УДК 517.9

**О. А. Резуненко** (Ужгородський нац. ун-т)

# ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ У СИСТЕМАХ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

The article devoted substantiate method userednennja for two dimension autonomous systems in impulse active in case, when point subject impulse active twice after period .

Дану статтю присвячено обгрунтуванню методу усереднення для двовимірних автономних систем з імпульсною дією у випадку, коли точка піддається імпульсній дії двічі за період.

Для практичного застосування важливим є вивчення диференціальних рівнянь з імпульсною дією, які зв'язані з потребами теорії керування, радіотехніки, біології, медицини.

В $[1,2]$ за допомогою асимптотичного методу Крилова-Боголюбова [3] розглянуто траєкторії матеріальної точки, яка рухається за законом

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad x \neq x_0, \tag{1}$$

і піддається імпульсній дії при проходженні положення $x = x_0$. В [4] обгрунтовується законність застосування даного методу для розглядуваних рухів.

Розглянемо коливну систему (1) з імпульсною дією

$$\Delta\dot{x}\,|_{x=x_0} = (\dot{x}_+ - \dot{x}_-)|_{x=x_0} = \begin{cases} \varepsilon I^0(\dot{x}_-), & x = x_0, \quad \dot{x}_- > 0, \\ \varepsilon I_0(\dot{x}_-), & x = x_0, \quad \dot{x}_- < 0, \end{cases} \tag{2}$$

де $\dot{x}_-$, $\dot{x}_+$ – швидкості точки до і після дії миттєвого імпульсу відповідно, $\varepsilon$ – малий додатній параметр. Систему (1), (2) можна інтерпретувати як рух осцилятора (1), на який кожен раз при проходженні положення $x = x_0$ діє миттєвий імпульс, який збільшує швидкість осцилятора на величину $\varepsilon I^0(\dot{x}_-)$ при $\dot{x} > 0$ і зменшує швидкість осцилятора на величину $\varepsilon I_0(\dot{x}_-)$ при $\dot{x} < 0$.

Припустимо, що система (1), (2) має періодичний розв'язок, який в момент $t = 0$ приймає значення $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) > 0$, а в момент $t = t^*$ – значення $x(t^*) = x_0$, $\dot{x}(t^*) < 0$.

Позначимо через $\nu$ частоту коливань даного розв'язку. Моменти $\tau_k$ імпульсної дії для кожного такого розв'язку визначаються відношеннями $\nu\tau_{2k} = 2k\pi$, $\nu\tau_{2k+1} = \nu t^* + 2k\pi$, $k = 1, 2, 3, ...$ а скачки швидкості $\Delta\dot{x}$ в ці моменти – рівностями

$$\Delta\dot{x} = \begin{cases} \varepsilon I^0, & \dot{x}_- > 0, \\ \varepsilon I_0, & \dot{x}_- < 0. \end{cases}$$

З періодичності розв'язку випливає, що величини $I^0, I_0$ є сталими при всіх $\nu\tau_i$, $i = 1, 2, 3, \ldots$. Таким чином, періодичний розв'язок системи (1), (2) задовольняє рівняння

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon f(x, \dot{x}), \quad \nu t \neq 2k\pi, \quad \nu t \neq \nu t^* + 2k\pi, \tag{3}$$

і умову

$$\Delta\dot{x} = \begin{cases} \varepsilon I^0, & \nu t = 2k\pi, \\ \varepsilon I_0, & \nu t = \nu t^* + 2k\pi, \end{cases} \tag{4}$$

де $k$ ціле. З іншого боку, нехай система (3), (4) має для деяких $\nu$ і $t_0$ періодичні розв'язки з періодом $2\pi$ відносно $\nu t$. Очевидно, ці розв'язки є розв'язками системи (1), (2), якщо

$$\begin{aligned} &x(0)=x_0,\ I^0=I(\dot{x}_-),\ x(\tfrac{2k\pi}{\nu}-0)=x_0,\ \dot{x}_-=\dot{x}(\tfrac{2k\pi}{\nu}-0)>0,\ \dot{x}_+(0)>0,\\ &x(t^*)=x_0,\ I_0=I(\dot{x}_-),\ x(t^*+\tfrac{2k\pi}{\nu})=x_0,\ \dot{x}_-=\dot{x}(t^*+\tfrac{2k\pi}{\nu})<0,\ \dot{x}_+(t^*)<0. \end{aligned} \tag{5}$$

Таким чином, щоб знайти періодичні розв'язки системи (1), (2), нам потрібно знайти такі періодичні розв'язки системи (3), (4) періоду $2\pi$ відносно $\nu t$ і вибрати параметри $\nu$ і $t_0$, $t^*$, які б задовольняли співвідношення (5). Періодичний рорзв'язок системи (3) шукатимемо за умови, що частота періодичних розвя'зків системи (1), (2) близька до частоти власних коливань системи (1), тобто $\nu \approx \omega$.

