)\to extr$.

Знайти допустимі екстремалі:

11. $\int_0^3 4x'^2(t)x^2(t)dt+x^4(0)-8x(3)\to extr$.

12. $\int_0^1 e^{x(t)}x'^2(t)dt+4e^{x(0)}+32e^{-x(1)}\to extr$.

13. $\int_0^1 \left(x_1'(t)x_2'(t)+x_1(t)x_2(t)\right)dt+x_1(0)x_2(1)+x_1(1)x_2(0)\to extr$.

14. $\int_0^1 \left({x_1}^2(t)+{x_2}^2(t)+2x_1'(t)x_2'(t)\right)dt\to extr$.

15. $\int_0^\pi \left(x_1'(t)x_2'(t)-x_1(t)x_2(t)\right)dt+x_1(\pi)+{x_2}^2(0)\to extr$.

## 5 ЗАДАЧІ НА УМОВНИЙ ЕКСТРЕМУМ. ІЗОПЕРИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА З ЗАКРІПЛЕНИМИ КІНЦЯМИ

Ізопериметричною задачею у варіаційному численні називається задача на умовний екстремум

$$J_0(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(t, x(t), x'(t))dt \to extr \tag{31}$$

$$x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1 \tag{32}$$

$$J_i(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f_i(t, x(t), x'(t))dt = \alpha_i,\ i = \overline{1,m} \tag{33}$$

**Означення 37**. *Умови* (33) *називаються ізопериметричними.*

Як і в основній варіаційній задачі робимо припущення, що функції $f_j(t, x(t), x'(t))$, $j = 0,1,\ldots,m$, неперервні разом з похідними $f'_{jx}(t, x(t), x'(t))$, $f'_{jx'}(t, x(t), x'(t))$, $j = 0,1,\ldots,m$, по сукупності змінних.

**Означення 38**. *Функції* $x(t) \in \mathbf{C}^1[t_0, t_1]$ *називаються допустимими в задачі* (31)-(33), *якщо вони задовольняють ізопериметричні умови* (33) *та граничні умови* (32).

З урахуванням цього уточнення аналогічно до задачі Лагранжа формулюються означення слабкого і сильного локального мінімуму задачі (31)–(33).

**Теорема 15**(про необхідні умови екстремуму функціоналу ізопериметричної задачі) [4]. *Нехай функції* $f_j(t, x(t), x'(t))$, $f'_{jx}(t, x(t), x'(t))$, $f'_{jx'}(t, x(t), x'(t))$, $j = 0,1,\ldots,m$, *неперервні по сукупності змінних. Якщо допустима функція* $\hat{x}(t)$ *є функцією, на якій досягається слабкий локальний екстремум задачі* (31)–(33), *тоді існують множники Лагранжа* $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \ldots, \hat{\lambda}_m$, *не всі одночасно рівні нулю і такі, що для них і функції* $\hat{x}(t)$ *виконується рівняння Ейлера*

$$\Lambda_x'(t, x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt}\Lambda_{x'}'(t, x(t), x'(t)) = 0, \tag{34}$$

*де* $\Lambda(t, x(t), x'(t)) = \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(t, x, x')$ – *лагранжіан задачі* (31)–(33).

**Наслідок 1**. *Рівняння Ейлера* (34) *визначають екстремалі задачі безумовного екстремуму функціоналу*

$$J^*(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda(t, x(t), x'(t))dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=0}^{m} \lambda_j f_j(t, x(t), x'(t))dt.$$

Усі функції $f_j(t, x(t), x'(t))$, $j = 0,1,\ldots,m$, входять в $J^*(x(t))$ симетрично. Тому екстремалі задачі (31), (32) та задачі

$$J_s(x(t)) = \int_{t_0}^{t_1} f_s(t, x(t), x'(t))dt \to extr$$

за умов

$$\int_{t_0}^{t_1} f_j(t, x(t), x'(t))dt = \alpha_j,\ j = 0,\ldots,s-1, s+1,\ldots,m,$$

збігаються при будь-якому $s$. У цьому полягає ***принцип взаємності***. Наприклад, задача про максимальну площу, яка обмежується кривою заданої довжини, та задача про мінімум довжини замкненої кривої, яка обмежує задану площу, взаємні і мають спільні екстремалі.

