УДК 517.9

Г. Я. Семчишин (Ужгородський нац. ун-т)

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ ВИРОДЖЕНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

In this paper the general solutions of degenerative systems of differential equations were built. Necessary and sufficient conditions for the existence were obtain and the solution of degenerative boundary-value problems were found. The results are illustrated in the example.

У даній роботі побудовано загальні розв'язки вироджених систем диференціальних рівнянь. Одержано необхідні та достатні умови існування та знайдено розв'язки вироджених крайових задач. Результати проілюстровано на прикладі.

Під час розв'язання різноманітних задач, що виникають у таких прикладних галузях як теорія електричних кіл, оптимальне управління, автоматичне регулювання, гідродинаміка, теплотехніка тощо, часто стикаються з виродженими системами диференціальних рівнянь. Такі системи були розглянуті в багатьох роботах [1–4].

Останнім часом з'явилася значна кількість праць, в яких розроблені ефективні методи знаходження розв'язків вироджених крайових задач для систем диференціальних рівнянь. Так в [4] отримано умови існування та знайдено розв'язки вироджених нетерових крайових задач у припущенні, що вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми.

У даній роботі досліджуються вироджені крайові задачі для систем диференціальних рівнянь у випадку, коли при похідній шуканої функції знаходиться блочно-діагональна матриця, одним з блоків якої є нільпотентний блок Жордана. Для таких вироджених крайових задач одержано необхідні та достатні умови існування та знайдено розв'язки у критичному і некритичному випадках.

1. Постановка задачі. Розглянемо вироджену лінійну неоднорідну крайову задачу:

$$B_0(t)\frac{dz}{dt} = A_0(t)z + f(t), \quad t \in [a,b], \tag{1}$$

$$lz(\cdot) = d, \tag{2}$$

де $A_0(t)$, $B_0(t)$ – $((n+m)\times(n+m))$-вимірні матриці, $rankB_0(t) = n+m-1$ $\forall t \in [a,b]$, J – $(m\times m)$-вимірна стала матриця, $f(t)$ – $(n+m)$-вимірна вектор-функція, які мають наступну структуру:

$$B_0(t) = \begin{bmatrix} B_1(t) & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad A_0(t) = \begin{bmatrix} A_1(t) & 0 \\ 0 & A_2(t) \end{bmatrix}, \quad f(t) = \begin{bmatrix} f^{(1)}(t) \\ f^{(2)}(t) \end{bmatrix},$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$A_1(t)$, $B_1(t)$ – $(n \times n)$-вимірні, $A_2(t)$ – $(m \times m)$-вимірна матриці, компоненти яких є дійсними неперервними на [a,b] функціями : $A_1(t), A_2(t), B_1(t) \in C[a,b]$; $det B_1(t) \neq 0$; $f^{(1)}(t)$ – n-вимірна, $f^{(2)}(t)$ – m-вимірна вектор-функції із простору $C[a,b]$, d – $(n+m)$-вимірний стовпець, який має наступну структуру

$$d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix},$$

де d_1 – n-вимірний, d_2 – m-вимірний сталі вектор-стовпці; l – лінійний векторний функціонал визначений на просторі $(n+m)$-вимірних, неперервних на [a,b] вектор-функцій: $l = col(l_1, l_2)$; $l : C[a,b] \to R^{n+m}$; $l_1 = col(l_{1_1}, \ldots, l_{1_n})$; $l_1 : C[a,b] \to R^n$; $l_2 = col(l_{2_1}, \ldots, l_{2_m})$; $l_2 : C[a,b] \to R^m$; $-\infty < a \leq t \leq b < \infty$.

Під розв'язком виродженої крайової задачі (1) – (3) будемо розуміти неперервно диференційовну на $[a,b]$ $(n+m)$-вимірну вектор-функцію

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix},$$

де $x(t) \in R^n$, $y(t) \in R^m$, яка задовольняє систему (1) і крайову умову (2).

2. Побудова розв'язків вироджених систем диференціальних рівнянь. Розглянемо вироджену лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь (1). Враховуючи структуру матриць $A_0(t)$, $B_0(t)$ та вектор-функції $f(t)$, система (1) розщеплюється на дві незалежні одна від одної системи рівнянь

$$x' = B_1^{-1}(t)A_1(t)x + B_1^{-1}(t)f^{(1)}(t); \tag{4}$$

$$Jy' = A_2(t)y + f^{(2)}(t). \tag{5}$$

Загальний розв'язок невиродженої диференціальної системи (4) має вигляд

$$x(t) = X(t)\bar{c} + X(t)\int\limits_{t_0}^{t} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds,$$

де $X(t)$ – $(n \times n)$-вимірна фундаментальна матриця відповідної (4) однорідної системи рівнянь, $\bar{c} \in R^n$ – вектор довільних сталих.

Представимо матрицю $A_2(t)$ наступним чином

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} D_1(t) & D_2(t) \\ a_{m,1}^{(2)}(t) & D_3(t) \end{bmatrix},$$

де $D_1(t)$ – $((m-1) \times 1)$-вимірна, $D_2(t)$ – $((m-1) \times (m-1))$-вимірна, $D_3(t)$ – $(1 \times (m-1))$-вимірна матриці.