Представимо $\nu$ у вигляді

$$\nu^2 = \omega^2 + \varepsilon\bar{\Delta}, \tag{6}$$

де $\bar{\triangle}$ – деяка стала, яку потрібно визначити. Систему (3), (4) запишемо у вигляді

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon\left[\bar{\triangle}x + f(x,\dot{x})\right],\ \nu t \neq 2k\pi,\ \nu t \neq \nu t^* + 2k\pi, \tag{7}$$

$$\Delta\dot{x} = \begin{cases} \varepsilon I^0, & \nu t = 2k\pi, \\ \varepsilon I_0, & \nu t = \nu t^* + 2k\pi. \end{cases} \tag{8}$$

Використовуючи формалізм узагальнених функцій, від системи (7), (8) перейдемо до рівняння

$$\ddot{x} + \nu^2 x = \varepsilon\left[\bar{\triangle}x + f(x,\dot{x})\right] + \varepsilon I^0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - \frac{2k\pi}{\nu}\right) + \varepsilon I_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(t - t^* - \frac{2k\pi}{\nu}\right),$$

а від нього, враховуючи властивості дельта-функції – до рівняння

$$\ddot{x}+\nu^2x=\varepsilon\left[\bar{\triangle}x+f(x,\dot{x})\right]+\varepsilon\frac{I^0\nu}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\nu t\right)+\varepsilon\frac{I_0\nu}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\cos k\nu(t-t^*)\right). \tag{9}$$

У системі (9) виконаємо заміну змінних

$$x = \varepsilon\frac{I^0}{\pi\nu}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\nu t}{k^2-1}\right) + \varepsilon\frac{I_0}{\pi\nu}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\nu(t-t^*)}{k^2-1}\right) + z. \tag{10}$$

Тоді, відносно $z$ отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} &\ddot{z}+\nu^2 z=\varepsilon\left[\bar{\triangle}z+f(z+\varepsilon I^0\varphi(\nu t)+\varepsilon I_0\varphi(\nu(t-t^*)), \dot{z}+\varepsilon I^0\dot{\varphi}(\nu t)+\varepsilon I_0\dot{\varphi}(\nu(t-t^*)))+\right.\\ &\left.+\varepsilon\bar{\triangle}I^0\varphi(\nu t)+\varepsilon\bar{\triangle}I_0\varphi(\nu(t-t^*))\right]+\tfrac{\varepsilon I^0\nu}{\pi}\cos\nu t+\tfrac{\varepsilon I_0\nu}{\pi}\cos\nu(t-t^*), \end{aligned} \tag{11}$$

у якому введено наступні позначення

$$\varphi(\nu t) = \frac{1}{\pi\nu}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\nu t}{k^2-1}\right), \quad \varphi\nu(t-t^*) = \frac{1}{\pi\nu}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\nu(t-t^*)}{k^2-1}\right).$$

Співвідношення (5) відносно змінної $z$ матимуть вигляд

$$z(0)=x_0-\varepsilon I^0\varphi(0)-\varepsilon I_0\varphi(\nu t^*),\ I^0=I(\dot z(0))-\varepsilon I_0\dot\varphi(\nu t^*),\ z(0)>\varepsilon I_0\varphi(\nu t^*),$$
$$z(t^*)=x_0-\varepsilon I^0\varphi(\nu t^*)-\varepsilon I_0\varphi(0),\ I_0=I(\dot z(t^*))+\varepsilon I^0\dot\varphi(\nu t^*),\ z(t^*)<-\varepsilon I^0\dot\varphi(\nu t^*). \tag{12}$$

Таким чином, нам потрібно знайти періодичні розв'язки $z(t)$ рівняння (11) періоду $2\pi$ відносно $\nu t$, які задовольняли б умови (12). Щоб знайти ці умови , виконаємо в (11), (12) заміну змінних

$$z=a\cos\psi,\quad \dot z=-a\nu\sin\psi,\quad \psi=\nu t+\theta, \tag{13}$$

де $a=a(t),\ \theta=\theta(t)$.