**Правило множників Лагранжа розв'язання ізопериметричних задач.**

1. Скласти лагранжіан $\Lambda(t, x(t), x'(t), \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = \sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j f_j(t, x(t), x'(t))$.

2. Записати необхідні умови екстремуму: рівняння Ейлера для лагранжіана: $\Lambda_x'\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \vec{\lambda}\right) = \dfrac{d}{dt}\Lambda_{x'}'\left(t, \hat{x}(t), \hat{x}'(t), \vec{\lambda}\right)$.

3. Знайти загальний розв'язок рівняння Ейлера. Як і в загальній схемі Лагранжа, тут слід розглянути окремо випадок $\lambda_0 = 0$ і $\lambda_0 \neq 0$, причому в останньому випадку $\lambda_0$ можна покласти довільному додатному числу $c$. З граничних та ізопериметричних умов шукаємо константи і отримуємо допустимі екстремалі.

4. Відшукати розв'язок задачі серед допустимих екстремалей або довести, що розв'язків не існує.

Зауваження. Вперше ізопериметричну задачу (31)-(33) розв'язав Ейлер у 1744 році. Він довів справедливість співвідношення (34) методом ламаних.

**Приклад 33**. Знайти розв'язок задачі

$$J(x(t)) = \int_0^1 (x'(t))^2 dt \to extr,\ \int_0^1 tx dt = 0,\ x(0) = -4,\ x(1) = 4.$$

**Розв'язання.**

Складаємо лагранжіан: $\Lambda(t, x(t), x'(t), \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 (x')^2 + \lambda_1 tx$.

Рівняння Ейлера: $\lambda_1 t - 2\lambda_0 x'' = 0$.

І-ий випадок. $\lambda_0 = 0$. Тоді $\lambda_1 t = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$. Отже, такий випадок неможливий, оскільки одночасно всі множники Лагранжа не можуть дорівнювати нулю.

ІІ-ий випадок. $\lambda_0 \neq 0$. Нехай $\lambda_0 = \dfrac{1}{2}$. Тоді $x'' = \lambda_1 t \Rightarrow x = \dfrac{\lambda_1}{4}t^3 + c_1 t + c_2$.

$x(0) = -4 \Rightarrow c_2 = -4$; $x(1) = 4 \Rightarrow \dfrac{\lambda_1}{4} + c_1 - 4 = 0$, $\lambda_1 + 4c_1 = 16$.

$\displaystyle\int_0^1 t\left(\frac{\lambda_1}{4}t^3 + c_1 t - 4\right)dt = 0 \Rightarrow \left(\frac{\lambda_1}{20}t^5 + \frac{c_1}{3}t^3 - 2t^2\right)\Big|_0^1 = 0 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{20} + \frac{c_1}{3} - 2 = 0$. Звідси і з умови $\lambda_1 + 4c_1 = 16$ випливає, що $\lambda_1 = 20$, $c_1 = 3$.

Отже, визначили множники Лагранжа і знайшли єдину допустиму екстремаль $\hat{x} = 5t^3 + 3t - 4$. Тепер перевіряємо, чи на знайденій екстремалі досягається мінімум функціоналу $J(x(t))$. Для цього розглянемо вираз $\Delta J = J\left(\hat{x} + h\right) - J\left(\hat{x}\right)$, $h \in \mathbf{C}_0^1[0,1]$.

