

© 2008 г. В. Ю. Лазур*, А. К. Рейтий*, В. В. Рубиш*

КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ B - И D -МЕЗОНОВ

Построена релятивистская потенциальная кварковая модель D -, D_s -, B - и B_s -мезонов, в которой движение легкого антикварка описывается уравнением Дирака со скалярно-векторной связью, а тяжелый кварк рассматривается как локальный источник глюонного поля. Эффективное межкварковое взаимодействие описывается комбинацией потенциала пертурбативного одноглюонного обмена $V_{\text{Coul}}(r)$ и дальнедействующих лоренц-скалярного $S_{\text{l.r.}}(r)$ и лоренц-векторного $V_{\text{l.r.}}(r)$ линейных потенциалов. В квазиклассическом приближении получены простые асимптотические формулы для энергетического и массового спектров, а также средних радиусов D -, D_s -, B - и B_s -мезонов, обеспечивающие высокую точность расчетов даже для состояний с радиальным квантовым числом $n_r \sim 1$. Показано, что тонкая структура P -волновых состояний в тяжело-легких мезонах в первую очередь чувствительна к выбору двух параметров: значения константы сильной связи α_s и коэффициента смешивания λ скалярного $S_{\text{l.r.}}(r)$ и векторного $V_{\text{l.r.}}(r)$ дальнедействующих потенциалов.

Ключевые слова: уравнение Дирака, лоренц-структура потенциалов взаимодействия, тяжело-легкие кварк-антикварковые системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как показывают многочисленные эксперименты, большинство известных в настоящее время частиц обладают внутренней структурой, т.е. являются составными объектами. Это в первую очередь касается адронов, которые по современным представлениям являются связанными состояниями цветных кварков и глюонов. Описание спектров масс и вероятностей распадов составных объектов требует построения последовательной теории связанных состояний, которая должна базироваться на основных принципах локальной квантовой теории поля и использовать ее аппарат [1]. Однако непосредственное вычисление указанных характеристик составных систем в рамках локальной квантовой теории поля вряд ли всегда возможно, поскольку

*Ужгородский национальный университет, Ужгород, Украина.
E-mail: lazur@univ.uzhgorod.ua

пока единственный известный способ расчетов в ней базируется на теории возмущений, в то время как природа образования связанных состояний взаимодействующих частиц, безусловно, должна определяться непертурбативными эффектами.

Наиболее действенным способом выхода за рамки теории возмущений при построении теории связанных состояний является использование динамических уравнений. Дело в том, что, даже если ядра динамических уравнений удастся построить только в низших порядках теории возмущений, разработка методов их точного или приближенного (но без использования теории возмущений) решения позволяет учесть вклад непертурбативных эффектов взаимодействия при вычислении наблюдаемых характеристик связанных состояний. В нерелятивистском случае подобная теория строится с помощью динамического уравнения Шредингера на языке классического потенциала. Однако при больших энергиях связи соответствующая теория должна быть существенно релятивистской. В связи с этим около полувека назад наметился путь решения данной проблемы, основанный на использовании динамических уравнений в локальной квантовой теории поля, примерами которых могут служить уравнение Бете–Солпитера [2], квазипотенциальное уравнение [3] и другие уравнения [4].

Важную роль в современном развитии релятивистской теории связанных состояний играет уравнение Дирака со смешанной скалярно-векторной связью. Основная ценность такого уравнения заключается в том, что оно служит адекватной математической моделью для широкого круга задач адронной физики, в которых возможен последовательный переход от двухчастичной теории к приближению внешнего поля. Из этого уравнения следует наличие спина и спинового момента у кварка и антикварка и естественным образом вытекают задачи о тонкой и сверхтонкой структуре энергий тяжело-легких ($Q\bar{q}$) мезонов – КХД-аналогов водородоподобных атомов. Рассматривая в пределе бесконечно тяжелого кварка Q уравнение Дирака как уравнение для одного легкого антикварка $\bar{q}$, можно изучить (подобно случаю водородоподобных атомов) ряд важных аспектов теории тяжело-легких кварк-антикварковых систем, в частности, релятивистскую динамику легкого антикварка $\bar{q}$ во внешнем поле тяжелого кварка Q , лоренц-структуру дальнедействующей части $Q\bar{q}$ -взаимодействия, тонкую структуру спектра тяжело-легких мезонов, влияние на спектр спонтанного нарушения киральной симметрии.

Математическая теория уравнения Дирака со скалярно-векторной связью развита в известной монографии [5]; подробную библиографию можно найти также в работах [6]–[8]. Были достигнуты определенные успехи в построении точных решений уравнения такого типа с потенциалами, отвечающими различным типам взаимодействий [5]. Однако в большинстве случаев попытки найти точные решения этого уравнения с более или менее реалистичными потенциалами наталкиваются на не преодолимые пока трудности. Известные методы приближенного исследования такого уравнения (теория возмущений по константе связи и т.п.) не дают полного представления о поведении волновых функций и спектра масс в наиболее интересной области значений констант связи для адронных систем, содержащих один легкий кварк наряду с одним (D -, B -мезоны) или двумя (дваждытяжелые Ξ -, Ω -барионы)

тяжелыми (анти)кварками; для таких систем, по-видимому, существенную роль играют релятивистские и непертурбативные эффекты. Поэтому при построении приближенных методов исследования связанных состояний уравнения Дирака особое внимание уделяется так называемым непертурбативным методам, параметр разложения которых не является малым параметром, входящим в потенциал. Среди них одним из наиболее распространенных является метод асимптотического разложения по постоянной Планка $\hbar$, получивший название квазиклассического приближения.

Строгая теория квазиклассических асимптотик, охватывающая наряду со спектральными задачами и задачу рассеяния, была построена в основополагающей монографии Маслова [9] и в последовавших за ней работах [10]. Метод ВКБ для фермионов, подчиняющихся уравнению Дирака с чисто векторной связью (в том числе для состояний, лежащих вблизи границы нижнего континуума), был детально развит в [11]–[13]. Именно с помощью квазиклассических методов было получено большинство “запоминающихся” результатов известной теории сверхтяжелых атомов [14].

Конструкция квазиклассических решений спинорного уравнения со скалярно-векторной связью была изложена недавно в работах [15], [16]. В нашей работе с помощью метода ВКБ [16] изучается поведение релятивистской частицы спина $1/2$ в присутствии вместе взятых скалярного и векторного внешних полей с потенциалами удерживающего типа. Для Корнелльской модели межкваркового взаимодействия получены простые асимптотические формулы для энергетического и массового спектров, средних радиусов тяжело-легких (D -, D_s -, B - и B_s -) мезонов. Эти формулы обеспечивают высокую точность расчетов даже для состояний с радиальным квантовым числом $n_r \sim 1$.

2. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА С ВЕКТОРНЫМ И СКАЛЯРНЫМ ПОТЕНЦИАЛАМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Задача описания движения релятивистской частицы спина $1/2$ в центральном поле, состоящем из скалярного и векторного внешних полей, сводится после разделения переменных к решению системы радиальных уравнений Дирака ($c = 1$)

$$\begin{aligned} \hbar \frac{dF}{dr} + \frac{\tilde{k}}{r} F - [(E - V(r)) + (m + S(r))] G &= 0, \\ \hbar \frac{dG}{dr} - \frac{\tilde{k}}{r} G + [(E - V(r)) - (m + S(r))] F &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее использованы обозначения $F(r) = rf(r)$, $G(r) = rg(r)$, где $f(r)$ и $g(r)$ – радиальные функции для верхней и нижней компонент дираковского биспинора соответственно [17], E и m – полная энергия и масса покоя частицы, $S(r)$ представляет собой лоренц-скалярный потенциал, а потенциал $V(r)$ с точностью до множителя совпадает с нулевой (временной) компонентой 4-вектора $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$, где $\mathbf{A} = 0$,

$V(r) = -eA_0(r)$, $e > 0$. В системе (1) $\tilde{k} = \hbar k$, где квантовое число

$$k = \begin{cases} -(l+1) & \text{для } j = l + 1/2 \quad (l = 0, 1, \dots), \\ l & \text{для } j = l - 1/2 \quad (l = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

j – полный момент количества движения фермиона, l – орбитальный момент (для верхней компоненты $F(r)$), так что $|k| = j + 1/2 = 1, 2, \dots$.