Остаточно прийдемо до наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\nu}\left[\bar\triangle a\cos\psi+f(a\cos\psi+\varepsilon I^0\varphi(\nu t)+\varepsilon I_0\varphi(\nu(t-t^*)),-a\nu\sin\psi+\right.$$
$$\left.+\varepsilon I^0\dot\varphi(\nu t))++\varepsilon I_0\varphi(\nu(t-t^*))+\varepsilon\bar\triangle I^0\varphi(\nu t)+\varepsilon\bar\triangle I_0\varphi(\nu(t-t^*))\right]\sin\psi-$$
$$-\frac{\varepsilon I^0}{\pi}\cos\nu t\sin\psi-\frac{\varepsilon I_0}{\pi}\cos\nu(t-t^*)\sin\psi,$$
$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\varepsilon}{a\nu}\left[\bar\triangle a\cos\psi+f(a\cos\psi+\varepsilon I^0\varphi(\nu t)+\varepsilon I_0\varphi(\nu(t-t^*)),-a\nu\sin\psi+\right.$$
$$\left.+\varepsilon I^0\dot\varphi(\nu t))+\varepsilon I_0\dot\varphi(\nu(t-t^*))+\varepsilon\bar\triangle I^0\varphi(\nu t)+\varepsilon\bar\triangle I_0\varphi(\nu(t-t^*))\right]\cos\psi-$$
$$-\frac{\varepsilon I_0}{a\pi}\cos\nu(t-t^*)\cos\psi. \tag{14}$$

При цьому умови (12) для змінних $a,\theta$ матимуть вигляд

$$a_0\cos\theta_0=x_0-\varepsilon I^0\varphi(0)-\varepsilon I_0\varphi(\nu t^*),\ I^0=I(-a_0\nu\sin\theta_0-\varepsilon I_0\dot\varphi(\nu t^*)),$$
$$-a_0\nu\sin\theta_0>\varepsilon I_0\dot\varphi(\nu t^*),$$
$$a^*\cos(\nu t^*+\theta_0)=x_0-\varepsilon I^0\varphi(\nu t^*)-\varepsilon I_0\varphi(0),\ I_0=I(-a^*\nu\sin(\nu t^*+\theta^*)+\varepsilon I^0\dot\varphi(\nu t^*)),$$
$$-a^*\nu\sin(\nu t^*+\theta^*)<-\varepsilon I^0\dot\varphi(\nu t^*). \tag{15}$$

Припустимо, що функція $f(x,\dot x)$ в області

$$\nu^2\alpha^2\le\nu^2x^2+y^2\le\beta^2\nu^2,$$

задовольняє умову Ліпшиця відносно $x,\dot x$. Тоді система (14) є при малих $\varepsilon$ T - системою $T=\frac{2\pi}{\nu}$ [5] в проміжку

$$0<\alpha\le a\le\beta. \tag{16}$$

.

Згідно [5] будь-яка внутрішня точка смуги (16) має $\Delta$ - сталу і ця стала визначається з точністю до величин другого порядку малості з системи

$$\Delta_1=-\frac{\varepsilon}{\nu}A(a_0)-\frac{\varepsilon I^0}{2\pi}\sin\theta_0-\frac{\varepsilon I_0}{2\pi}\sin(\nu t^*+\theta_0)+\varepsilon^2\ldots,$$
$$\Delta_2=-\frac{\varepsilon\bar\Delta}{2\nu}-\frac{\varepsilon}{a_0\nu}B(a_0)-\frac{\varepsilon I^0}{2a_0\pi}cos\theta_0-\frac{\varepsilon I_0}{2a_0\pi}cos(\nu t^*+\theta_0)+\varepsilon^2\ldots,$$

де

$$
\begin{aligned}
A(a) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi)\sin\psi d\psi,\\
B(a) &= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi)\cos\psi d\psi.
\end{aligned}
\tag{17}
$$

При цьому, розв'язок системи (14) є періодичним з періодом $2\pi$ відносно $\nu t$, якщо $a_0$ і $\theta_0$ задовольняють умови

$$
-\frac{\varepsilon}{\nu}A(a_0) - \frac{\varepsilon I^0}{2\pi}\sin\theta_0 - \frac{\varepsilon I_0}{2\pi}\sin(\nu t^* + \theta_0) + \varepsilon^2 \ldots = 0, \tag{18}
$$

$$
-\frac{\varepsilon\bar{\triangle}}{2\nu} - \frac{\varepsilon}{a_0\nu}B(a_0) - \frac{\varepsilon I^0}{2a_0\pi}cos\theta_0 - \frac{\varepsilon I_0}{2a_0\pi}cos(\nu t^* + \theta_0) + \varepsilon^2 \ldots = 0. \tag{19}
$$