$$\Delta J=\int_0^1\left(\hat{x}'+h'\right)^2dt-\int_0^1\left(\hat{x}'\right)^2dt=2\int_0^1\hat{x}'h'dt+\int_0^1(h')^2dt\ge 2\int_0^1\hat{x}'h'dt=2\int_0^1\hat{x}'dh=2\hat{x}'h\Big|_0^1-2\int_0^1\hat{x}''hdt=$$
$$=-2\int_0^1 15thdt=-30\int_0^1 thdt=0.$$

Тут $2\hat{x}'h\Big|_0^1=0$, так як $h(0)=h(1)=0$ ( $x(0)=-4$, $(x+h)(0)=-4\ \Rightarrow\ h(0)=0$ ) і $\int_0^1 thdt=0$ так як $\int_0^1 txdt=\int_0^1 t(x+h)dt=0\ \Rightarrow\ \int_0^1 thdt=0$. Отже, $\hat{x}\in abs\min$, так як $\hat{x}(t)$ – єдина екстремаль.

**Приклад 34**. Розв’язати задачу

$$J(x(t))=\int_0^1(x'(t))^2dt\to extr,\ \int_0^1 xdt=1,\ \int_0^1 txdt=0\ x(0)=x(1)=0.$$

**Розв'язання.**

Складаємо лагранжіан: $\Lambda=\lambda_0(x')^2+\lambda_1x+\lambda_2tx$.

Рівняння Ейлера: $\lambda_1+\lambda_2t-2\lambda_0x''=0$.

І-ий випадок. $\lambda_0=0$. Тоді $\lambda_1+\lambda_2t=0\Rightarrow\ \lambda_1=\lambda_2=0$. Отже, допустимих екстремалей в цьому випадку немає.

ІІ-ий випадок. $\lambda_0\ne0$. Нехай $\lambda_0=\frac{1}{2}$. Тоді $x''=\lambda_1+\lambda_2t\ \Rightarrow$ $x=\frac{\lambda_1}{2}t^2+\frac{\lambda_2}{6}t^3+c_1t+c_2$.

$x(0)=0\ \Rightarrow\ c_2=0$; $x(1)=0\ \Rightarrow\ \frac{\lambda_1}{2}+\frac{\lambda_2}{6}+c_1=0$, $3\lambda_1+\lambda_2+6c_1=0$.

$$\int_0^1\left(\frac{\lambda_1}{2}t^2+\frac{\lambda_2}{6}t^3+c_1t\right)dt=0\ \Rightarrow\ \left(\frac{\lambda_1}{6}t^3+\frac{\lambda_2}{24}t^4+\frac{c_1}{2}t^2\right)\Big|_0^1=0\ \Rightarrow\ \frac{\lambda_1}{6}+\frac{\lambda_2}{24}+\frac{c_1}{2}=0\ \Rightarrow$$
$4\lambda_1+\lambda_2+12c_1=0$.

$$\int_0^1 t\left(\frac{\lambda_1}{2}t^2+\frac{\lambda_2}{6}t^3+c_1t\right)dt=0\ \Rightarrow\ \left(\frac{\lambda_1}{8}t^4+\frac{\lambda_2}{30}t^5+\frac{c_1}{3}t^3\right)\Big|_0^1=0\ \Rightarrow\ \frac{\lambda_1}{8}+\frac{\lambda_2}{30}+\frac{c_1}{3}=0.$$

Отримуємо систему $\begin{cases}3\lambda_1+\lambda_2+6c_1=0,\\4\lambda_1+\lambda_2+12c_1=0,\\\frac{\lambda_1}{8}+\frac{\lambda_2}{30}+\frac{c_1}{3}=0,\end{cases}$ звідки знаходимо $\lambda_1=120$, $\lambda_2=-576$, $c_1=36$. Отже, $\hat{x}=60t^3-96t^2+36t$ – допустима екстремаль. Перевіримо, чи є $\hat{x}(t)$ розв’язком задачі. $h\in \mathbf{C}_0^1[0,1]$, $\int_0^1 hdt=0$, $\int_0^1 thdt=0$.