Нехай

$$y(t) = col\left[y_1(t), v(t)\right], \quad f^{(2)}(t) = col\left[p(t), f_m^{(2)}(t)\right],$$

де $v(t) = col(y_2(t), \ldots, y_m(t))$, $p(t) = col(f_1^{(2)}(t), \ldots, f_{m-1}^{(2)}(t))$ – $(m-1)$-вимірні вектор-функції.

Тоді вироджена система рівнянь (5) розпадеться на дві системи рівнянь наступним чином

$$v' = D_1(t)y_1 + D_2(t)v + p(t), \tag{6}$$

$$0 = a^{(2)}_{m,1}(t)y_1 + D_3(t)v + f^{(2)}_m(t), \tag{7}$$

де (6) – це система звичайних диференціальних рівнянь $m-1$ порядку, (7) – алгебраїчна система.

Структура розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь (1), (3) буде залежати від значення $a^{(2)}_{m,1}(t)$. Розглянемо можливі випадки.

2.1. Нехай $a^{(2)}_{m,1}(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. Виразимо y_1 з (7)

$$y_1 = -\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}\left(D_3(t)v + f^{(2)}_m(t)\right)$$

і підставимо його в систему (6):

$$v' = \left(D_2(t) - \frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_1(t)D_3(t)\right)v + \left(p(t) - \frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_1(t)f^{(2)}_m(t)\right). \tag{8}$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (8) має вигляд

$$v(t) = V(t)\tilde{c} + V(t)\int\limits_{t_0}^{t} V^{-1}(s)\left[p(s) - \frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(s)}D_1(s)f^{(2)}_m(s)\right]ds, \tag{9}$$

де $V(t)$ – $((m-1)\times(m-1))$-вимірна фундаментальна матриця відповідної (8) однорідної системи рівнянь, $\tilde{c} \in R^{m-1}$ – вектор довільних сталих.

Таким чином, можемо записати:

$$\begin{gathered} y_1(t) = -\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_3(t)V(t)\tilde{c}- \\ -\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_3(t)V(t)\int\limits_{t_0}^{t}V^{-1}(s)\left[p(s) - \frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(s)}D_1(s)f^{(2)}_m(s)\right]ds - \frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}f^{(2)}_m(t). \end{gathered} \tag{10}$$

Обєднуючи (9) і (10) одержимо загальний розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (5):

$$y(t) = K(t)V(t)\tilde{c} + K(t)V(t)\int\limits_{t_0}^{t}V^{-1}(s)\left[p(s) - \frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(s)}D_1(s)f^{(2)}_m(s)\right]ds + L(t), \tag{11}$$

де $K(t)$ – $(m\times(m-1))$-вимірна матриця, $L(t)$ – m-вимірний вектор-стовпець вигляду

$$K(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}D_3(t) \\ \\ E_{m-1} \end{bmatrix}, \quad L(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(t)}f^{(2)}_m(t) \\ \\ 0_{m-1} \end{bmatrix},$$

E_{m-1} – $((m-1)\times(m-1))$-вимірна одинична матриця, 0_{m-1} – $(m-1)$-вимірний нульовий вектор-стовпець.

Теорема 1. *Нехай для лінійної неоднорідної виродженої системи диференціальних рівнянь* (1), (3) *виконується умова:* $a^{(2)}_{m,1}(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. *Тоді вироджена система диференціальних рівнянь* (1), (3) *має* $(n+m-1)$*-параметричну сім'ю розв'язків вигляду*

$$z(t)=\begin{bmatrix} X(t)\bar{c}+X(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds \\ \\ K(t)V(t)\tilde{c}+K(t)V(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t}V^{-1}(s)\left[p(s)-\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(s)}D_1(s)f^{(2)}_m(s)\right]ds+L(t)\end{bmatrix}. \quad (12)$$

2.2. Нехай $a^{(2)}_{m,1}(t) \equiv 0$, $t \in [a,b]$. Припускаємо, що існує ціле i, $2 \leq i \leq m$, для якого $a^{(2)}_{m,i}(t) \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$. Розіб'ємо вектор-функцію $v(t)$ наступним чином

$$v(t) = col\left[u_1(t), v_{i-1}(t), u_2(t)\right],$$

де $u_1(t) = col\,(v_1(t), \ldots, v_{i-2}(t))$ – $(i-2)$-вимірна, $u_2(t) = col\,(v_i(t), \ldots, v_{m-1}(t))$ – $(m-i)$-вимірна вектор-функції.