Більш того, вказаний періодичний розв'язок є границею послідовності

$$
\begin{aligned}
a_n(t) &= a_0 - \tfrac{\varepsilon}{\nu}\int_0^t [F_1(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon) - \overline{F_1(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon)}]dt,\\
\theta_n(t) &= \theta_0 - \tfrac{\varepsilon}{\nu}\int_0^t [F_2(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon) - \overline{F_2(t, a_{n-1}(t), \theta_{n-1}(t), \varepsilon)}]dt.
\end{aligned}
\tag{20}
$$

де $-\frac{\varepsilon}{\nu}F_1(t, a, \theta)$ і $-\frac{\varepsilon}{\nu}F_2(t, a, \theta)$ правими частинами, відповідно, першого і другого рівнянь системи (14),

$$
\overline{F(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt,\ T = \frac{2\pi}{\nu},\ n = 1, 2, \ldots.
$$

Зокрема, при $n = 1$ з (20) знаходимо з точністю до величин порядку $\varepsilon^2$

$$
\begin{aligned}
a(t) = a_0 &- \tfrac{\varepsilon\bar{\Delta}}{\nu^2}a_0\tfrac{\cos 2\theta_0 - \cos 2(\nu t + \theta_0)}{4} - \tfrac{\varepsilon}{\nu^2}\int_{\theta_0}^{\nu t + \theta_0} f(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi)\sin\psi d\psi -\\
&- \tfrac{\varepsilon I^0}{\pi\nu}\tfrac{\cos\theta_0 - \cos(2\nu t + \theta_0)}{4} - \tfrac{\varepsilon I_0}{\pi\nu}\tfrac{\cos(\nu t^* - \theta_0) - \cos(2\nu t + \theta_0 - \nu t^*)}{4},\\
\theta(t) = \theta_0 &- \tfrac{\varepsilon\bar{\Delta}}{\nu^2}a_0\tfrac{\sin 2(\nu t + \theta_0) - \sin 2\theta_0}{4} - \tfrac{\varepsilon}{a_0\nu^2}\int_{\theta_0}^{\nu t + \theta_0} f(a\cos\psi, -a\nu\sin\psi)\cos\psi d\psi -\\
&- \tfrac{\varepsilon I^0}{a_0\pi\nu}\tfrac{\sin(2\nu t + \theta_0) - \sin\theta_0}{4} - \tfrac{\varepsilon I_0}{a_0\pi\nu}\tfrac{\sin(2\nu t + \theta_0 - \nu t^*) + \sin(\nu t^* - \theta_0)}{4}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Оскільки $\Delta$ - є неперервною функцією від $a_0$, $\theta_0$, параметрів $I^0$, $I_0$, $\bar{\Delta}$, $\varepsilon$ і задовольняє умову Ліпшиця відносно $a_0$, $\theta_0$, $I^0$, $I_0$, $\bar{\triangle}$, $\varepsilon$, то розв'язок рівняння (19) завжди може бути представлений у вигляді

$$
\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(a_0, \theta_0, I^0, I_0, \varepsilon), \tag{22}
$$

причому функція $\bar{\Delta}$ неперервна по сукупності всіх своїх змінних в області їх зміни і задовольняє в цій області умову Ліпшиця відносно $a_0$, $\theta_0$, $I^0$, $I_0$, $\varepsilon$. З (19) видно, що з точністю до величин порядку $\varepsilon$ маємо

$$
\bar{\Delta}(a_0, \theta_0, I^0, I_0, \varepsilon) = \bar{\Delta}(a_0, \theta_0, I^0, I_0, 0) = -2\frac{B(a_0)}{a_0} - \frac{\omega I^0}{a_0\pi}\cos\theta_0 - \frac{\omega I_0}{a_0\pi}\cos(\nu t^* + \theta_0). \tag{23}
$$

З точністю до $\varepsilon$ з (18) отримаємо співвідношення для початкових значень періодичних розв'язків системи (14) які визначаються рівністю

$$
A(a_0) + \frac{\omega I^0}{2\pi}\sin\theta_0 + \frac{\omega I_0}{2\pi}\sin(\nu t^* + \theta_0) = 0. \tag{24}
$$

Очевидно періодичними розв'язками системи (1),(2) є лише ті значення періодичних розв'язків системи (14), початкові значення яких задовольняють співвідношення (15). Тому для відшукання цих значень достатньо розв'язати систему співвідношень (15), (18).