$$\Delta J=J\left(\hat{x}+h\right)-J\left(\hat{x}\right)=\int_0^1\left(\hat{x}'+h'\right)^2dt-\int_0^1\left(\hat{x}'\right)^2dt=2\int_0^1\hat{x}'h'dt+\int_0^1(h')^2dt\ge2\int_0^1\hat{x}'h'dt=2\int_0^1\hat{x}'dh=$$
$$=2\hat{x}'h'\Big|_0^1-2\int_0^1\hat{x}''hdt=-2\int_0^1\hat{x}''hdt=-\int_0^1(360t-192)hdt=-360\int_0^1 thdt+192\int_0^1 hdt=0.$$

Отже, внаслідок єдиності екстремалі $\hat{x}(t) \in abs\min$.

**Приклад 35.** Знайти допустимі екстремалі ізопериметричної задачі

$$\int_0^1 (x_1 + x_2)\,dt \to extr,\ \int_0^1 x_1' x_2' dt = 5,\quad x_1(0) = x_2(0) = 0,\quad x_1(1) = 1,\quad x_2(1) = 2.$$

**Розв'язання.** Складаємо лагранжіан: $\Lambda = \lambda_0(x_1 + x_2) + \lambda_1 x_1' x_2'$.

Виписуємо систему рівнянь Ейлера: $\begin{cases} \lambda_0 - \lambda_1 x_2'' = 0, \\ \lambda_0 - \lambda_1 x_1'' = 0. \end{cases}$.

I-ий випадок. $\lambda_0 = 0$. Тоді $\begin{cases} \lambda_1 x_2'' = 0, \\ \lambda_1 x_1'' = 0. \end{cases}$

Одержали два випадки:

а) $\lambda_1 = 0$. Отже, допустимих екстремалей в цьому випадку немає;

б) $\begin{cases} x_2'' = 0, \\ x_1'' = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 t + c_2, \\ x_2 = c_3 t + c_4. \end{cases}$ Для відшукання невідомих сталих з граничних умов і ізопериметричної умови одержуємо систему $\begin{cases} c_2 = 0, \\ c_4 = 0, \\ c_1 = 1, \\ c_3 = 2, \\ c_1 c_3 = 5. \end{cases}$ Дана система несумісна, отже, допустимих екстремалей в цьому випадку також не існує.

II-ий випадок. $\lambda_0 \neq 0$. Нехай $\lambda_0 = 1$. Тоді $\begin{cases} 1 - \lambda_1 x_2'' = 0, \\ 1 - \lambda_1 x_1'' = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{2\lambda_1} t^2 + c_1 t + c_2, \\ x_2 = \dfrac{1}{2\lambda_1} t^2 + c_3 t + c_4. \end{cases}$

$x_1(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0$; $x_1(1) = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2\lambda_1} + c_1 = 1$; $x_2(0) = 0 \Rightarrow c_4 = 0$; $x_2(1) = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{2\lambda_1} + c_3 = 2$.

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\lambda_1} t + c_1\right)\left(\frac{1}{\lambda_1} t + c_3\right) dt = 5 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{1}{3\lambda_1^2} t^3 + \frac{c_3}{2\lambda_1} t^2 + \frac{c_1}{2\lambda_1} t^2 + c_1 c_2 t\right)\Bigg|_0^1 = 5 \quad\Rightarrow$$

$$\frac{1}{3\lambda_1^2} + \frac{c_3}{2\lambda_1} + \frac{c_1}{2\lambda_1} + c_1 c_3 = 5.$$