Теория квазиклассического приближения при $\hbar \rightarrow 0$ для уравнения Дирака со скалярно-векторной связью начала систематически разрабатываться в работах [16]. Формальные асимптотические разложения по степеням $\hbar$ в исходной системе Дирака (1) для радиальных функций $F(r)$ и $G(r)$ приводят к цепочке матричных дифференциальных уравнений, которые решаются последовательно с помощью известной техники левых и правых собственных векторов однородной системы. Для эффективного потенциала (ЭП) барьерного типа (см. рис. 1),

$$U(r, E) = \frac{E}{m}V + S + \frac{S^2 - V^2}{2m} + \frac{k^2}{2mr^2}, \quad (2)$$

были получены квазиклассические выражения для волновых функций в классически запрещенной и разрешенных областях, а также условие квантования, определяющее энергию (положение) связанного состояния E в смеси скалярного и векторного потенциалов:

$$\int_{r_0}^{r_1} \left(p + \frac{k w}{pr} \right) dr = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad w = \frac{1}{2} \left(\frac{V' - S'}{m + S + E - V} - \frac{1}{r} \right). \quad (3)$$

Здесь $n_r = 0, 1, 2, \dots$ имеет смысл радиального квантового числа, а

$$p(r) = \left[(E - V(r))^2 - (m + S(r))^2 - \left(\frac{k}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

– квазиклассический импульс для радиального движения частицы в потенциальной яме $r_0 < r < r_1$, r_0 и r_1 – точки поворота, т.е. корни уравнения $p^2(r) = 0$.

Новое правило квантования (3) отличается от обычного условия квантования Бора–Зоммерфельда [18] релятивистским выражением для импульса $p(r)$ и включением поправки, пропорциональной w , которая учитывает спин-орбитальное взаимодействие и приводит к расщеплению уровней с разным знаком квантового числа k .

Рассмотренная в следующих разделах спектральная задача для уравнения Дирака с потенциалами $S(r)$ и $V(r)$ удерживающего типа служит иллюстрацией применения этих методов к задачам адронной физики. Рассмотрение некоторых других видов потенциалов $S(r)$ и $V(r)$, а также более подробное математическое обоснование метода ВКБ для уравнения Дирака со скалярно-векторной связью можно найти в работах авторов [16].

3. ЗАВИСИМОСТЬ ЭП $U(r, E)$ ОТ ЛОРЕНЦ-СТРУКТУРЫ ВНЕШНЕГО ПОЛЯ

Простейшую модель взаимодействия релятивистской частицы спина $1/2$ со скалярным и векторным внешними полями одновременно, с которой мы встречаемся

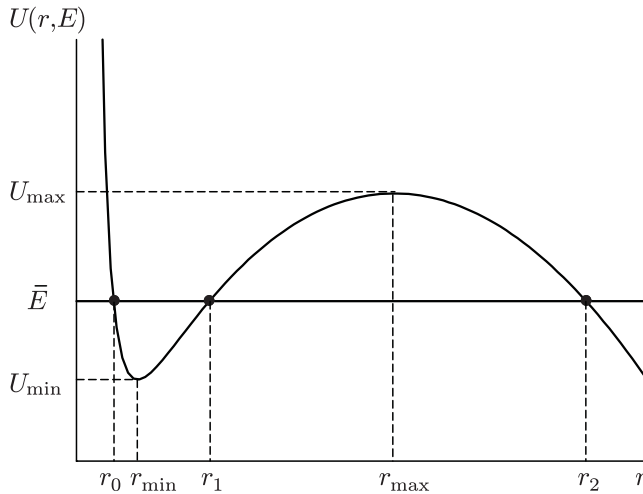


Рис. 1. Вид эффективного потенциала $U(r, E)$ барьерного типа; r_0, r_1, r_2 – корни уравнения $p^2(r) = 0$.

далее при расчете квазиклассического спектра релятивистских связанных состояний (см. раздел 4), зададим потенциалами

$$V(r) \equiv V_{\text{Coul}}(r) + V_{\text{l.r.}}(r) = -\frac{\xi}{r} + \lambda v(r), \quad (5a)$$

$$S(r) \equiv S_{\text{l.r.}}(r) = (1 - \lambda)v(r), \quad v(r) = \sigma r + V_0, \quad (5б)$$

где V_0 – вещественная постоянная, ξ – кулоновский коэффициент, а λ – параметр смешивания векторного $V_{\text{l.r.}}(r)$ и скалярного $S_{\text{l.r.}}(r)$ дальнедействующих потенциалов, причем $0 \leq \lambda \leq 1$. Ниже в настоящем разделе не вводится никаких ограничений на величину и даже знак параметра σ .

Связь между ЭП $U(r, E)$ и исходными потенциалами (5), входящими непосредственно в уравнение Дирака, довольно сложная: $U(r, E)$ зависит не только от r и параметров модели (5), но и от энергии уровня E и полного момента j . Для нас здесь особенно важно, что ЭП $U(r, E)$ имеет существенно разный вид при $\lambda < 1/2$, $\lambda > 1/2$ и $\lambda = 1/2$.

Наша цель – исследовать поведение ЭП $U(r, E)$ при больших и малых r . Подставляя $V(r)$ и $S(r)$ в виде (5) в (2) и удерживая при $r \rightarrow 0$ лишь наиболее сингулярные, а при $r \rightarrow \infty$ только ведущие (по r) члены, получаем, что

$$U(r, E) \sim \begin{cases} \frac{(1 - 2\lambda)\sigma^2}{2m} r^2 + \dots, & r \rightarrow \infty, \quad \lambda \neq \frac{1}{2}, \\ \frac{E + m}{2m} \sigma r + \dots, & r \rightarrow \infty, \quad \lambda = \frac{1}{2}, \\ \frac{\gamma^2}{2mr^2}, & r \rightarrow 0, \quad \gamma^2 = k^2 - \xi^2. \end{cases} \quad (6a)$$

$$(6б)$$

$$(6в)$$

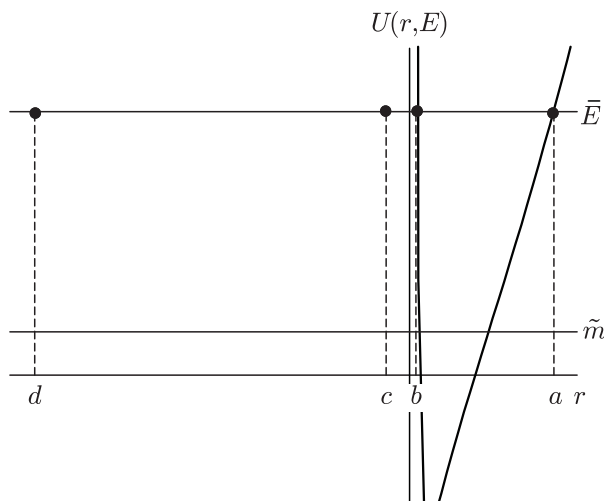


Рис. 2. Эффективный потенциал $U(r, E)$ системы Дирака (1) с потенциалами (9) в случае $\lambda < 1/2$, $\sigma > 0$, $\tilde{E} > \tilde{m}$; a , b , c и d – корни квазиимпульса (12).

Прежде всего заметим, что в асимптотической области в формуле (2) при $\lambda \neq 1/2$ существенно лишь квадратичное (по S и V) слагаемое $(S^2 - V^2)/2m$, которое ведет себя как $(1 - 2\lambda)\sigma^2 r^2/2m$ при $r \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что при любом знаке параметра σ ЭП $U(r, E)$ рассматриваемой модели (5) является (на достаточно больших расстояниях) потенциалом притяжения для $\lambda > 1/2$ и отталкивания для $\lambda < 1/2$. И то, и другое поведение (т.е. как притяжение для $\lambda > 1/2$, так и отталкивание для $\lambda < 1/2$) в равной степени являются чисто релятивистскими эффектами и связаны с тем, что взаимодействие фермиона со скалярным внешним полем $S(r)$ добавляется к скалярной величине m – массе частицы, тогда как векторный потенциал $V(r)$ вводится в свободное уравнение Дирака минимальным образом – как временная компонента лоренц-вектора A_μ .

Из сказанного ясно, что при $\lambda < 1/2$ ЭП $U(r, E)$ модели (5) является неограниченно растущим (с ростом r) запирающим потенциалом, у которого имеется только дискретный спектр уровней энергии; при этом существенно, что квадратичная зависимость ЭП $U(r, E)$ от r (а следовательно, и свойство конфинмента) возникает за счет релятивистских членов $(S^2 - V^2)/2m$. Примерный вид ЭП $U(r, E)$ при $\lambda < 1/2$ показан на рис. 2. Поразительно, что при $\lambda < 1/2$ связанные состояния в рассматриваемом составном поле (5) существуют даже тогда, когда исходный далекодействующий потенциал $v(r) = \sigma r + V_0$ соответствует притяжению ($\sigma < 0$, $V_0 < 0$).