Оскільки $a_0$ береться із відрізка (16), то з (15) випливає, що

$$\begin{aligned}&\cos\theta_0 = \tfrac{x_0-\varepsilon I^0\varphi(0)-\varepsilon I_0\varphi(\nu t^*)}{a_0}, \quad \sin\theta_0 = -\sqrt{1-\left(\tfrac{x_0-\varepsilon I^0\varphi(0)-\varepsilon I_0\varphi(\nu t^*)}{a_0}\right)^2},\\ &\cos(\nu t^*+\theta_0)=\tfrac{x_0-\varepsilon I^0\varphi(\nu t^*)-\varepsilon I_0\varphi(0)}{a_0}, \ \sin(\nu t^*+\theta_0)=\sqrt{1-\left(\tfrac{x_0-\varepsilon I^0\varphi(\nu t^*)-\varepsilon I_0\varphi(0)}{a_0}\right)^2}.\end{aligned} \tag{25}$$

то при малих $\varepsilon$ з урахуванням (25), нерівності з (15) матимуть вигляд

$$\nu\sqrt{a_0^2-(x_0-\varepsilon I^0\varphi(0)-\varepsilon I_0\varphi(\nu t^*))^2} > \varepsilon I_0\dot\varphi(\nu t^*),$$
$$-\nu\sqrt{a_0^2-(x_0-\varepsilon I^0\varphi(\nu t^*)-\varepsilon I_0\varphi(0))^2} < -\varepsilon I^0\dot\varphi(\nu t^*).$$

Підставимо (25) в співвідношення яке залишилося з (15), вважаючи що $|x_0| < a$, отримаємо замість (15) співвідношення (25) і рівняння

$$\begin{aligned}I^0 &= I(\nu\sqrt{a_0^2-(x_0-\varepsilon I^0\varphi(0)-\varepsilon I_0\varphi(\nu t^*))^2}) - \varepsilon I_0\dot\varphi(\nu t^*),\\ I_0 &= I(-\nu\sqrt{a_0^2-(x_0-\varepsilon I^0\varphi(\nu t^*)-\varepsilon I_0\varphi(0))^2}) + \varepsilon I^0\dot\varphi(\nu t^*).\end{aligned} \tag{26}$$

Нехай функція $I(\dot x)$ задовольняє умову Ліпшиця на відрізку $0 \le \dot x \le \nu\beta$, тоді при малих $\varepsilon$ одержуємо

$$\begin{aligned}I^0 &= I^0(a_0,\varepsilon),\\ I_0 &= I_0(a_0,\varepsilon).\end{aligned} \tag{27}$$

причому функції $I^0(a_0,\varepsilon)$, $I_0(a_0,\varepsilon)$ також задовольняють умову Ліпшиця по $a_0$, $\varepsilon$. З (26) видно, що з точністю до величини порядку $\varepsilon$

$$\begin{aligned}I^0(a_0,\varepsilon) &= I^0(a_0,0) = I(\omega\sqrt{a_0^2-x_0^2}),\\ I_0(a_0,\varepsilon) &= I_0(a_0,0) = I(-\omega\sqrt{a_0^2-x_0^2}).\end{aligned} \tag{28}$$

Отже, систему співвідношень (15), (18), (22) ми звели до системи (18), (22), (25), (27).

Підставимо (27) в (25), виразимо $\theta_0$ через $a_0$ а потім (27) і (25) – в (22), виразимо $\bar\Delta$ через $a_0$. Поступаючи аналогічно, з урахуванням (6), (28), отримаємо вираз

$$A(a_0) - \frac{I(\omega\sqrt{a_0^2-x_0^2})\omega}{2\pi a_0}\sqrt{a_0^2-x_0^2} + \frac{I(-\omega\sqrt{a_0^2-x_0^2})\omega}{2\pi a_0}\sqrt{a_0^2-x_0^2} + \varepsilon\ldots. \tag{29}$$

Оскільки ліві частини (27) неперервні відносно $a_0$, $\varepsilon$, то вираз (29) має при малих $\varepsilon$ розв'язок, якщо функція

$$D(a_0) = A(a_0) - \frac{I(\omega\sqrt{a_0^2-x_0^2})\omega}{2\pi a_0}\sqrt{a_0^2-x_0^2} + \frac{I(-\omega\sqrt{a_0^2-x_0^2})\omega}{2\pi a_0}\sqrt{a_0^2-x_0^2}, \tag{30}$$