Крім того, нехай

$$u(t) = col\left[u_1(t), u_2(t)\right].$$

Тоді, система рівнянь (6) розпадеться на дві системи рівнянь:

$$v'_{i-1} = a^{(2)}_{i-1,i}(t)v_{i-1} + D_5(t)u + a^{(2)}_{i-1,1}(t)y_1 + f^{(2)}_{i-1}(t), \quad (13)$$

$$u' = D_7(t)u + D_6(t)v_{i-1} + D_4(t)y_1 + p_1(t), \quad (14)$$

а система (7) запишеться так

$$a^{(2)}_{m,i}(t)v_{i-1} + D_8(t)u + f^{(2)}_m(t) = 0, \quad (15)$$

де $D_4(t)$, $D_6(t)$ – $((m-2)\times 1)$-вимірні, $D_5(t)$, $D_8(t)$ – $(1\times(m-2))$-вимірні, $D_7(t)$ – $((m-2)\times(m-2))$-вимірна матриці, $p_1(t)$ – $((m-2)\times 1)$-вимірна вектор-функція вигляду:

$$D_4(t) = col\left(a^{(2)}_{1,1}(t), \ldots, a^{(2)}_{i-2,1}(t), a^{(2)}_{i,1}(t), \ldots, a^{(2)}_{m-1,1}(t)\right),$$

$$D_6(t) = col\left(a^{(2)}_{1,i}(t), \ldots, a^{(2)}_{i-2,i}(t), a^{(2)}_{i,i}(t), \ldots, a^{(2)}_{m-1,i}(t)\right),$$

$$D_5(t) = \left(a^{(2)}_{i-1,2}(t), \ldots, a^{(2)}_{i-1,i-1}(t), a^{(2)}_{i-1,i+1}(t), \ldots, a^{(2)}_{i-1,m}(t)\right),$$

$$D_8(t) = \left(a^{(2)}_{m,2}(t), \ldots, a^{(2)}_{m,i-1}(t), a^{(2)}_{m,i+1}(t), \ldots, a^{(2)}_{m,m}(t)\right),$$

$$D_7(t) = \begin{pmatrix} a^{(2)}_{1,2}(t) & \ldots & a^{(2)}_{1,i-1}(t) & a^{(2)}_{1,i+1}(t) & \ldots & a^{(2)}_{1,m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a^{(2)}_{i-2,2}(t) & \ldots & a^{(2)}_{i-2,i-1}(t) & a^{(2)}_{i-2,i+1}(t) & \ldots & a^{(2)}_{i-2,m}(t) \\ a^{(2)}_{i,2}(t) & \ldots & a^{(2)}_{i,i-1}(t) & a^{(2)}_{i,i+1}(t) & \ldots & a^{(2)}_{i,m}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a^{(2)}_{m-2,2}(t) & \ldots & a^{(2)}_{m-1,i-1}(t) & a^{(2)}_{m-1,i+1}(t) & \ldots & a^{(2)}_{m-1,m}(t) \end{pmatrix},$$

$$p_1(t) = col\left(f_1^{(2)}(t), \dots, f_{i-2}^{(2)}(t), f_i^{(2)}(t), \dots, f_{m-1}^{(2)}(t)\right).$$

Виразимо v_{i-1} з (15)

$$v_{i-1} = -\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}\left(D_8(t)u + f_m^{(2)}(t)\right)$$

і підставимо його в (13), (14):

$$-\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t)u' - \frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}\left(D_8'(t) - \frac{a_{m,i}^{(2)'}(t)}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t)\right)u-$$

$$-\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}\left(f_m^{(2)'}(t) - \frac{a_{m,i}^{(2)'}(t)}{a_{m,i}^{(2)}(t)}f_m^{(2)}(t)\right) = \tag{16}$$

$$= -\left(\frac{a_{i-1,i}^{(2)}(t)}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t) - D_5(t)\right)u + a_{i-1,1}^{(2)}(t)y_1 - \left(\frac{a_{i-1,i}^{(2)}(t)}{a_{m,i}^{(2)}(t)}f_m^{(2)}(t) - f_{i-1}^{(2)}(t)\right),$$

$$u' = -\left(\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_6(t)D_8(t) - D_7(t)\right)u + D_4(t)y_1 - \left(\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_6(t)f_m^{(2)}(t) - p_1(t)\right). \tag{17}$$

Помножимо (17) на $\dfrac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t)$ та додамо до (16). Матимемо

$$S(t)y_1 + R(t)u = H(t), \tag{18}$$

де $R(t)$ – $(1 \times (m-2))$-вимірна матриця, $S(t)$, $H(t)$ – скалярні функції:

$$S(t) = a_{i-1,1}^{(2)}(t) + \frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t)D_4(t),$$

$$R(t) = -\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}\left(D_8'(t) - \frac{a_{m,i}^{(2)'}(t)}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t)\right) -$$

$$-\left(\frac{a_{i-1,i}^{(2)}(t)}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t) - D_5(t)\right) - \frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t)\left(\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_6(t)D_8(t) - D_7(t)\right),$$

$$H(t) = -\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}\left(f_m^{(2)'}(t) - \frac{a_{m,i}^{(2)'}(t)}{a_{m,i}^{(2)}(t)}f_m^{(2)}(t)\right) + \left(\frac{a_{i-1,i}^{(2)}(t)}{a_{m,i}^{(2)}(t)}f_m^{(2)}(t) - f_{i-1}^{(2)}(t)\right) +$$

$$+\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t)\left(\frac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_6(t)f_m^{(2)}(t) - p_1(t)\right).$$