Однако при $\lambda > 1/2$ и произвольном значении $\sigma \neq 0$ эффективный гамильтониан H квадрированного уравнения Дирака во внешнем поле (5) имеет комплексные собственные значения энергии, так как в этом случае ЭП $U(r, E)$ становится (на достаточно больших расстояниях) отрицательным и меньшим эффективной энергии частицы $\bar{E} = (E^2 - m^2)/2m$, что соответствует притяжению. Поэтому при $\lambda > 1/2$ ЭП $U(r, E)$ модели (5) имеет вид ямы, отделенной от внешней области широким

(при $|\sigma| \ll 1$) потенциальным барьером (см. рис. 1). Видно, что основной вклад в формирование барьера ЭП $U(r, E)$ вносит лоренц-векторная составляющая $V_{l.r.}(r)$ дальнегодействующего потенциала $v(r)$. Кроме того, как следует из (2) и (6а), при наличии одного только векторного поля ($\lambda = 1$) ЭП $U(r, E)$ не обладает запирающим действием даже тогда, когда исходный дальнегодействующий потенциал $v(r) = \sigma r + V_0$ соответствует либо притяжению ($\sigma < 0$, $V_0 < 0$), либо отталкиванию ($\sigma > 0$, $V_0 > 0$). В этом состоит принципиальное отличие рассматриваемой релятивистской потенциальной модели (5) от аналогичной нерелятивистской, для которой при отрицательных значениях параметров σ и V_0 ЭП $U_{\text{эф.}}^{n.r.}(r) = -\xi/r + \sigma r + V_0 + l(l+1)/2r^2$ в радиальном уравнении Шредингера обладает барьером, вследствие чего вместо дискретных уровней возникают квазистационарные состояния с комплексной энергией. Напротив, когда $\sigma > 0$, ЭП $U_{\text{эф.}}^{n.r.}(r)$ является бесконечно растущим запирающим потенциалом, имеющим только дискретный спектр уровней энергии. Отсутствие связанных состояний в уравнении Дирака с линейно растущим векторным потенциалом $V(r)$ было впервые отмечено в [19].

Из квазиклассических формул для волновых функций в области $r > r_2$ [16] легко установить асимптотический вид радиальных функций $F(r)$ и $G(r)$ при $r \rightarrow \infty$. При этом оказывается, что волновые функции экспоненциально убывают на больших расстояниях, если $0 \leq \lambda < 1/2$, и осциллируют, если $1/2 < \lambda \leq 1$. В качестве иллюстрации приведем эти асимптотики для радиальной функции, отвечающей верхней компоненте дираковского биспинора ($r \rightarrow \infty$):

$$F \sim \begin{cases} \exp\left(-\frac{\sqrt{1-2\lambda}|\sigma|}{2}r^2\right) & \text{при } 0 \leq \lambda < 1/2, \\ \exp\left(i\frac{\sqrt{2\lambda-1}|\sigma|}{2}r^2\right) & \text{при } 1/2 < \lambda \leq 1. \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда следует, что релятивистские решения для потенциальной модели (5) образуют (в зависимости от значения параметра смешивания λ) стационарную и квазистационарную системы, удовлетворяющие разным граничным условиям (7) при $\lambda < 1/2$ и при $\lambda > 1/2$.

Остановимся на еще одном важном частном случае, реализующемся при $\lambda = 1/2$. Подставляя в выражение (2) потенциалы (5) со значением $\lambda = 1/2$, мы видим, что квадратичная зависимость “хвоста” $U(r, E)$ от r исчезает, и доминирующую роль в ЭП (2) при больших r играют лишь дальнегодействующие части $V_{l.r.}(r)$, $S_{l.r.}(r)$ первых двух слагаемых, приводящие к практически линейной зависимости $U(r, E)$ от r (см. (6б)). Отметим, что при положительных значениях σ мы получаем опять-таки линейный запирающий потенциал, который имеет только дискретный спектр, а при отрицательных (достаточно малых) значениях σ ЭП $U(r, E)$ модели (5) обладает широким барьером. Вследствие этого становится возможным распад уровня путем просачивания через потенциальный барьер, т.е. связанный уровень превращается в квазистационарное экспоненциально распадающееся состояние с комплексной энергией $E = E_r - i\Gamma/2$. С точки зрения аналитичности описанное выше поведение ЭП $U(r, E)$ при $\sigma < 0$ и $\sigma > 0$ позволяет проследить выход дискретного спектра с вещественной оси в комплексную плоскость.

Подводя итог, можно сказать, что вариация одного из параметров модели взаимодействия (5) – коэффициента смешивания λ скалярного $S_{l.r.}(r)$ и векторного $V_{l.r.}(r)$ дальнodelствующих потенциалов – в интервале $0 \leq \lambda \leq 1$ позволяет получить качественно различную форму ЭП $U(r, E)$: от запирающего потенциала при $\lambda < 1/2$, у которого имеется только дискретный спектр, до случая потенциала с барьером при $\lambda > 1/2$, для которого уровни энергии являются квазистационарными, при физически важном промежуточном случае $\lambda = 1/2$, когда происходит указанная выше перестройка асимптотического (при $r \rightarrow \infty$) поведения “хвоста” ЭП $U(r, E)$ с квадратичного (6а) на линейное (6б).

Для квадрированного уравнения Дирака в составном поле (5) вид эффективного потенциала усложняется: к выражению (2) для $U(r, E)$ добавляются небольшие поправки, обязанные наличию спина частицы и спин-орбитальному взаимодействию. Из характера выводов относительно поведения ЭП $U(r, E)$ при $\lambda < 1/2$, $\lambda > 1/2$ и $\lambda = 1/2$ ясно, что указанные изменения вида $U(r, E)$ не меняют результаты качественно.

Все сказанное выше остается в силе и для сферически-симметричных потенциалов $S(r)$ и $V(r)$ со степенным ($v(r) \sim \sigma r^\beta$, $\beta > 0$) и логарифмическим ($v(r) \sim g \ln r$) поведением дальнodelствующей части $v(r)$ на бесконечности.

Выяснив качественную сторону дела, сконцентрируем внимание на практическом применении развитого выше аппарата квазиклассических асимптотик к тяжело-легким мезонам.

4. КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ТЯЖЕЛО-ЛЕГКИХ КВАРК-АНТИКВАРКОВЫХ СИСТЕМ

Для того чтобы применить потенциальный подход к описанию свойств тяжело-легких мезонов, необходимо построить потенциал взаимодействия кварка и антикварка. Как известно из КХД, на малых расстояниях ($r < 0.25$ фм) в силу свойства асимптотической свободы основной вклад вносит потенциал одноглюонного обмена кулоновского типа.

С ростом расстояния основным становится дальнodelствующее запирающее взаимодействие (конфайнмент), вид которого пока не удается установить в рамках КХД. Запирающий потенциал может иметь сложную лоренц-структуру. Например, в работах [20], [21] показано, что взаимодействие пары кварк–антикварк с флуктуирующим глюонным вакуумным полем приводит при конечной длине корреляций к линейно растущему потенциалу. Получающийся в таком подходе зависящий от спина потенциал имеет структуру, характерную для скалярного запираения. С другой стороны, в работе [22] на основе анализа системы уравнений Швингера–Дайсона получена инфракрасная асимптотика глюонного пропагатора вида $D(k^2) \sim 1/(k^2)^2$. Такая асимптотика в статическом пределе приводит к линейному векторному запирающему потенциалу. Поэтому наиболее вероятным представляется, что удерживающий потенциал состоит из смеси векторной и скалярной частей. Кроме того,

основанные на первых принципах КХД расчеты на решетках [23] выделяют линейный конфайнмент, пропорциональный $r/4\pi\alpha'(0)$ (где $\alpha'(0)$ – наклон адронной траектории Редже), как наиболее аргументированный. На основании приведенных соображений предположим, что $Q\bar{q}$ -взаимодействие представляет собой комбинацию следующих потенциалов:

а) потенциала одноглюонного обмена $V_{\text{Coul}}(r) = -\xi/r$, где $\xi = 4/3\alpha_s$, α_s – константа сильного взаимодействия,

$$\alpha_s(Q) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f) \ln(Q^2/\Lambda^2)}, \quad (8)$$

N_f – число ароматов кварков, а $\Lambda = 360$ МэВ – параметр КХД;

б) дальнегодействующего линейного скалярного запирающего потенциала $S_{\text{conf}}(r) = (1 - \lambda)v(r)$, где $v(r)$ определяется выражением (56);

в) дальнегодействующего линейного векторного потенциала $V_{\text{conf}}(r) = \lambda v(r)$.