прийме на інтервалі $\alpha < a_0 < \beta$ значення різних знаків [6]. Крім того, розв'язок системи (29) неперервний по $\varepsilon$ з точністю до величин порядку $\delta(\varepsilon)$, де $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, і визначаються розв'язками рівняння

$$D(a_0) = 0. \tag{31}$$

Отже, для забезпечення існування періодичних розв'язків системи (1), (2), достатньо, щоб рівняння (31) мало розв'язок, який належав би відрізку $|x_0| < \alpha < a_0 \le \beta$ разом із деяким своїм $\rho$ - околом, і щоб цей розв'язок не був точкою екстремуму функції $D(a_0)$.

Враховуючи формули (6), (23), (25), (28) отримаємо значення для частоти періодичного розв'язку

$$\nu = \omega + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\bar{\Delta}}{\omega} + \varepsilon^2 + \ldots = \omega - \varepsilon\left(\frac{B(a_0)}{a_0\omega} - \frac{I(\omega\sqrt{a_0^2 - x_0^2})x_0}{2\pi a_0^2} - \frac{I(-\omega\sqrt{a_0^2 - x_0^2})x_0}{2\pi a_0^2}\right). \tag{32}$$

Отже, згідно замін (10), (13), періодичні розв'язки системи (1), (2), з точністю до величин порядку $\delta(\varepsilon)$ визначаються виразом

$$\begin{gathered} x(t) = \varepsilon\frac{I(\omega\sqrt{a_0^2 - x_0^2})}{\pi\omega}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\nu(t+s)}{k^2 - 1}\right) + \varepsilon\frac{I(-\omega\sqrt{a_0^2 - x_0^2})}{\pi\omega}\left(\frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\cos k\nu(t - t^* + s)}{k^2 - 1}\right) + \\ + a(t+s)\cos(\nu(t+s) + \theta(t+s)), \end{gathered} \tag{33}$$

де $a(t)$, $\theta(t)$ – вигляду (21), $\nu$ – приймає значення (32), $a_0$ – є коренем рівняння (31), $s$ – довільна стала. Таким чином доведено таку теорему.

**Теорема.** Нехай в системі (1), (2) функції $f(x, \dot{x})$ і $I(\dot{x})$ визначені, неперервні, і задовольняють умову Ліпшиця відносно своїх змінних в області

$$\alpha^2 \le x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega^2} \le \beta^2, \quad \text{де } |x_0| < \alpha \le \beta, \quad \alpha, \beta = \text{const}.$$

Крім того, нехай рівняння (31) має розв'язок $a = a_0$, який належить відрізку $\alpha \le a_0 \le \beta$ разом з деяким своїм $\rho$ - околом, і такий що не є точкою екстремуму.

Тоді існує $\varepsilon_0 > 0$, що для всіх $\varepsilon < \varepsilon_0$ система рівнянь (1),(2) має одно параметричну сімю періодичних розв'язків

$$x(t) = x(\omega_1(t+s), \varepsilon) = a(\omega_1(t+s), \varepsilon)\cos\varphi(\omega_1(t+s)),$$

що задовольняє нерівності

$$|a(t) - a_0| + |\omega_1 - \omega - \varepsilon\triangle(a_0)| \le \eta(\varepsilon),$$

в якій $s$ – довільна стала, $\eta(\varepsilon)$ – стала, що прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$.

1. *Самойленко А. М.* Применение метода усреднения для исследования колебаний, возбуждаемых мгновеными импульсами, в автоколебательных системах 2-го порядка с малым параметром, УМЖ. – 1961. - Т.13, №3.
2. *Самойленко А. М.* Исследование дифференциальных уравнений с "нерегулярной"правой частью, III. Konferenz uber nichtlineare Schwingungen, Akademie – Verlag, Berlin, 1965.
3. *Боголюбов Н.Н., Митропольський Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, Физматгиз, М., 1958. – 218с.
4. *Самойленко А. М.* Об одном случае непрерывной зависимости решений диференциальных уравнений от параметра, УМЖ. – 1962. - Т.11, №3.
5. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных диференциальных уравнений, I, УМЖ. – 1965. – Т.17, №4. – С.82 – 93.
6. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных диференциальных уравнений, II, УМЖ. – 1966. – Т.18, №2. – С.50 – 59.

Одержано 25.10.2011