Отримуємо систему $\begin{cases} \dfrac{1}{3\lambda_1^2} + \dfrac{c_3}{2\lambda_1} + \dfrac{c_1}{2\lambda_1} + c_1 c_3 = 5, \\ \dfrac{1}{2\lambda_1} + c_1 = 1, \\ \dfrac{1}{2\lambda_1} + c_3 = 2. \end{cases}$ Звідки знаходимо $\lambda_1 = \pm\dfrac{1}{6}$, $c_3 = 2 \mp 3$, $c_1 = 1 \mp 3$. Отже, $\begin{cases} x_1 = \pm 3t^2 + (1 \mp 3)t, \\ x_2 = \pm 3t^2 + (2 \mp 3)t. \end{cases}$

**Питання для самоконтролю**

1. Яку екстремальну задачу в варіаційному численні називають ізопериметричною?
2. Яким умовам мають задовольняти підінтегральні функції в цій задачі?
3. Які функції називаються допустимими в ізопериметричній задачі?

4. Сформулюйте означення сильного локального максимуму (мінімуму) для ізопериметричної задачі.

5. Сформулюйте означення слабкого локального максимуму (мінімуму) для ізопериметричної задачі.

6. Сформулюйте теорему про необхідні умови екстремуму функціоналу в ізопериметричній задачі.

7. Який вираз називається лагранжіаном задачі?

8. Як будується лагранжіан ізопериметричної задачі?

9. Сформулюйте правило множників Лагранжа розв'язання ізопериметричних задач.

**Завдання для самостійного виконання**

Розв'язати ізопериметричні задачі

1. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x dt = 0$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$;

2. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x\, dt = 3$, $x(0) = 1$, $x(1) = 6$;

3. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 tx\, dt = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$;

4. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 tx\, dt = 0$, $x(0) = -4$, $x(1) = 4$;

5. $\int_0^1 (x')^2\, dt \to extr$, $\int_0^1 x\, dt = 1$, $\int_0^1 tx\, dt = 0$, $x(0) = x(1) = 0$;

6. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 x dt = -\frac{3}{2}$, $x(0) = 2$, $x(1) = -14$;

7. $\int_0^\pi (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^\pi x \cos t dt = \frac{\pi}{2}$, $x(0) = 1$, $x(\pi) = -1$;

8. $\int_0^\pi (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^\pi x \sin t dt = 0$, $x(0) = 1$, $x(\pi) = 1$;

9. $\int_0^\pi x \sin t dt \to extr$, $\int_0^\pi (x')^2 dt = \frac{3\pi}{2}$, $x(0) = 1$, $x(\pi) = \pi$;

10. $\int_0^\pi (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^\pi x \cos t dt = \frac{3\pi}{2}$, $\int_0^\pi x \sin t dt = \pi + 2$, $x(0) = 2$, $x(\pi) = 0$;

11. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 xe^{-t} dt = 0$, $x(0) = 2e + 1$, $x(1) = 2$;

12. $\int_0^1 (x')^2 dt \to extr$, $\int_0^1 xe^{t} dt = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$;

13. $\int_0^1 \left((x')^2 + x^2\right) dt \to extr$, $\int_0^1 xe^{t} dt = \frac{e^2 + 1}{4}$, $x(0) = 0$, $x(1) = e$;

14. $\int_0^1 \left((x')^2 + x^2\right) dt \to extr$, $\int_0^1 xe^{-t} dt = \frac{1 - 3e^{-2}}{4}$, $x(0) = 0$, $x(1) = e^{-1}$;

15. $\int_1^2 t^2 (x')^2 dt \to extr$, $\int_1^2 tx\, dt = \frac{7}{3}$, $x(1) = 1$, $x(2) = 2$;

16. $\int_1^2 t^3(x')^2\,dt \to extr$, $\int_1^2 x\,dt = 2$, $x(1) = 4$, $x(2) = 1$;

17. $\int_0^1 (x')^2\,dt \to extr$, $\int_0^1 x^2\,dt = 2$, $x(0) = x(1) = 0$.