Тогда полное эффективное кварк-антикварковое взаимодействие описывается комбинацией потенциала пертурбативного одноглюонного обмена $V_{\text{Coul}}(r)$ и дальнегодействующих скалярного $S_{\text{conf}}(r)$ и векторного $V_{\text{conf}}(r)$ потенциалов запираения:

$$\begin{aligned} V(r) &= V_{\text{Coul}}(r) + V_{\text{conf}}(r) = -\frac{\xi}{r} + \lambda(\sigma r + V_0), \\ S(r) &= S_{\text{conf}}(r) = (1 - \lambda)(\sigma r + V_0), \quad 0 \leq \lambda < 1/2. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\sigma = 0.18 \text{ ГэВ}^2$ – натяжение струны, V_0 – константа аддитивного сдвига энергии связи, а коэффициент смешивания λ векторного и скалярного запирающих потенциалов выступает в роли подгоночного параметра. Можно считать, что значение α_s примерно постоянно в каждом семействе тяжело-легких мезонов и дваждытяжелых барионов и меняется в соответствии с (8) только при переходе от одного семейства к другому.

Получить точное решение системы Дирака (1) с потенциалами (9) не удастся, поэтому мы применим метод квазиклассического приближения, имеющий в случае скалярного и векторного полей кулоновского и осцилляторного типа высокую точность даже для небольших квантовых чисел [16].

Выбор коэффициента смешивания в интервале $0 \leq \lambda < 1/2$ соответствует превалированию скалярного конфайнмента. В этом случае ЭП $U(r, E)$ используемой модели имеет вид обычной осцилляторной ямы с единственным минимумом (в точке $r_{\min} \approx \gamma^2/\tilde{E}\xi$) и без максимумов (см. рис. 2). При этом уравнение $p^2 = 2m(\bar{E} - U(r, E)) = 0$ для определения точек поворота приводится к полному алгебраическому уравнению четвертой степени $r^4 + fr^3 + gr^2 + hr + l = 0$ с коэффициентами

$$\begin{aligned} f &= \frac{2[\tilde{m}(1 - \lambda) + \tilde{E}\lambda]}{(1 - 2\lambda)\sigma}, & g &= -\frac{\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2 - 2\xi\sigma\lambda}{(1 - 2\lambda)\sigma^2}, \\ h &= -\frac{2\tilde{E}\xi}{(1 - 2\lambda)\sigma^2}, & l &= \frac{\gamma^2}{(1 - 2\lambda)\sigma^2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\tilde{E} = E - \lambda V_0, \quad \tilde{m} = m + (1 - \lambda)V_0 \quad (11)$$

– характерные параметры, имеющие смысл “сдвинутой” энергии и “сдвинутой” массы соответственно. Указанное уравнение имеет четыре действительных корня $d < c < b < a$, определяемых равенствами

$$\begin{aligned} a &= -\frac{f}{4} + \frac{1}{2}(\Xi + \Delta_+), & c &= -\frac{f}{4} - \frac{1}{2}(\Xi - \Delta_-), \\ b &= -\frac{f}{4} + \frac{1}{2}(\Xi - \Delta_+), & d &= -\frac{f}{4} - \frac{1}{2}(\Xi + \Delta_-). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Xi &= \left[\frac{f^2}{4} - \frac{2g}{3} + \frac{u}{3} \left(\frac{2}{Z} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left(\frac{Z}{2} \right)^{1/3} \right]^{1/2}, & \Delta_{\pm} &= \sqrt{F \pm \frac{D}{4\Xi}}, \\ F &= \frac{f^2}{2} - \frac{4g}{3} - \frac{u}{3} \left(\frac{2}{Z} \right)^{1/3} - \frac{1}{3} \left(\frac{Z}{2} \right)^{1/3}, & Z &= v + \sqrt{-4u^3 + v^2}, \\ D &= -f^3 + 4fg - 8h, & v &= 2g^3 - 9fgh + 27h^2 + 27f^2l - 72gl, \\ & & u &= g^2 - 3fh + 12l. \end{aligned}$$

Для рассматриваемых нами потенциалов квазиклассический импульс определяется равенствами (4), (9). Пользуясь формулами (12), придадим ему удобную для дальнейшего форму ($\sigma > 0$ и $\sigma < 0$):

$$p(r) = |\sigma| \sqrt{1 - 2\lambda} \frac{R(r)}{r} = |\sigma| \sqrt{1 - 2\lambda} \frac{[(a-r)(r-b)(r-c)(r-d)]^{1/2}}{r}. \quad (13)$$

Интегрирование в условии квантования (3) совершается по классически разрешенной области между двумя положительными точками поворота $b = r_0 < r_1 = a$, причем две другие точки поворота ($d < c < 0$) лежат в нефизической области $r < 0$. Пользуясь формулой (13), преобразуем интегралы квантования (3) к сумме интегралов

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_b^a p(r) dr = -|\sigma| \sqrt{1 - 2\lambda} \int_b^a \frac{(r^3 + fr^2 + gr + h + lr^{-1})}{R} dr, \\ J_2 &= \int_b^a \frac{k w}{p(r)r} dr = -\frac{k}{2|\sigma| \sqrt{1 - 2\lambda}} \left[\int_b^a \frac{dr}{(r - \lambda_+)R} + \int_b^a \frac{dr}{(r - \lambda_-)R} \right], \end{aligned} \quad (14)$$

где введены обозначения

$$\lambda_{\pm} = -\frac{\tilde{E} + \tilde{m} \mp \sqrt{(\tilde{E} + \tilde{m})^2 - 4\sigma\xi(1 - 2\lambda)}}{2\sigma(1 - 2\lambda)}.$$

Преимущество этой формы записи условия (3) через J_1 и J_2 по сравнению с исходной заключается в том, что содержащиеся в ней интегралы удается выразить через полные эллиптические интегралы.

Энергетический спектр частицы определяется правилом квантования (3), которое после вычисления интегралов квантования (14) (см. приложение) принимает вид

трансцендентного уравнения

$$\frac{-2\sqrt{1-2\lambda}}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \left[\frac{|\sigma|(b-c)^2}{\Re} \left[N_1 F(\chi) + N_2 E(\chi) + N_3 \Pi(\nu, \chi) + N_4 \Pi\left(\frac{c\nu}{b}, \chi\right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{k}{2(1-2\lambda)|\sigma|} [(b-c)(N_5 \Pi(\nu_+, \chi) + N_6 \Pi(\nu_-, \chi)) + N_7 F(\chi)] \right] = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi. \quad (15)$$

Здесь $F(\chi)$, $E(\chi)$ и $\Pi(\nu, \chi)$ – полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода соответственно (см. формулы (П.1)). Математические детали вычисления интегралов типа (14) можно найти в [24], [25], а выражения для ν , χ , $\nu_{\pm}$, $\Re$ и N_i ($i = 1, \dots, 7$) ввиду их громоздкости приведены в приложении.

В общем случае получить “точное” решение уравнения (15), конечно, невозможно, однако ситуация упрощается по мере увеличения энергии E или в приближении “слабого” (по сравнению с кулоновским) дальнего действующего поля. Первый случай соответствует тому, что при не слишком больших (т.е. “промежуточных”) значениях параметров ξ и σ (а именно при $\sigma \lesssim 0.2 \text{ ГэВ}^2$ и $0.3 < \xi < 0.8$) хорошо выполняется условие $\tilde{E}^2 \gg \sigma\gamma$ для всех возможных значений энергии уровней тяжело-легких мезонов $E_{n_r k}$, а второй случай осуществляется при выполнении условия $\sigma \ll \xi \tilde{m}^2$. В рамках нашего рассмотрения (т.е. для физики тяжело-легких мезонов) интерес представляет лишь первый случай, тогда как второй наиболее часто встречается в приближенных расчетах тех свойств низших адронных состояний, которые прямо не зависят от наличия или отсутствия конфайнмента.