Нехай $S(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$. Виразимо y_1 з (18):

$$y_1 = -S^{-1}(t)R(t)u + S^{-1}(t)H(t).$$

Підставимо y_1 в систему рівнянь (17). Одержимо наступну $(m-2)$-вимірну систему звичайних диференціальних рівнянь

$$u' = P(t)u + W(t), \tag{19}$$

де $P(t)$ – $((m-2)\times(m-2))$-вимірна матриця, $W(t)$ – $(m-2)$-вимірна вектор-функція:

$$P(t) = -\frac{1}{a^{(2)}_{m,i}(t)} D_6(t)D_8(t) + D_7(t) - D_4(t)S^{-1}(t)R(t),$$

$$W(t) = -\frac{1}{a^{(2)}_{m,i}(t)} D_6(t)f^{(2)}_m(t) + p_1(t) + D_4(t)S^{-1}(t)H(t).$$

Загальний розв'язок системи рівнянь (19) має вигляд

$$u(t) = U(t)\tilde{c} + U(t)\int\limits_{t_0}^{t} U^{-1}(s)W(s)ds, \tag{20}$$

де $U(t)$ – $((m-2)\times(m-2))$-вимірна фундаментальна матриця відповідної (19) однорідної системи рівнянь, $\tilde{c} \in R^{m-2}$ – вектор довільних сталих.

Таким чином, можемо записати

$$y_1(t) = -S^{-1}(t)R(t)U(t)\tilde{c} - S^{-1}(t)R(t)U(t)\int\limits_{t_0}^{t} U^{-1}(s)W(s)ds + S^{-1}(t)H(t), \tag{21}$$

$$\begin{gathered} v_{i-1}(t) = -\frac{1}{a^{(2)}_{m,i}(t)} D_8(t)U(t)\tilde{c} - \\ -\frac{1}{a^{(2)}_{m,i}(t)} D_8(t)U(t)\int\limits_{t_0}^{t} U^{-1}(s)W(s)ds - \frac{1}{a^{(2)}_{m,i}(t)} f^{(2)}_m(t). \end{gathered} \tag{22}$$

Об'єднуючи (21), (22) та (20) одержимо загальний розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (5)

$$y(t) = K_1(t)U(t)\tilde{c} + K_1(t)U(t)\int\limits_{t_0}^{t} U^{-1}(s)W(s)ds + L_1(t), \tag{23}$$

де $K_1(t)$ – $(m\times(m-2))$-вимірна матриця, $L_1(t)$ – m -вимірний вектор-стовпець вигляду

$$K_1(t) = \begin{bmatrix} -S^{-1}(t)R(t) \\ E_1 \\ -\dfrac{1}{a^{(2)}_{m,i}(t)} D_8(t) \\ E_2 \end{bmatrix}, \quad L_1(t) = \begin{bmatrix} S^{-1}(t)H(t) \\ 0_{i-2} \\ -\dfrac{1}{a^{(2)}_{m,i}(t)} f^{(2)}_m(t) \\ 0_{m-i} \end{bmatrix},$$

$$E_1(t) = [E_{i-2}, N], \quad L_1(t) = \left[N^T, E_{m-i}\right],$$

E_{i-2} – $((i-2)\times(i-2))$-вимірна, E_{m-i} – $((m-i)\times(m-i))$-вимірна одиничні матриці, N – $((i-2)\times(m-i))$-вимірна нульова матриця; 0_{i-2} – $(i-2)$-вимірний, 0_{m-i} – $(m-i)$-вимірний нульові вектор-стовпці.

Теорема 2. *Нехай для лінійної неоднорідної виродженої системи диференціальних рівнянь* (1), (3) *виконуються умови*

1) $a^{(2)}_{m,1}(t) \equiv 0,\ t \in [a,b]$,

2) існує ціле $i,\ 2 \le i \le m$, *для якого* $a^{(2)}_{m,i}(t) \ne 0\ \forall t \in [a,b]$,

3) $a^{(2)}_{i-1,1}(t) + \dfrac{1}{a^{(2)}_{m,i}(t)} D_8(t)D_4(t) \ne 0.$

Тоді вироджена система диференціальних рівнянь (1), (3) *має* $(n+m-2)$-*параметричну сім'ю розв'язків вигляду*

$$z(t) = \begin{bmatrix} X(t)\bar{c} + X(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds \\ \\ K_1(t)U(t)\tilde{c} + K_1(t)U(t)\displaystyle\int_{t_0}^{t} U^{-1}(s)W(s)ds + L_1(t) \end{bmatrix}. \tag{24}$$

3. Побудова розв'язків вироджених крайових задач. Поряд із неоднорідною крайовою задачею (1) – (3) розглянемо однорідну крайову задачу:

$$\begin{aligned} B_0(t)\frac{dz}{dt} &= A_0(t)z, \\ lz(\cdot) &= 0. \end{aligned} \tag{25}$$

Для того, щоб розв'язок $z(t)$ системи (1) був розв'язком крайової задачі (1) – (3) необхідно і достатньо задовольнити крайову умову.

Відповідно до попереднього розділу, в залежності від значення $a^{(2)}_{m,1}(t)$ розглянемо два випадки.

