УДК 519.21

А. М. Тегза, Н. В. Федорянич (Ужгородський нац. ун-т)

ТОЧНІСТЬ ТА НАДІЙНІСТЬ МОДЕЛІ ГАУССОВОГО ОДНОРІДНОГО ІЗОТРОПНОГО ВИПАДКОВОГО ПОЛЯ З ОБМЕЖЕНИМ СПЕКТРОМ У ПРОСТОРІ $C(T)$.

The work suggests a new method of the model building of gaussian homogenous isotropic random field on the basis of $Sub(\Omega)$ theory. There are considered approach of model with given accuracy and reliability in $C(T)$.

В роботі запропоновано побудову моделі гауссового однорідного ізотропного випадкового поля з обмеженим спектром, використовуючи теорію $Sub(\Omega)$. Розглянуто наближення моделі з заданою надійністю та точністю в просторі $C(T)$.

Вступ. Всі необхідні відомості з теорії субгауссових випадкових величин містяться у книгах [1], [2]. Основні принципи побудови моделей гауссових випадкових процесів та полів можна знайти в книгах [5]– [6]. У роботі розглянуто наближення моделі гауссового поля з заданою точністю та надійністю в просторі $C(T)$.

Робота складається з двох розділів. Упершому розділі будується модель гауссового випадкового поля, яка не є гауссовим полем, але є близькою до нього. Другий розділ містить обгрунтування точності і надійності побудованої моделі у просторі $C(T)$.

1. Побудова моделі гауссового однорідного ізотропного випадкового поля.

Нагадаємо (див. [1]), що центровану випадкову величину ξ будемо називати субгауссовою, якщо знайдеться таке $a \geq 0$, що для всіх $\lambda \in R$ виконується нерівність

$$E\exp\{\lambda\xi\} \leq \exp\left\{\frac{a^2\lambda^2}{2}\right\}.$$

Клас усіх субгауссових випадкових величин позначають $Sub(\Omega)$.

Нехай $X = \{X(\vec{t}), \vec{t} \in R^n\}$ —гауссове однорідне, ізотропне, неперервне в середньому квадратичному випадкове поле з обмеженим спектром. $\{R^n, \mathfrak{U}, F(\cdot)\}$ – вимірний простір, Тоді кореляційна функція цього поля має вигляд:

$$R(\vec{\tau}) = EX(\vec{t}+\vec{\tau})X(\vec{t}) = \int\limits_P \cos\langle\vec{\lambda},\vec{\tau}\rangle F(d\vec{\lambda}),$$

де $F(A)$ – спектральна міра випадкового поля, P– однозв'язна з кусково-гладкою межею Λ область у R^n, $\langle ...,...\rangle$ – означає скалярний добуток в R^n.
$F(B) = \int\limits_B f(u)du$, $f(u)$ – спектральна щільність випадкового поля.

Тоді $X(\vec{t})$ має зображення

$$X(\vec{t}) = \int\limits_P \cos\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle d\eta_1(\vec{\lambda}) + \int\limits_P \sin\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle d\eta_2(\vec{\lambda}),$$

де $\eta_1(\vec{\lambda})$, $\eta_2(\vec{\lambda})$ – такі центровані гауссові поля, що $E\left(\eta_i(A_1)\eta_i(A_2)\right) = F(A_1 \cap A_2)$, $A_1, A_2 \in \mathfrak{U}$, $i = 1, 2$.

Проводимо деяке розбиття спектрального простору $P = \sum\limits_{i=1}^{M} \Delta_i$, $\Delta_i \cap \Delta_j = \varnothing$, $i \neq j$.
Тоді за модель візьмемо

$$X_M(\vec{t}) = \sum_{k=1}^{M} \left(\eta_{k1} \cos\langle \vec{\zeta}_k, \vec{t} \rangle + \eta_{k2} \sin\langle \vec{\zeta}_k, \vec{t} \rangle \right),$$

де $\eta_{k1} = \int\limits_{\Delta_k} d\eta_1(\vec{\lambda})$, $\eta_{k2} = \int\limits_{\Delta_k} d\eta_2(\vec{\lambda})$ – незалежні гауссові випадкові величини такі, що $E\eta_{r1} = E\eta_{r2} = 0$, $E\eta_{r1}^2 = E\eta_{r2}^2 = F(\Delta_k) = b_k^2$, а вектори $\vec{\zeta}_k \in R^n$ не залежні від η_{ki} і розподілені на області Δ_k з таким законом:

$$P\{\vec{\zeta}_k \in A\} = \frac{F(A \cap \Delta_k)}{F(\Delta_k)}.$$

Неважко перевірити, що випадкове поле $X_M(\vec{t})$ є гауссовим центрованим однорідним з кореляційною функцією $R(\vec{\tau})$.