Простой и часто эффективный способ вывода асимптотических разложений интегралов вида (14) состоит в разложении квазиимпульса $p(r)$ по малому параметру – возмущению и почленном интегрировании получающегося ряда. При этом следует отметить две особенности указанной процедуры вычисления интегралов J_1 и J_2 , содержащих малый параметр. Во-первых, из анализа выражений (12) видно, что помимо уровня $E = m$ следует ввести еще один характерный энергетический уровень $\tilde{E} = \tilde{m}$, разделяющий области применимости полученных ниже асимптотических приближений для интегралов квантования J_1 и J_2 . Используя соотношения $\tilde{E} > \tilde{m}$ и $\tilde{E} < \tilde{m}$, можно показать, что в этих двух областях спектра движение квазиклассично, если выполнены условия $\sigma/\xi \tilde{m}^2 \ll 1$ для $\tilde{E} < \tilde{m}$ и $\sigma\gamma/\tilde{E}^2 \ll 1$ для $\tilde{E} > \tilde{m}$. Это дает возможность путем формального разложения квазиимпульса в ряд по степеням малого безразмерного параметра ($\sigma\gamma/\tilde{E}^2 \ll 1$ или $\sigma/\xi \tilde{m}^2 \ll 1$) получить асимптотические выражения для J_1 и J_2 в элементарных функциях. Во-вторых, дальнейший анализ существенно зависит от взаимного расположения точек поворота a , b , c и d . При этом в зависимости от значения $\tilde{E}$ относительно уровня $\tilde{m}$ мы рассмотрим несколько наиболее типичных ситуаций.

СЛУЧАЙ А. Пусть $\sigma > 0$ и выполнены условия $\sigma \ll \xi \tilde{m}^2$ и $\tilde{E} < \tilde{m}$. К этому случаю относятся глубокие уровни, энергия которых близка ко дну скалярно-векторной ямы $U(r, E)$. Оценивая в приближении $\sigma/\xi \tilde{m}^2 \ll 1$ выражения (12) для точек поворота и оставляя лишь два первых члена разложений по малому параметру, нетрудно

получить, что

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{\tilde{E}\xi + \theta}{\mu^2} \left[1 - \frac{\tilde{E}\xi + \theta}{\mu^4} \left(\eta_1 + \frac{\tilde{m}\xi\eta_2}{\mu} \right) \sigma \right], \\ b &\approx \frac{\tilde{E}\xi - \theta}{\mu^2} \left[1 - \frac{\tilde{E}\xi - \theta}{\mu^4} \left(\eta_1 - \frac{\tilde{m}\xi\eta_2}{\mu} \right) \sigma \right], \\ c &\approx -\frac{\tilde{m} - \tilde{E}}{\sigma} - \frac{\xi}{\tilde{m} - \tilde{E}}, \quad d \approx -\frac{\tilde{m} + \tilde{E}}{\sigma(1 - 2\lambda)} + \frac{\xi}{\tilde{m} + \tilde{E}}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь, как и всюду далее, используются обозначения

$$\begin{aligned} \theta &= \sqrt{(\tilde{E}k)^2 - (\tilde{m}\gamma)^2}, \quad \mu = \sqrt{\tilde{m}^2 - \tilde{E}^2}, \\ \eta_1 &= (1 - \lambda)\tilde{m} + \lambda\tilde{E}, \quad \eta_2 = \lambda\tilde{m} + (1 - \lambda)\tilde{E}. \end{aligned} \quad (17)$$

Из асимптотических выражений (16) следует, что положительные точки поворота a и b слабо зависят от σ и определяются только кулоновским полем. Две другие (отрицательные) точки поворота c и d зависят в основном от линейной части $v(r)$ взаимодействия (9), но их значения “подправляются” на величины $\mp\xi/(\tilde{m} \mp \tilde{E})$, обусловленные кулоновским дальновдействием. Из (16) видно также, что при малых положительных значениях σ точки поворота c и d находятся достаточно далеко от пары точек a, b и стремятся к $-\infty$ в пределе $\sigma \rightarrow 0$.

Для массивных кварков ($\tilde{m}^2\xi \gg \sigma$) свойства глубоколежащих уровней определяются в основном кулоновским потенциалом. Рассматривая дальновдействующий потенциал $v(r)$ как малое возмущение, разложим квазиклассический импульс $p(r)$ в области потенциальной ямы $b < r < a$ в ряд по возрастающим степеням $r/|c| \ll 1$ и $r/|d| \ll 1$. Вычисляя затем почленно в (3) табличные интегралы, сумма которых дает значение интегралов квантования J_1, J_2 с точностью до членов $O((\sigma/\xi\tilde{m}^2)^2)$, мы получим уравнение, которое легко решается относительно энергии уровней:

$$E_{n_r, k} = \tilde{E}_0 + \lambda V_0 + \frac{\sigma}{2\xi\tilde{m}^2} \left[\left(\frac{\xi^2\tilde{m}^2}{\mu_0^2} - k^2 \right) \eta_{10} + \left(\frac{2\xi^2\tilde{m}\tilde{E}_0}{\mu_0^2} - k \right) \eta_{20} \right] + O\left(\left(\frac{\sigma}{\xi\tilde{m}^2} \right)^2 \right), \quad (18)$$

где $\tilde{E}_0 = \tilde{m} [1 + \xi^2/(n'_r + \gamma)^2]^{-1/2}$ – дираковский уровень энергии фермиона (с эффективной массой $\tilde{m} = m + (1 - \lambda)V_0$) в кулоновском поле, $n'_r = n_r + (1 + \text{sgn } k)/2$, а величины μ_0, η_{10} и η_{20} получаются из μ, η_1 и η_2 заменой $\tilde{E}$ на $\tilde{E}_0$. Принятое ранее условие $\sigma > 0$ не является здесь необходимым, поскольку этот результат справедлив и в случае отрицательных значений параметра σ .

Формула (18) может быть найдена и с помощью обычной теории возмущений, однако это требует довольно громоздких вычислений. Использование квазиклассических формул (3), (14) существенно упрощает расчеты. Как показывает сравнение с результатом, полученным численным интегрированием уравнений (1), формула (18) обеспечивает хорошую точность в расчетах спектров связанных систем тяжелых кварков (например, $Q\bar{Q}$ -мезонов, см. [26]).

Вычисления, которые мы здесь не приводим, показывают, что в случае $\lambda < 1/2$ и (достаточно малых) отрицательных значений σ ЭП $U(r, E)$ имеет вид двойной ямы.

Если пренебречь проницаемостью барьера в области $c < r < b$ между двумя ямами, то квазиклассические условия квантования в такой яме могут быть просто записаны как условия на фазовые интегралы по области квазиклассического движения в каждой из ям. Тогда квантование по формуле (3) в левой яме приводит к полученной выше формуле (18).

СЛУЧАЙ Б. В практически важной области $\tilde{E} > \tilde{m}$ и $\sigma > 0$, представляющей реальный интерес для физики тяжело-легких мезонов, в спектральной задаче появляется малый безразмерный параметр $\sigma\gamma/\tilde{E}^2$. При условии $\sigma\gamma/\tilde{E}^2 \ll 1$ из точных формул (12) легко получить приближенные выражения для точек поворота:

$$\begin{aligned} a &\approx \frac{\tilde{E} - \tilde{m}}{\sigma} + \frac{\xi}{\tilde{E} - \tilde{m}}, & b &\approx \frac{-\tilde{E}\xi + \theta}{\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2}, \\ c &\approx \frac{-\tilde{E}\xi - \theta}{\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2}, & d &\approx -\frac{\tilde{E} + \tilde{m}}{\sigma(1 - 2\lambda)} + \frac{\xi}{\tilde{E} + \tilde{m}}. \end{aligned} \quad (19)$$

Как видно из этих формул, точки поворота a и b сильно разнесены, и использованное выше разложение для квазиимпульса $p(r)$ не справедливо во всем интервале интегрирования. Тем не менее, используя условие $\sigma\gamma/\tilde{E}^2 \ll 1$, можно воспользоваться приближенным методом вычисления интегралов квантования, основанным на идее разбиения всего промежутка интегрирования $[b, a]$ на участки $[b, \tilde{r}]$ и $[\tilde{r}, a]$, в каждом из которых учитывается точно лишь доминирующий тип взаимодействия, а остальные рассматриваются как возмущения.

Найдем такую точку $\tilde{r}$, которая разбивает область интегрирования $b \leq r \leq a$ на область $b \leq r \leq \tilde{r}$, в которой преобладает кулоновский потенциал, и область $\tilde{r} \leq r \leq a$, в которой доминирующим является дальнodelствующий потенциал $v(r)$. Способ выбора такой точки неоднозначен. Наиболее естественным представляется найти точку $\tilde{r}$, в которой дальнodelствующий потенциал $v(r)$ сравнивается с кулоновским. Из этого требования получаем, что $\tilde{r} \approx \sqrt{\tilde{E}\xi/\eta_1\sigma}$.