3.1. Нехай $a^{(2)}_{m,1}(t) \ne 0\ \forall t \in [a,b]$. Підставляючи розв'язок $z(t)$ вигляду (12) в крайову умову (2) одержимо алгебраїчну відносно $\bar{c} \in R^n$ і $\tilde{c} \in R^{(m-1)}$ систему з $((n+m)\times(n+m-1))$-вимірною матрицею D

$$D\begin{bmatrix} \bar{c} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 - l_1\tilde{x}(\cdot) \\ d_2 - l_2\tilde{y}(\cdot) \end{bmatrix}, \tag{26}$$

де $D = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}, \quad Q = l_1X(\cdot), \quad G = l_2K(\cdot)V(\cdot),$

$$l_1\tilde{x}(\cdot) = l_1\left(X(\cdot)\int_a^{\cdot} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds\right);$$

$$l_2\tilde{y}(\cdot) = l_2\left(K(\cdot)V(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} V^{-1}(s)\left[p(s) - \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(s)}D_1(s)f_m^{(2)}(s)\right]ds + L(\cdot)\right).$$

Критичний випадок. Нехай $rankD = n_1 < n+m-1$. Тоді, згідно з [5], алгебраїчна система (26) буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова

$$P_{D^*}\begin{bmatrix} d_1 - l_1\tilde{x}(\cdot) \\ d_2 - l_2\tilde{y}(\cdot) \end{bmatrix} = 0, \tag{27}$$

де P_{D*} – $((n+m)\times(n+m))$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^{n+m} на нуль-простір $N(D^*)$ матриці D^*:

$$P_{D^*} : R^{n+m} \to N(D^*), \quad N(D^*) = P_{D^*}R^{n+m},$$

причому

$$P_{D^*} = \begin{bmatrix} P_{Q^*} & 0 \\ 0 & P_{G^*} \end{bmatrix},$$

P_{Q^*} – $(n\times n)$-вимірний, P_{G^*} – $(m\times m)$-вимірний ортопроектори матриць Q^* та G^* відповідно.

Нехай $rankP_{D^*} = n+m-n_1 = k$, тоді умова (27) складається з k лінійно незалежних умов і $((n+m)\times(n+m))$-вимірну матрицю P_{D^*} в (27) можна замінити $(k\times(n+m))$-вимірною матрицею $P_{D_k^*}$, яка складається із повної системи k лінійно незалежних рядків матриці P_{D^*}, причому

$$P_{D_k^*} = \begin{bmatrix} P_{Q_{k_1}^*} & 0 \\ 0 & P_{G_{k_2}^*} \end{bmatrix},$$

де $P_{Q_{k_1}^*}$ – $(k_1\times n)$-вимірна, $P_{G_{k_2}^*}$ – $(k_2\times m)$-вимірна матриці, які складаються із повних систем k_1 та k_2 лінійно незалежних рядків матриць P_{Q^*} та P_{G^*} відповідно.

Тоді, необхідна і достатня умова розв'язності алгебраїчної системи (26) запишеться у вигляді

$$P_{D_k^*}\begin{bmatrix} d_1 - l_1\tilde{x}(\cdot) \\ d_2 - l_2\tilde{y}(\cdot) \end{bmatrix} = 0. \tag{28}$$

Якщо умова (28) виконується, то система (26) має r-параметричну ($r = n+m-1-n_1$) сім'ю розв'язків вигляду

$$\begin{bmatrix} \bar{c} \\ \tilde{c} \end{bmatrix} = P_{D_r}\begin{bmatrix} \bar{c}_{r_1} \\ \tilde{c}_{r_2} \end{bmatrix} + D^+\begin{bmatrix} d_1 - l_1\tilde{x}(\cdot) \\ d_2 - l_2\tilde{y}(\cdot) \end{bmatrix},$$

де D^+ – єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до D матриця; P_{D_r} – $((n+m)\times r)$-вимірна матриця, яка складається з r лінійно незалежних стовпців $((n+m-1)\times(n+m-1))$-вимірної матриці P_D, яка є ортопроектором з простору R^{n+m-1} на нуль-простір $N(D)$ матриці D:

$$P_D : R^{n+m-1} \to N(D), \quad N(D) = P_D R^{n+m-1},$$

причому

$$D^+ = \begin{bmatrix} Q^+ & 0 \\ 0 & G^+ \end{bmatrix}, \quad P_{D_r} = \begin{bmatrix} P_{Q_{r_1}} & 0 \\ 0 & P_{G_{r_2}} \end{bmatrix},$$

Q^+, G^+ – єдині псевдообернені за Муром-Пенроузом до Q та G матриці відповідно; $P_{Q_{r_1}}$ – $(n \times r_1)$-вимірна, $P_{G_{r_2}}$ – $((m-1) \times r_2)$-вимірна матриці, які складаються з r_1 та r_2 лінійно незалежних стовпців $(n \times n)$-вимірної матриці P_Q та $((m-1) \times (m-1))$-вимірної матриці P_G і є ортопроекторами матриць Q та G відповідно.