Нехай $\eta_M(\vec{t}) = X(\vec{t}) - X_M(\vec{t})$. Тоді

$$\eta_M(\vec{t}) = \sum_{k=1}^{M} \left[\int\limits_{\Delta_k} \left(\cos\langle \vec{\lambda}, \vec{t} \rangle - \cos\langle \vec{\zeta}_k, \vec{t} \rangle \right) d\eta_1(\vec{\lambda}) + \int\limits_{\Delta_k} \left(\sin\langle \vec{\lambda}, \vec{t} \rangle - \sin\langle \vec{\zeta}_k, \vec{t} \rangle \right) d\eta_2(\vec{\lambda}) \right]. \tag{1}$$

Випадкове поле $\eta_\Lambda(t)$ є субгауссовим (див. [4]).

Крім цього, для однорідних центрованих випадкових полів $\eta_1(\vec{\lambda})$, $\eta_2(\vec{\lambda})$ справедливі нерівності:

$$E\left(\int\limits_{\Delta_k} \left(\cos\langle \vec{\lambda}, \vec{t} \rangle - \cos\langle \vec{\zeta}_k, \vec{t} \rangle \right) d\eta_1(\vec{\lambda}) \right)^{2m+1} = 0,$$

$$E\left(\int\limits_{\Delta_k} \left(\sin\langle \vec{\lambda}, \vec{t} \rangle - \sin\langle \vec{\zeta}_k, \vec{t} \rangle \right) d\eta_2(\vec{\lambda}) \right)^{2m+1} = 0,$$

$$E\left(\int\limits_{\Delta_k} \left(\cos\langle \vec{\lambda}, \vec{t} \rangle - \cos\langle \vec{\zeta}_k, \vec{t} \rangle \right) d\eta_1(\vec{\lambda}) \right)^{2m} \leq z_{km},$$

$$E\left(\int\limits_{\Delta_k} \left(\sin\langle \vec{\lambda}, \vec{t} \rangle - \sin\langle \vec{\zeta}_k, \vec{t} \rangle \right) d\eta_2(\vec{\lambda}) \right)^{2m} \leq z_{km},$$

де $z_{km} = 4^m \frac{(2m)!}{2^m m!} E\left(\int\limits_{\Delta_k} \left(\sin\frac{\langle \vec{t}, (\vec{\lambda} - \vec{\zeta}_k) \rangle}{2} \right)^2 dF(\vec{\lambda}) \right)^m$.

Для субгауссового поля $\eta_M(\vec{t})$ має місце така нерівність (див. [4]):

$$\tau(\eta_M(\vec{t})) \leq 4 \left(\sum_{k=1}^{M} b_k^2 \sup_{m\geq 1} \left(E \left| \sin \frac{\langle \vec{\zeta}_k - \vec{\zeta}_k^*, \vec{t} \rangle}{2} \right|^{2m} \right)^{\frac{1}{m}} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{B_M(\vec{t})},$$

де $b_k^2 = F(\Delta_k)$, $\vec{\zeta}_k^*$ – випадкові вектори, що не залежать від $\vec{\zeta}_k$, маючи такий же розподіл, як і $\vec{\zeta}_k$.

Тоді величина $\sigma_0 = \sup\limits_{t\in\mathbf{T}} \tau(\eta_M(\vec{t}))$, де область $\mathbf{T} \subset R^n$ обмежена гладкою або кусково-гладкою поверхнею, задовільняє нерівність:

$$\sigma_0 \leq \sup_{t\in\mathbf{T}} \sqrt{B_M(\vec{t})}. \tag{2}$$

Для поля $\eta_M(\vec{t})$ на області $\mathbf{T}$ дослідимо оцінку для субгауссового стандарту $\sigma(h) = \sup\limits_{\max\limits_i |t_i - s_i| \leq h} \tau\left(\eta_M(\vec{t}) - \eta_M(\vec{s})\right)$.