Вычисление интегралов квантования (при $\sigma\gamma/\tilde{E}^2 \ll 1$) осуществляется следующим образом. В области $b \leq r \leq \tilde{r}$ интегралы (14) вычисляем, разложив квазиимпульс $p(r)$ в ряд по возрастающим степеням параметров $r/a \ll 1$ и $r/|d| \ll 1$, а при $\tilde{r} \leq r \leq a$ разложение $p(r)$ проводим по малым величинам $b/r \ll 1$ и $|c|/r \ll 1$.

Итак, разбиение интервала интегрирования в точке $\tilde{r} \approx \sqrt{\tilde{E}\xi/\eta_1\sigma}$ дает для J_1 представление

$$J_1 = \sigma\sqrt{1 - 2\lambda}(j_1 + j_2), \quad (20)$$

где интегралы j_1 и j_2 с точностью до первой степени соответствующих малых параметров r/a , $r/|d|$ и b/r , $|c|/r$ в разложении для квазиимпульса $p(r)$ записываются как

$$\begin{aligned} j_1 &= \sqrt{-ad} \int_b^{\tilde{r}} \frac{\sqrt{(r-b)(r-c)}}{r} \left[1 - \frac{a+d}{2ad}r + \dots \right] dr, \\ j_2 &= \int_{\tilde{r}}^a \sqrt{(a-r)(r-d)} \left[1 - \frac{b+c}{2r} + \dots \right] dr. \end{aligned} \quad (21)$$

Вычислив в (21) табличные интегралы и сгруппировав слагаемые с одинаковой зависимостью от σ , получим

$$J_1 = \sigma \sqrt{-ad(1-2\lambda)} \left[\frac{b+c}{2} \ln \left(\frac{(a-d)(c-b)}{16ad} \right) - \sqrt{-bc} \arccos \left(\frac{b+c}{b-c} \right) + \right. \\ \left. + \frac{a+d}{4} + \frac{1}{4\sqrt{-ad}} \left(\frac{(a-d)^2}{2} - (a+d)(b+c) \right) \arccos \left(\frac{d+a}{d-a} \right) \right] + O \left(\frac{\sigma\gamma}{\tilde{E}^2} \right). \quad (22)$$

Отметим тот факт, что при сложении асимптотических выражений для j_1 и j_2 параметр $\tilde{r}$ не содержится в окончательном результате.

Для разложения интеграла J_2 по малому параметру $\sigma\gamma/\tilde{E}^2$ запишем его в виде суммы двух слагаемых:

$$J_2 = -\frac{k}{2\sigma\sqrt{1-2\lambda}}(\tilde{j}_1 + \tilde{j}_2), \quad (23)$$

где интегралам $\tilde{j}_1$ и $\tilde{j}_2$ может быть придан вид

$$\tilde{j}_1 \approx \frac{1}{\sqrt{-ad}} \int_b^{\tilde{r}} \frac{dr}{(r+\tilde{p})\sqrt{(r-b)(r-c)}}, \quad \tilde{p} = \frac{\xi}{\tilde{E} + \tilde{m}}, \quad (24) \\ \tilde{j}_2 \approx \int_{\tilde{r}}^a \frac{1}{\sqrt{(a-r)(r-d)}} \left[\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r(r+\tilde{q})} \right] dr, \quad \tilde{q} = \frac{\tilde{E} + \tilde{m}}{\sigma(1-2\lambda)}.$$

Элементарное вычисление интегралов в (24) приводит к следующему ответу:

$$J_2 = -\frac{k}{2|\sigma|\sqrt{1-2\lambda}} \frac{\arccos \left(\frac{b+c+\frac{2\xi}{\tilde{E}+\tilde{m}}}{b-c} \right)}{\sqrt{ad(b+\frac{\xi}{\tilde{E}+\tilde{m}})(c+\frac{\xi}{\tilde{E}+\tilde{m}})}} + O \left(\frac{\sigma\gamma}{\tilde{E}^2} \right). \quad (25)$$

Собрав вместе разложения (22) и (25) и сгруппировав слагаемые одного порядка по σ , мы получим из (3) трансцендентное уравнение, определяющее спектр энергии:

$$\frac{\eta_1 \sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2}}{2\sigma(2\lambda-1)} - \eta \left(\frac{\eta_2^2}{2\sigma(2\lambda-1)} + \lambda\xi \right) - \gamma \arccos \left(\frac{-\tilde{E}\xi}{\theta} \right) - \\ - \frac{\tilde{E}\xi}{\sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2}} \ln \left(\frac{\sigma\eta_2\theta}{4e(\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2)^2} \right) - \frac{\text{sgn } k}{2} \arccos \left(\frac{-\tilde{m}\xi}{\theta} \right) = \left(n_r + \frac{1}{2} \right) \pi, \quad (26)$$

где

$$\eta = (1-2\lambda)^{-1/2} \arccos(\eta_1/\eta_2). \quad (27)$$

Хотя уравнение (26) значительно проще “точного” квазиклассического уравнения (15) для энергии уровней, решение его все же требует численных расчетов. Мы рассмотрим ниже некоторые предельные случаи, когда уравнение (26) упрощается и может быть исследовано аналитически.

При значениях параметров $\sigma \lesssim 0.2 \text{ ГэВ}^2$ и $0.3 < \xi < 0.8$ для всех возможных значений энергии уровней тяжело-легких мезонов $E_{n_r k}$ хорошо выполняется условие $\tilde{E} \gg \tilde{m}$. Если разложить левую часть (26) по $\tilde{m}/\tilde{E} \ll 1$ с точностью до членов,

пропорциональных третьей степени, то для энергии уровней $E_{n_r,k}$ получаем трансцендентное уравнение

$$\begin{aligned} & [(1-\lambda)A - \lambda] \tilde{E}^2 + 2\tilde{m}\tilde{E}(1-\lambda)(\lambda A - 1) - 2\sigma(1-2\lambda) \left(\pi N + \xi \ln \frac{\sigma|k|(1-\lambda)}{4\tilde{E}^2} \right) - \\ & - \lambda\tilde{m}^2 + \lambda[\lambda\tilde{m}^2 - 2\sigma\xi(1-\lambda)]A = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$A = \frac{\arccos\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)}{\sqrt{1-2\lambda}}, \quad N = n_r + \frac{1}{2} + \frac{\operatorname{sgn} k}{4} + \frac{1}{\pi} \left(\gamma \arccos\left(-\frac{\xi}{|k|}\right) - \xi \right). \quad (29)$$

Решая это уравнение методом последовательных итераций, мы получаем в первом приближении искомое выражение для собственных значений энергии $E_{n_r,k}$ (с точностью до $O(\sigma\gamma/\tilde{E}^2)$):

$$\begin{aligned} E_{n_r,k}^{\text{ВКБ(ас)}} = & \zeta^{-1} \left\{ B + \left(B^2 + \zeta \left[2\sigma(1-2\lambda) \left(\xi \ln \frac{\sigma|k|(1-\lambda)}{4(\tilde{E}^{(0)})^2} + 3\xi + \lambda\xi A + \pi N \right) + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \lambda\tilde{m}^2(1-\lambda A) \right] \right)^{1/2} \right\} + \lambda V_0, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$\zeta = (1-\lambda)^2 A - \lambda - \frac{2\sigma\xi(1-2\lambda)}{(\tilde{E}^{(0)})^2}, \quad B = (1-\lambda)(1-\lambda A)\tilde{m} - \frac{4\sigma\xi(1-2\lambda)}{\tilde{E}^{(0)}},$$

а $\tilde{E}^{(0)} = E^{(0)} - \lambda V_0$, $E^{(0)}$ – нулевое приближение для энергии, от выбора которого величина $E_{n_r,k}$ зависит очень слабо, и в большинстве случаев можно положить $E^{(0)} \approx E_{n_r,k}(\xi)|_{\xi=0}$.