Підставляючи знайдені константи $\bar{c}$ та $\tilde{c}$ в (12) одержимо загальний розв'язок крайової задачі (1) – (3)

$$z(t, \bar{c}_{r_1}, \tilde{c}_{r_2}) =$$

$$= \begin{bmatrix} X(t)P_{Q_{r_1}}\bar{c}_{r_1} + X(t)Q^+d_1 + X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds - \\ -X(t)Q^+l_1\left(X(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds\right) \\ \\ K(t)V(t)P_{G_{r_2}}\tilde{c}_{r_2} + K(t)V(t)\int\limits_a^t V^{-1}(s)\left[p(s) - \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(s)}D_1(s)f_m^{(2)}(s)\right]ds - \\ -K(t)V(t)G^+l_2\left(K(\cdot)V(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} V^{-1}(s)\left[p(s) - \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(s)}D_1(s)f_m^{(2)}(s)\right]ds + L(\cdot)\right) + \\ +L(t) + K(t)V(t)G^+d_2 \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Теорема 3. *Нехай для виродженої крайової задачі* (1) – (3) *виконуються умови*

1)$a_{m,1}^{(2)}(t) \neq 0 \ \forall t \in [a, b]$,

2)$rankD = n_1 < n + m - 1$.

Тоді неоднорідна вироджена крайова задача (1) – (3) *буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$P_{D_k^*}\begin{bmatrix} d_1 - l_1\left(X(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds\right) \\ \\ d_2 - l_2\left(K(\cdot)V(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} V^{-1}(s)\left[p(s) - \frac{1}{a_{m,1}^{(2)}(s)}D_1(s)f_m^{(2)}(s)\right]ds + L(\cdot)\right) \end{bmatrix} = 0, \quad (30)$$

і при цьому крайова задача (1) – (3) *має* r*-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду* (29).

Некритичний випадок. Нехай $rankD = n_1 = n + m - 1$. Тоді однорідна крайова задача (25) має тільки тривіальний розв'язок, тобто неоднорідна крайова задача (1) – (3) буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова (30) і при цьому матиме єдиний розв'язок вигляду

$$z(t) =$$

$$= \begin{bmatrix} X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds+ \\ +X(t)Q^+d_1 - X(t)Q^+l_1\left(X(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds\right) \\ \\ K(t)V(t)\int\limits_a^t V^{-1}(s)\left[p(s)-\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(s)}D_1(s)f^{(2)}_m(s)\right]ds- \\ -K(t)V(t)G^+l_2\left(K(\cdot)V(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} V^{-1}(s)\left[p(s)-\frac{1}{a^{(2)}_{m,1}(s)}D_1(s)f^{(2)}_m(s)\right]ds+L(\cdot)\right)+ \\ +L(t)+K(t)V(t)G^+d_2 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Теорема 4. *Нехай для виродженої крайової задачі* (1) – (3) *виконуються умови*

1)$a^{(2)}_{m,1}(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$,

2)$rank D = n_1 = n+m-1$.

Тоді неоднорідна вироджена крайова задача (1) – (3) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (30), *при цьому крайова задача* (1) – (3) *має єдиний розв'язок вигляду* (31).

3.2. У випадку, коли $a^{(2)}_{m,1}(t) \equiv 0$, $t \in [a,b]$ та існує ціле i, $2 \leq i \leq m$, для якого $a^{(2)}_{m,i}(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$, проводимо аналогічні міркування. Врахувавши, що при підстановці розв'язку вигляду (24) в крайову умову (2) ми одержуємо алгебраїчну відносно $\bar{c} \in R^n$ і $\tilde{c} \in R^{(m-2)}$ систему з $((n+m)\times(n+m-2))$-вимірною матрицею D:

$$D = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & \bar{G} \end{bmatrix}, \quad \bar{G} = l_2K_1(\cdot)U(\cdot),$$

$$l_2\tilde{y}(\cdot) = l_2\left(K_1(\cdot)U(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} U^{-1}(s)W(s)ds + L_1(\cdot)\right),$$

приходимо до результатів, описаних наступними двома теоремами.

Теорема 5. *Нехай для виродженої крайової задачі* (1) – (3) *виконуються умови*

1) $a^{(2)}_{m,1}(t) \equiv 0$, $t \in [a,b]$,

2) існує ціле i, $2 \leq i \leq m$, *для якого* $a^{(2)}_{m,i}(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b]$,

3) $a^{(2)}_{i-1,1}(t) + \dfrac{1}{a^{(2)}_{m,i}(t)}D_8(t)D_4(t) \neq 0$, *4)* $rank D = n_2 < n + m - 2.$

Тоді неоднорідна вироджена крайова задача (1) – (3) *буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли виконується умова*

$$P_{D_k^*}\begin{bmatrix} d_1 - l_1\left(X(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds\right) \\ d_2 - l_2\left(K_1(\cdot)U(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} U^{-1}(s)W(s)ds + L_1(\cdot)\right)\end{bmatrix} = 0, \tag{32}$$

де $P_{D_k^*}$ – $(k \times (n+m))$*-вимірна матриця (ортопроектор):*

$$P_{D_k^*} = \begin{bmatrix} P_{Q_{k_1}^*} & 0 \\ 0 & P_{\bar{G}_{k_2}^*}\end{bmatrix},$$