Для довільних $\vec{t}, \vec{s} \in \mathbf{T}$ розглянемо різницю:

$$\eta_M(\vec{t}) - \eta_M(\vec{s}) = \sum_{k=1}^{M} \left[\int\limits_{\Delta_k} \left(\cos\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle - \cos\langle\vec{\zeta}_k,\vec{t}\rangle - \cos\langle\vec{\lambda},\vec{s}\rangle + \cos\langle\vec{\zeta}_k,\vec{s}\rangle \right) d\eta_1(\vec{\lambda}) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\Delta_k} \left(\sin\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle - \sin\langle\vec{\zeta}_k,\vec{t}\rangle - \sin\langle\vec{\lambda},\vec{s}\rangle + \sin\langle\vec{\zeta}_k,\vec{s}\rangle \right) d\eta_2(\vec{\lambda}) \right].$$

Два інтегральні доданки позначимо відповідно через ω_{k1}, ω_{k2}.

Справедливі такі оцінки:

$$\begin{aligned}
&|\cos\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle - \cos\langle\vec{\zeta}_k,\vec{t}\rangle - \cos\langle\vec{\lambda},\vec{s}\rangle + \cos\langle\vec{\zeta}_k,\vec{s}\rangle| = \\
&= \left| 2\sin\frac{\langle\vec{\lambda},(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2} \sin\frac{\langle\vec{\lambda},(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{2} - 2\sin\frac{\langle\vec{\zeta}_k,(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2} \sin\frac{\langle\vec{\zeta}_k,(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{2} \right| = \\
&= \left| 2\sin\frac{\langle\vec{\lambda},(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{2} \left(\sin\frac{\langle\vec{\lambda},(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2} - \sin\frac{\langle\vec{\zeta}_k,(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2} \right) + \right. \\
&\quad \left. + 2\sin\frac{\langle\vec{\zeta}_k,(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2} \left(\sin\frac{\langle\vec{\lambda},(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{2} - \sin\frac{\langle\vec{\zeta}_k,(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{2} \right) \right| \leq \\
&\leq 4 \left(\left| \sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{\zeta}_k),(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{4} \right| + \left| \sin\frac{\langle\vec{\zeta}_k,(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2} \right| \cdot \left| \sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{\zeta}_k),(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{4} \right| \right) = L_k
\end{aligned}$$

Аналогічно

$$|\sin\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle - \sin\langle\vec{\zeta}_k,\vec{t}\rangle - \sin\langle\vec{\lambda},\vec{s}\rangle + \sin\langle\vec{\zeta}_k,\vec{s}\rangle| \leq L_k$$

Тоді маємо:

$$E\left(\int\limits_{\Delta_k}\left(\cos\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle-\cos\langle\vec{\zeta}_k,\vec{t}\rangle-\cos\langle\vec{\lambda},\vec{s}\rangle+\cos\langle\vec{\zeta}_k,\vec{s}\rangle\right)d\eta_1(\vec{\lambda})\right)^{2m}\leq$$

$$\leq 4^{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!}E\left(\int\limits_{\Delta_k}\left(\left|\sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{\zeta}_k),(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{4}\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\sin\frac{\langle\vec{\zeta}_k,(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{\zeta}_k),(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{4}\right|\right)^2 dF(\vec{\lambda})\right)^m$$

$$E\left(\int\limits_{\Delta_k}\left(\sin\langle\vec{\lambda},\vec{t}\rangle-\sin\langle\vec{\zeta}_k,\vec{t}\rangle-\sin\langle\vec{\lambda},\vec{s}\rangle+\sin\langle\vec{\zeta}_k,\vec{s}\rangle\right)d\eta_1(\vec{\lambda})\right)^{2m}\leq$$

$$\leq 4^{2m}\frac{(2m)!}{2^m m!}E\left(\int\limits_{\Delta_k}\left(\left|\sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{\zeta}_k),(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{4}\right|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|\sin\frac{\langle\vec{\zeta}_k,(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{\zeta}_k),(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{4}\right|\right)^2 dF(\vec{\lambda})\right)^m$$