Мы получили формулу (30) для энергии уровней $E_{n_r,k}$, которая неаналитически зависит от натяжения струны σ и потому по теории возмущений не может быть получена. Интересно отметить, что для чисто скалярного конфайнмента ($\lambda = 0$) формула (30) для собственных значений энергии $E_{n_r,k}$ упрощается до

$$E_{n_r,k}^{\text{ВКБ(ас)}} = \frac{2}{\pi} \left[m + \sqrt{m^2 + \sigma\pi \left(\xi \ln \frac{\sigma|k|}{(2E^{(0)})^2} + \pi N \right)} \right]. \quad (31)$$

Результаты вычислений уровней энергии $E_{n_r,k}^{\text{ВКБ}}$ и $E_{n_r,k}^{\text{ВКБ(ас)}}$ на основе трансцендентного уравнения (15) и асимптотической формулы (30) вместе с точными значениями $E_{n_r,k}$, полученными путем численного решения уравнения Дирака, приведены в табл. 1 для $n_r = 0, 1, 2$ и $k = \pm 1, \pm 2$. При расчетах мы выбрали значения α_s , λ , V_0 , $m_{u,d}$ и m_s , которые используются в КХД при описании состояний B ($b\bar{u}$ или $b\bar{d}$)- и B_s ($b\bar{s}$)-мезонов. Как видно из табл. 1, квазиклассические значения $E_{n_r,k}^{\text{ВКБ}}$ и $E_{n_r,k}^{\text{ВКБ(ас)}}$ имеют точность порядка 1% и 2% соответственно (за исключением энергий состояний с радиальным квантовым числом $n_r = 0$, для которых точность обоих

Таблица 1. Результаты расчета уровней энергии $E_{n_r k}^{\text{БКБ}}$ на основе трансцендентного уравнения (15) и $E_{n_r k}^{\text{БКБ(ac)}}$ на основе квазиклассического выражения (30), а также точные значения $E_{n_r k}$ для параметров $\alpha_s = 0.3$, $\lambda = 0.3$, $V_0 = -0.45 \text{ ГэВ}$ и $m_{u,d} = 0.33 \text{ ГэВ}$, $m_s = 0.5 \text{ ГэВ}$ (энергии приведены в ГэВ)

$b\bar{u}, b\bar{d}$					$b\bar{s}$		
$L_j(n_r, k)$		$E_{n_r k}$	$E_{n_r k}^{\text{BK}\bar{\text{B}}}$	$E_{n_r k}^{\text{BK}\bar{\text{B}}(\text{ac})}$	$E_{n_r k}$	$E_{n_r k}^{\text{BK}\bar{\text{B}}}$	$E_{n_r k}^{\text{BK}\bar{\text{B}}(\text{ac})}$
$S_{1/2}$	$(0, -1)$	0.4327	0.4408	0.4729	0.5248	0.5322	0.5623
	$(1, -1)$	0.8796	0.8838	0.8943	0.9750	0.9791	0.9912
	$(2, -1)$	1.1978	1.2009	1.2066	1.2946	1.2976	1.3049
$P_{3/2}$	$(0, -2)$	0.7355	0.7373	0.7504	0.8376	0.8392	0.8460
	$(1, -2)$	1.0880	1.0892	1.0947	1.1879	1.1890	1.1927
	$(2, -2)$	1.3658	1.3667	1.3699	1.4650	1.4659	1.4685
$P_{1/2}$	$(0, 1)$	0.7249	0.7293	0.7030	0.8235	0.8278	0.7985
	$(1, 1)$	1.0701	1.0733	1.0594	1.1696	1.1728	1.1572
	$(2, 1)$	1.3470	1.3496	1.3405	1.4466	1.4492	1.4390
$D_{3/2}$	$(0, 2)$	0.9661	0.9671	0.9343	1.0655	1.0665	1.0315
	$(1, 2)$	1.2588	1.2596	1.2385	1.3583	1.3591	1.3369
	$(2, 2)$	1.5058	1.5066	1.4914	1.6052	1.6059	1.5901

формул порядка 8%). Таким образом, точность определения $E_{n_r k}$ по квазиклассической формуле (30) такова, что для практических целей обычно нет смысла уточнять первое приближение.

Чтобы найти зависимость собственных значений энергий $E_{n_r k}$ от кулоновской константы связи ξ , мы решали численно трансцендентное уравнение (15) с таким набором параметров, определяющих вид исходных потенциалов взаимодействия (9): $\alpha_s = 0.3$, $\lambda = 0.3$, $V_0 = -0.45 \text{ ГэВ}$ и $m_{u,d} = 0.33 \text{ ГэВ}$. Графики зависимости энергетических уровней от отношения $\xi/|k|$ приведены на рис. 3, на которых сплошными линиями указан ход нескольких нижних ($n_r = 0$) уровней с данным значением k , а штриховыми линиями – возбужденных ($n_r = 1$) состояний. Как и следовало ожидать, с ростом кулоновского параметра ξ уровни энергии монотонно убывают и при $\xi \rightarrow |k|$ имеют особенность корневого типа. В этом наглядно проявляется “падение на центр” для уравнения Дирака в составном поле (9) с векторным потенциалом $V(r)$, который имеет кулоновскую особенность в нуле, $V(r) \approx V_{\text{Coul}}(r) = -\xi/r$ при $r \rightarrow 0$. Как известно [27], всякое обрезание потенциала $V(r)$ на малых расстояниях устраняет корневую особенность у энергий $E_{n_r k}$, и кривая уровня $E_{n_r k}(\xi)$ гладко продолжается в область $E < 0$.

Из рис. 3 видно, что для состояний с одним и тем же n_r уровни энергии с $k > 0$ лежат значительно выше уровней с $k < 0$. В этом проявляется действие центростремительного барьера (например, для состояний с $k = -1$ этот барьер отсутствует, тогда как для состояний с $k = +1$ он подавляет вероятность присутствия кварка на больших расстояниях). Эти выводы полностью подтверждаются при численном реше-

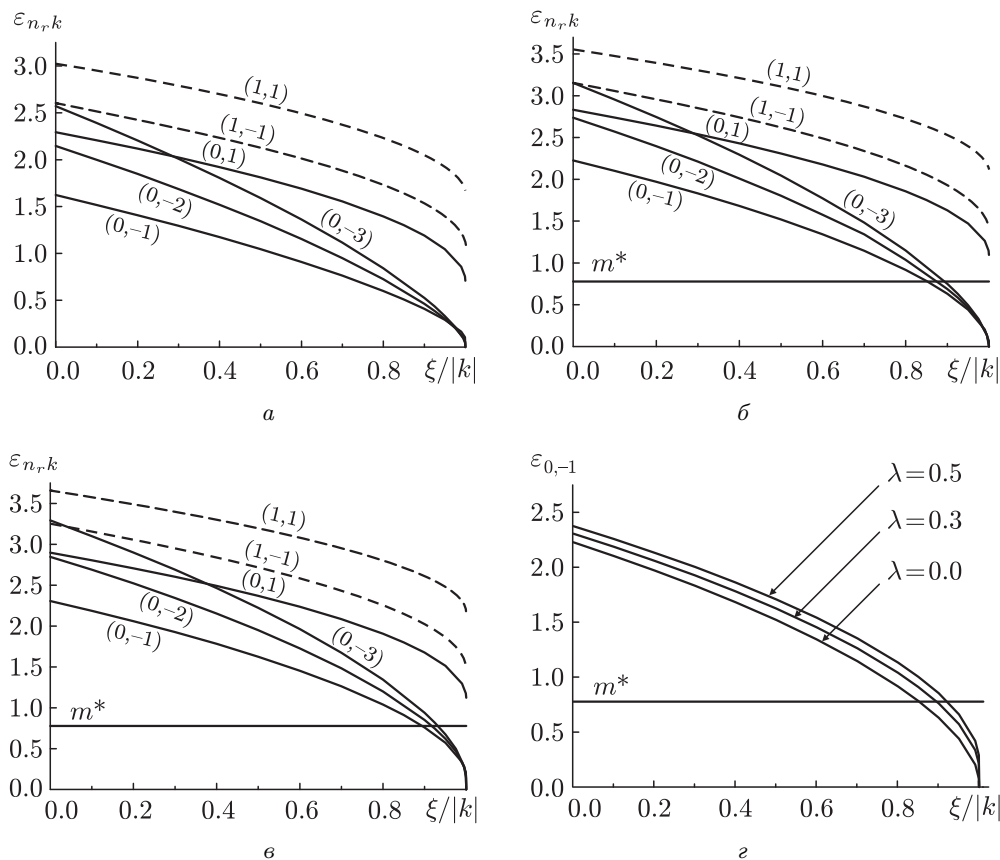


Рис. 3. Зависимость энергии уровней $\varepsilon_{n_r, k} = E_{n_r, k}/\sqrt{\sigma}$ от $\xi/|k|$ (а–в). Сплошные линии соответствуют нижним ($n_r = 0$) уровням с данным значением k , а штриховые линии – возбужденным ($n_r = 1$) состояниям. Значения параметров: $m = 0, \lambda = 0$ (а); $m = 0.33 \text{ ГэВ}, \lambda = 0$ (б); $m = 0.33 \text{ ГэВ}, \sigma = 0.18 \text{ ГэВ}^2, \lambda = 0.3$ (в); $m^* = m/\sqrt{\sigma}$. Зависимость энергии уровня $\varepsilon_{0,-1}$ от $\xi/|k|$ для разных значений параметра λ при $m = 0.33 \text{ ГэВ}$ (г).