при цьому крайова задача (1) – (3) *має* r*-параметричну* $(r = n + m - 2 - n_2)$ *сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду*

$$z(t,\bar{c}_{r_1},\tilde{c}_{r_2}) = \begin{bmatrix} X(t)P_{Q_{r_1}}\bar{c}_{r_1} + X(t)Q^+d_1 + X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds - \\ -X(t)Q^+l_1\left(X(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds\right) \\ \\ K_1(t)U(t)P_{\bar{G}_{r_2}}\tilde{c}_{r_2} + K_1(t)U(t)\int\limits_a^t U^{-1}(s)W(s)ds - \\ -K_1(t)U_1(t)\bar{G}^+l_2\left(K_1(\cdot)U(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} U^{-1}(s)W(s)ds + L_1(\cdot)\right) + \\ +L_1(t) + K_1(t)U(t)\bar{G}^+d_2\end{bmatrix},$$

де D^+ – *єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до* D *матриця;* P_{D_r} – $((n+m)\times r)$*-вимірна матриця (ортопроектор):*

$$D^+ = \begin{bmatrix} Q^+ & 0 \\ 0 & \bar{G}^+\end{bmatrix}, \quad P_{D_r} = \begin{bmatrix} P_{Q_{r_1}} & 0 \\ 0 & P_{\bar{G}_{r_2}}\end{bmatrix}.$$

Теорема 6. *Нехай для виродженої крайової задачі* (1) – (3) *виконуються умови*

1) $a_{m,1}^{(2)}(t) \equiv 0,\ t \in [a,b],$

2) існує ціле i*,* $2 \le i \le m$*, для якого* $a_{m,i}^{(2)}(t) \neq 0\ \forall t \in [a,b],$

3) $a_{i-1,1}^{(2)}(t) + \dfrac{1}{a_{m,i}^{(2)}(t)}D_8(t)D_4(t) \neq 0,$

4) $rank D = n_2 = n + m - 2$.

Тоді неоднорідна вироджена крайова задача (1) – (3) *розв'язна тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (32), *при цьому крайова задача* (1) – (3) *має єдиний розв'язок вигляду*

$$z(t) = \begin{bmatrix} X(t)Q^{+}d_1 + X(t)\int\limits_a^t X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds - \\ -X(t)Q^{+}l_1\left(X(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} X^{-1}(s)B_1^{-1}(s)f^{(1)}(s)ds\right) \\ \\ K_1(t)U(t)\int\limits_a^t U^{-1}(s)W(s)ds - \\ -K_1(t)U(t)\bar{G}^{+}l_2\left(K_1(\cdot)U(\cdot)\int\limits_a^{\cdot} U^{-1}(s)W(s)ds + L_1(\cdot)\right) + \\ +L_1(t) + K_1(t)U(t)\bar{G}^{+}d_2 \end{bmatrix}.$$

Продемонструємо одержані результати на прикладі.

Приклад. Розглянемо вироджену крайову задачу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 8t + \sin t \\ 2\sin t \\ \sin t \\ 2t \end{pmatrix}, \tag{33}$$

$$ly(\cdot) = y(0) - y(\frac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \pi + 1 \\ \pi \\ 2\pi \\ \pi \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Знайдемо розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (33).

Оскільки $a_{41}^{(2)}(t) \equiv 0$, існує $i = 2$, для якого $a_{42}^{(2)}(t) \neq 0$, $S(t) = \dfrac{1}{2} \neq 0$, то маємо випадок 2.2. Матриці D_4, D_5, D_6, D_7, D_8 та вектор-функція $p_1(t)$ матимуть вигляд:

$$D_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad D_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D_6 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$D_7 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad D_8 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_1(t) = \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Для знаходження розв'язку виродженої системи диференціальних рівнянь (33) потрібно знайти фундаментальну матрицю наступної звичайної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} u - \begin{pmatrix} 4 + 27t \\ 2 + 15t \end{pmatrix}.$$

Вона має вигляд:

$$U(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t}(2\cos t + \sin t) & -\frac{5}{2}e^{-2t}\sin t \\ \frac{1}{2}e^{-2t}\sin t & \frac{1}{2}e^{-2t}(2\cos t - \sin t) \end{pmatrix},$$

а оберненою до неї є

$$U^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-2t}(2\cos t - \sin t) & \frac{5}{2}e^{-2t}\sin t \\ -\frac{1}{2}e^{-2t}\sin t & \frac{1}{2}e^{-2t}(2\cos t + \sin t) \end{pmatrix}.$$

Тоді, згідно формули (23), де

$$K_1 = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_1(t) = \begin{pmatrix} -2 - 14t - \sin t \\ -t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

можемо записати загальний розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь (33):

$$y(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} -2e^{-2t}(\cos t + \sin t)\tilde{c}_1 - 2e^{-2t}(\cos t - 3\sin t)\tilde{c}_2 + \frac{8}{25}e^{-2t}(\cos t - 43\sin t) - \\ - \sin t + \frac{62}{5}t - \frac{58}{25} \\ \frac{1}{2}e^{-2t}\cos t\tilde{c}_1 - \frac{1}{2}2e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)\tilde{c}_2 + \frac{2}{25}e^{-2t}(21\cos t + 22\sin t) - \frac{2}{5}t - \frac{42}{25} \\ \frac{1}{2}e^{-2t}(2\cos t + \sin t)\tilde{c}_1 - \frac{5}{2}e^{-2t}\sin t\tilde{c}_2 - \frac{2}{5}e^{-2t}(4\cos t - 13\sin t) - 6t - \frac{8}{5} \\ \frac{1}{2}e^{-2t}\sin t\tilde{c}_1 + \frac{1}{2}e^{-2t}(2\cos t - \sin t)\tilde{c}_2 - \frac{2}{25}e^{-2t}(22\cos t - 21\sin t) - \frac{36}{5}t + \frac{44}{25} \end{pmatrix}.$$