Повертаючись до оцінки субгауссового стандарту $\tau\left(\eta_M(\vec{t})-\eta_M(\vec{s})\right)$ і враховуючи [1], матимемо:

$$\tau^2\left(\eta_M(\vec{t})-\eta_M(\vec{s})\right)\leq 2\sum_{k=1}^{M}(\tau^2(\omega_{k1})+\tau^2(\omega_{k2}))\leq 2\sum_{k=1}^{M}(\tau^2(\theta_{k1})+\tau^2(\theta_{k2}))\leq$$

$$\leq 4^3\sum_{k=1}^{M}\sup_{m\geq 1}\left[E\left(\int\limits_{\Delta_k}\left(\left|\sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{u}),(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{4}\right|+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left|\sin\frac{\langle\vec{u},(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{u}),(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{4}\right|\right)^2 dF(\vec{\lambda})\right)^m\right]^{\frac{1}{m}}=$$

$$=4^3\sum_{k=1}^{M}\sup_{m\geq 1}\left[\int\limits_{\Delta_k}\left(\int\limits_{\Delta_k}\left(\left|\sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{u}),(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{4}\right|+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left|\sin\frac{\langle\vec{u},(\vec{s}-\vec{t})\rangle}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{\langle(\vec{\lambda}-\vec{u}),(\vec{s}+\vec{t})\rangle}{4}\right|\right)^2 dF(\vec{\lambda})\right)^m dF_k(\vec{u})\right]^{\frac{1}{m}}\leq$$

$$4^3 \sum_{k=1}^{M} \sup_{m\geq 1} \left[(F(\Delta_k))^m \int\limits_{\Delta_k} \left(\int\limits_{\Delta_k} \left(\frac{\left|\langle(\vec{\lambda}-\vec{u}),(\vec{s}-\vec{t})\rangle\right|}{4} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\left|\langle\vec{u},(\vec{s}-\vec{t})\rangle\right|}{2} \cdot \frac{\left|\langle(\vec{\lambda}-\vec{u}),(\vec{s}+\vec{t})\rangle\right|}{4} \right)^2 dF_k(\vec{\lambda}) \right)^m dF_k(\vec{u}) \right]^{\frac{1}{m}} \leq$$

$$\leq 4 \sum_{k=1}^{M} F(\Delta_k) \sup_{m\geq 1} \left[\int\limits_{\Delta_k} \left(\int\limits_{\Delta_k} \left(\left|\langle(\vec{\lambda}-\vec{u}),(\vec{s}-\vec{t})\rangle\right| + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \frac{\left|\langle\vec{u},(\vec{s}-\vec{t})\rangle\right|}{2} \cdot \left|\langle(\vec{\lambda}-\vec{u}),(\vec{s}+\vec{t})\rangle\right| \right)^2 dF_k(\vec{\lambda}) \right)^m dF_k(\vec{u}) \right]^{\frac{1}{m}} \leq$$

Покладемо $\mathbf{T} = [0,T] \times \mathbf{T} = [0,T] \times \ldots \times \mathbf{T} = [0,T]$, $U = \max\limits_i |u_i|$, а область Δ_k з мірою $\mu(\Delta_k) = \frac{\mu(P)}{M}$. Тоді продовжимо оцінку

$$\leq 4 \sum_{k=1}^{M} F(\Delta_k) \left(\frac{\mu(P)}{M} \sum_i |s_i - t_i| + U \sum_i |s_i - t_i| \cdot nT \frac{\mu(P)}{M} \right)^2 \leq$$

$$\leq 4 \left(\frac{\mu(P)}{M} \right)^2 (\max_i |t_i - s_i|)^2 \sum_{k=1}^{M} F(\Delta_k)\,(1 + nTU)^2 =$$

$$= 4 \frac{\mu^2(P)}{M^2} (\max_i |t_i - s_i|)^2 F(P)(1 + nTU)^2.$$

Тоді $\sigma(h) \leq 2h\frac{\mu(P)}{M}\sqrt{F(P)}(1 + nTU)$, де μ міра Лебега.

2. Точність та надійність моделювання гауссових випадкових полів в просторі $C(\mathbf{T})$.