Знайти допустимі екстремалі

18. $\int_0^{\pi} \left((x')^2 - x^2\right)dt \to extr$, $\int_0^{\pi} x\cos t\,dt = 1$, $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$;

19. $\int_0^{\pi/2} \left((x')^2 - x^2\right)dt \to extr$, $\int_0^{\pi/2} x\sin t\,dt = 1$, $x(0) = 0$, $x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$;

20. $\int_0^1 (x')^2\,dt \to extr$, $\int_0^1 (x - x')^2\,dt = \frac{1}{12}$, $x(0) = 0$, $x(1) = \frac{1}{4}$;

21. $\int_{-a}^{a} x\left(1 + (x')^2\right)^{\frac{1}{2}}\,dt \to extr$, $\int_{-a}^{a} (x - x')^2\,dt = l$, $x(-a) = x(a) = 0$;

22. $\int_0^1 x_1' x_2'\,dt \to extr$, $\int_0^1 x_1\,dt = 1$, $x_1(0) = x_1(1) = 0$, $\int_0^1 x_2\,dt = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$;

23. $\int_0^1 x_1' x_2'\,dt \to extr$, $\int_0^1 tx_1\,dt = \int_0^1 tx_2\,dt = 0$, $x_1(0) = x_1(1) = x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$;

24. $\int_0^1 (x_1 + x_2)\,dt \to extr$, $\int_0^1 x_1' x_2'\,dt = 0$, $x_1(0) = x_2(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(1) = -3$;

25. $\int_0^1 t(x_1 - x_2)\,dt \to extr$, $\int_0^1 x_1' x_2'\,dt = -\frac{4}{5}$, $x_1(0) = x_2(0) = x_2(1) = 0$, $x_1(1) = 2$;

26. $\int_0^1 \left((x_1')^2 + (x_2')^2 - 4tx_2' - 4x_2\right)dt \to extr$, $\int_0^1 \left((x_1')^2 - tx_1' - (x_2')^2\right)dt = 2$, $x_1(0) = 0$, $x_1(1) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_2(1) = 1$.

**СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ**

1. Васильева А.Б. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А.Б. Васильева, Г.Н. Медведев, А.Н. Тихонов, Т.А. Уразгильдина. − М.: Физматлит, 2003, 432 с.
2. Краснов М.Л. Вариационное исчисление / М.Л. Краснов, А.И. Киселев , Г.И. Макаренко. – М.: Наука, 1973, 191 с.
3. Лаврентьев М.А. Курс вариационного исчисления. Том 1, Часть II. / М.А. Лаврентьев, Л.А. Люстерник. – Гостехиздат, 1950, 400 с.
4. Моклячук М.П. Варіаційне числення. Екстремальні задачі. Підручник/ М.П. Моклячук. – К., 2004, 384 с.
5. Пантелеев А.В. Методы оптимизации в примерах и задачах. Изд. второе, испр./ А.В. Пантелеев, А.Т. Летова. – М.: Высш. школа, 2005, 544 с.
6. Перестюк М.О. Варіаційне числення та методи оптимізації. Навч. Посібник / М.О. Перестюк, О.М. Станжицький, О.В. Капустян, Ю.В. Ловейкін. – К., 2010, 121 с.

ЗМІСТ

Відповідальний за випуск: завідувач кафедрою системного аналізу і теорії
оптимізації к. ф.-м. н., доц. Кузка О.І.

Автори: к. ф.-м. н., доц. Гренджа В.І.,
к. ф.-м. н., доц. Брила А.Ю.,
викл. Ломага М.М.

Рецензенти: к. ф.-м. н., доц. Червак О.О.,
к. ф.-м. н., доц. Мулеса О.Ю.

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ**
до практичних занять з курсів
«МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ» та «ВАРІАЦІЙНЕ ЧИСЛЕННЯ І МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ»

Частина 1

**ЗАДАЧІ КЛАСИЧНОГО ВАРІАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ. МЕТОД ВАРІАЦІЙ ДЛЯ ЗАДАЧ З НЕРУХОМИМИ ГРАНИЦЯМИ**