Тепер перейдемо до знаходження розв'язку виродженої крайової задачі (33), (34). Матриця $\bar{G}$, ортопроектори $P_{\bar{G}}$, $P_{\bar{G}^*}$ та псевдообернена матриця $\bar{G}^+$ мають вигляд

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} 2e^{-\pi} - 2 & -6e^{-\pi} - 2 \\ \frac{1}{2} & e^{-\pi} - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}e^{-\pi} + 1 & \frac{5}{2}e^{-\pi} \\ -\frac{1}{2}e^{-\pi} & \frac{1}{2}e^{-\pi} + 1 \end{pmatrix},$$

$$P_{\bar{G}^*} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 12 & -6 & 6 \\ 4 & -6 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 5 & 11 \end{pmatrix}, \quad P_{\bar{G}} = 0,$$

$$\bar{G}^+ = \frac{1}{18(e^{-2\pi}+1)}\begin{pmatrix} 8e^{-\pi}-4 & 18e^{-\pi}+6 & 16e^{-\pi}+7 & -20e^{-\pi}-5 \\ \\ -4 & 6e^{-\pi}-6 & 6e^{-\pi}-5 & -6e^{-\pi}+7 \end{pmatrix}.$$

Частинний розв'язок виродженої системи рівнянь (33) записується у вигляді

$$\tilde{y}(t) = K_1(t)U(t)\int\limits_0^t U^{-1}(s)W(s)ds + L_1(t).$$

Отже, тобто

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 8e^{-2t}(\cos t - 43\sin t) - 25\sin t + 310t - 58 \\ 2e^{-2t}(21\cos t + 22\sin t) - 10t - 42 \\ 10e^{-2t}(4\cos t + 13\sin t) - 150t - 40 \\ 2e^{-2t}(-22\cos t + 21\sin t) - 180t + 44 \end{pmatrix},$$

$$l\tilde{y}(\cdot) = l\tilde{y}(0) - l\tilde{y}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 344e^{-\pi} - 155\pi + 33 \\ -44e^{-\pi} + 5\pi - 42 \\ -130e^{-\pi} + 75\pi + 40 \\ -42e^{-\pi} + 90\pi - 44 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $rank\bar{G} = 2$, то $k_2 = m - rank\bar{G} = 2$ і

$$P_{\bar{G}_2^*} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо виконання умови (30)

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \pi+1 \\ \pi \\ 2\pi \\ \pi \end{pmatrix} - \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 344e^{-\pi} - 155\pi + 33 \\ -44e^{-\pi} + 5\pi - 42 \\ -130e^{-\pi} + 75\pi + 40 \\ -42e^{-\pi} + 90\pi - 44 \end{pmatrix}\right] = 0.$$

Отже, умова ортогональності виконується. Оскільки ми маємо некритичний випадок, то єдиний розв'язок крайової задачі (33), (34) буде мати вигляд

$$y(t) = \frac{1}{25(e^{2\pi}+1)}\times$$

$$\times\begin{pmatrix} \begin{gathered} 20(9e^{2\pi}-17e^{\pi})\pi e^{-2t}\cos t-20(17e^{2\pi}+9e^{\pi})\pi e^{-2t}\sin t-25(e^{2\pi}+1)\sin t+ \\ +310(e^{2\pi}+1)t-58(e^{2\pi}+1) \end{gathered} \\ 5(4e^{2\pi}+13e^{\pi})\pi e^{-2t}\cos t+5(13e^{2\pi}-4e^{\pi})\pi e^{-2t}\sin t-10(e^{2\pi}+1)t-42(e^{2\pi}+1) \\ -25(e^{2\pi}-6e^{\pi})\pi e^{-2t}\cos t+25(6e^{2\pi}+e^{\pi})\pi e^{-2t}\sin t-150(e^{2\pi}+1)t-40(e^{2\pi}+1) \\ -5(13e^{2\pi}-4e^{\pi})\pi e^{-2t}\cos t+5(4e^{2\pi}+13e^{\pi})\pi e^{-2t}\sin t-180(e^{2\pi}+1)t+44(e^{2\pi}+1) \end{pmatrix}.$$

1. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища шк., 2000. – 294 с.
2. *Чистяков В.Ф., Щеглова А.А.* Избранные главы теории алгебро-дифференциальных систем. – Новосибирск: Наука, 2003. – 317 с.
3. *Бояринцев Ю.И.* Методы решения непрерывных и дискретных задач для сингулярных систем уравнений. – М.: Наука, 1996.
4. *Бойчук А.А., Шегда Л.М.* Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. – 2007.–**10**, №3. – С. 303–312.
5. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 294 с.

Одержано 25.10.2011