Означення 1. *[4] Випадкове поле $X_M(\vec{t})$ наближає поле $X(\vec{t})$ з надійністю $1-\beta$ та точністю $\delta > 0$ в просторі $C(\boldsymbol{T})$, якщо розбиття Λ таке, що має місце наступна нерівність $P\left\{\sup\limits_{\vec{t}\in\boldsymbol{T}} |\eta_M(\vec{t})| > \delta\right\} \leq \beta$.*

Теорема 1. *Нехай у моделі $X_M(\vec{t})$, $\vec{t} \in \boldsymbol{T} = [0,T]^n$ розбиття спектрального простору P таке, що при $\delta > 8I(\varepsilon_0)$ виконуються співвідношення:*

$$2exp\left\{ -\frac{1}{2\varepsilon_0^2} \left(\delta - \sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)} \right)^2 \right\} \leq \beta,$$

де $\varepsilon_0 = \sigma_0 = \sup\limits_{\vec{t}\in\boldsymbol{T}} \left(\tau(\eta_M(\vec{t}))\right)$, $\eta_M(\vec{t}) = X(\vec{t}) - X_M(\vec{t})$,

$$I(\varepsilon_0) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\varepsilon_0} \sqrt{n \ln\left(\frac{T\mu(P)(1 + nTU)\sqrt{F(\mu(P))}}{M\varepsilon} + 1 \right)} d\varepsilon.$$

Тоді модель $X_M(\vec{t})$ *наближається до гауссового поля* $X(\vec{t})$ *з надійністю* $1-\beta$, $0<\beta<1$ *та точністю* $\delta>0$ *в просторі* $C(\boldsymbol{T})$.

Доведення. Оскільки метрична масивність $N(\varepsilon)$ задовільняє нерівність $N(\varepsilon)\le\prod\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)=\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)^n$, то при $\delta>8I(\varepsilon_0)$ для субгауссового поля $\eta_M(\vec{t})$ виконується нерівність

$$P\left\{\sup_{\vec{t}\in\mathbf{T}}|\eta_M(\vec{t})|>\delta\right\}\le 2exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(\delta-\sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)}\right)^2\right\},$$

де

$$I(\varepsilon_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{H(\varepsilon)}d\varepsilon\le\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{\ln\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}+1\right)^n}d\varepsilon<\infty,$$

$H(\varepsilon)$ – метрична ентропія компактного простору $\mathbf{T}=[0,T]^n$, $\sigma(h)=\sup\limits_{\max\limits_i|t_i-s_i|\le h}\tau\left(\eta_M(\vec{t})-\eta_M(\vec{s})\right)$. З попередніх оцінок для $\sigma(h)$ маємо, що

$$\sigma^{(-1)}(h)=\frac{Mh}{2\mu(P)(1+nTU)\sqrt{F(P)}},$$

Тоді

$$I(\varepsilon_0)\le\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_0}\sqrt{n\ln\left(\frac{T\mu(P)(1+nTU)\sqrt{F(P)}}{M\varepsilon}+1\right)}d\varepsilon.$$

Праву частину останньої нерівності можна зробити як завгодно малою при певному підборі числа М. Тобто буде існувати таке розбиття спектрального простору, для якого виконуватиметься умова

$$2exp\left\{-\frac{1}{2\varepsilon_0^2}\left(\delta-\sqrt{8\delta I(\varepsilon_0)}\right)^2\right\}\le\beta$$

Висновки. Результати даної роботи можна застосувати при побудові комп'ютерної моделі гауссового однорідного ізотропного випадкового поля з обмеженим спектром із заданими точністю і надійністю.

1. *Buldygin V.V and Kozachenko Yu.V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes. – Rhode: American Mathematical Society.– 2000.
2. *Козаченко Ю.В. Пашко А.О.* Моделювання випадкових процесів. – К: Київський університет.– 1999.– С.223.
3. *Джуліано Антоніні Р., Козаченко Ю.В., Тегза А.М* Нерівності для норм субгауссових векторів та точність моделювання випадкових процесів // Теор.ймовірност. та матем. Статист. –Вип.66.-2002.-с58-66.
4. *Тегза А.М.* Побудова моделі гауссового однорідного ізотропного випадкового поля з заданою точністю і надійністю в L_p, $1\le p\le 2$.// Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки.- Вип.№ 2.- с.33-35.
5. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования – Москва, "Наука", 1982.
6. *Пригарин С.М.* Некоторые задчи теории численного моделирования случайных процессов и полей — Российская академия наук. Сибирское отделение. – Новосибирск, 1994.

Одержано ..2011