нии системы Дирака (1) с потенциалами (9), результаты которого представлены в работе [27].

Отметим также, что энергии нижних ($n_r = 0$) уровней с $k < 0$ достигают нулевого значения ($E = 0$) при максимально возможном значении кулоновской константы связи $\xi = -k$ (см. рис. 3а–3в). Все остальные состояния также имеют при $\xi = |k|$ особенность корневого типа, но их энергии положительны.

Проведенное выше исследование спектра уравнения Дирака в составном поле (9) с помощью ВКБ-приближения представляет практический интерес, так как в ряде случаев гораздо проще вычислять интегралы в условии квантования (3), чем находить точные значения энергии уровней, решая систему радиальных уравнений Дирака (1) численно.

5. СПЕКТР МАСС ТЯЖЕЛО-ЛЕГКИХ КВАРКОВЫХ СИСТЕМ

Качественная картина формирования связанных состояний в $Q\bar{q}$ -системе определяется наличием масштаба $\Lambda_{\text{КХД}}$ конфайнмента легкого антикварка $\bar{q}$: $\Lambda_{\text{КХД}} \ll m_Q$, где m_Q – масса тяжелого кварка Q . При этом условии тяжелый кварк Q воспринимается легким антикварком $\bar{q}$ как локальный статический источник цветового (глюонного) КХД-поля. Наличие малого параметра $\Lambda_{\text{КХД}}/m_Q \ll 1$ позволило разработать мощные средства изучения КХД во взаимодействиях тяжелых кварков с легкими. Так, для адронных систем с одним тяжелым кварком ($Q\bar{q}$, Qqq) была развита (см., например, работу [6] и указанные там ссылки) согласованная схема эффективной теории тяжелых кварков, в лидирующем члене которой (т.е. в статическом пределе $m_Q \rightarrow \infty$), во-первых, спин тяжелого кварка Q отщеплен от взаимодействия с маловиртуальными глюонами, во-вторых, эффективный гамильтониан в точности соответствует дираковскому гамильтониану одночастичной задачи (1), а энергия спин-орбитального взаимодействия легкого антикварка $\bar{q}$ становится главной частью спиновых взаимодействий. Этот факт находит свое выражение в приближенной спиновой симметрии Изгура–Вайза [28] для тяжелого кварка.

В ведущем порядке по $1/m_Q$ массовый спектр состояний мезона с одним тяжелым кварком задается выражением [6], [29]–[31]

$$M_{n,r,k}^{\text{теор}}(Q\bar{q}) = E_{n,r,k} + \sqrt{E_{n,r,k}^2 - m_q^2 + m_Q^2}, \quad (32)$$

где m_Q и m_q – массы тяжелого кварка Q и легкого антикварка $\bar{q}$, составляющих $Q\bar{q}$ -мезон. Таким образом, задача расчета массового спектра $Q\bar{q}$ -мезонов сводится к последовательному вычислению собственных значений энергии уравнения Дирака (1) в составном поле (9), источником которого в данном случае служит тяжелый кварк Q .

Свойства симметрии уравнения Дирака (1) значительно упрощают задачу классификации состояний тяжело-легких мезонов. Гамильтониан уравнения (1) не содержит членов, описывающих взаимодействие спина Q -кварка с орбитальным $\vec{l}$ и спиновым $\vec{s}_q$ моментами легкого антикварка, то интегралами движения будут по отдельности спиновый момент $\vec{S}_Q$ тяжелого кварка Q и полный момент количества движения $\vec{j} = \vec{s}_q + \vec{l}$ легкого антикварка $\bar{q}$. Это обстоятельство позволяет классифицировать состояния по квантовым числам $j = 1/2, 3/2, \dots$ оператора полного момента легкого антикварка $\bar{q}$, в то время как состояния полного момента составной $Q\bar{q}$ -системы $\vec{J} = \vec{j} + \vec{S}_Q$ являются вырожденными по отношению к ориентации спина $\vec{S}_Q$ тяжелого кварка Q . Таким образом, в приближении спиновой симметрии [28] каждому состоянию уравнения Дирака с данным j и пространственной четностью $P = (-1)^{l+1}$ соответствуют два почти вырожденных состояния составной $Q\bar{q}$ -системы с $J = j \pm 1/2$. Поэтому массы j^P -состояний $Q\bar{q}$ -мезона также вырождены по J , и эти состояния имеют тождественные волновые функции.

Основному состоянию $Q\bar{q}$ -мезонов соответствуют значения $l = 0$ (s -состояния в кварк-антикварковой модели) и $j = 1/2^-$. Этот дублет включает два состояния $J^P = (0^-, 1^-)$. В случае $l = 1$ (p -состояние в кварковой модели) имеем два состояния с $j = 1/2^+$ и $j = 3/2^+$ и два соответствующих дублета $J^P = (0^+, 1^+)$ и $J^P = (1^+, 2^+)$.

Для семейств D - и D_s -мезонов введем, как обычно, сокращенные обозначения: (D_0^*, D_1') – члены очарованного дублета $J^P = (0^+, 1^+)$ с $j = 1/2^+$ для нестранных состояний ($c\bar{u}$ -система), (D_{s0}^*, D_{s1}') – члены того же дублета для странных состояний ($c\bar{s}$ -система), (D_1, D_2^*) и (D_{s1}, D_{s2}^*) – члены дублета $J^P = (1^+, 2^+)$ с $j = 3/2^+$ для нестранных и странных состояний соответственно. Аналогичная система обозначений используется и для B - и B_s -семейств.

Ранее мы не учитывали сверхтонкую структуру (СТС) уровней, и поэтому предложенная потенциальная модель способна предсказывать лишь положение центра тяжести СТС-мультиплета, образованного подуровнями с различными моментами $\vec{J} = \vec{j} + \vec{S}_Q$. В реальных $Q\bar{q}$ -системах вырождение дублетных состояний, соответствующих различным моментам $J = j \pm 1/2$ при данном j , снимается прежде всего за счет $\vec{s}_q \vec{S}_Q$ -взаимодействия. Поэтому, чтобы иметь возможность сравнивать наши теоретические предсказания с экспериментальными данными, в табл. 2–5 мы приводим наблюдаемые значения центров тяжести масс СТС-мультиплетов, рассчитанные по известной формуле

$$M_{\text{эксп}} = \frac{\sum_J ((2J+1)M_J)}{\sum_J (2J+1)}, \quad (33)$$

где M_J – экспериментальное значение массы состояния с данным J .

Основываясь на этих наблюдениях, мы попытались описать спектры масс низших состояний тяжело-легких $B(b\bar{u}$ или $b\bar{d})$ -, $B_s(b\bar{s})$ -, $D(c\bar{u}$ или $c\bar{d})$ -, $D_s(c\bar{s})$ -мезонов, считая σ и λ универсальными величинами, а значения параметров α_s и V_0 постоянными в каждом семействе тяжело-легких мезонов и слабо меняющимися только при переходе от одного семейства к другому. Все четыре параметра σ , λ , α_s , V_0 потенциальной модели (9) определялись с помощью фитирования имеющихся данных о спектрах масс псевдоскалярных D - и B -мезонов. Впоследствии найденные значения параметров будут использованы в других приложениях в рамках данного подхода, например при описании спектров странных D_s - и B_s -мезонов.

Априори мы используем только одно ограничение: значение коэффициента смешивания λ векторного $V_{\text{conf}}(r)$ и скалярного $S_{\text{conf}}(r)$ дальнodelействующих потенциалов должно лежать в интервале $0 \leq \lambda < 1/2$, чтобы ЭП $U(r, E)$ модели взаимодействия (9) был потенциалом удерживающего типа. Само значение параметра λ было получено в результате фитирования экспериментальных данных [32], [33] о тонкой структуре P -волновых уровней в D - и B -мезонах. Установлено, что тонкая структура P -волновых состояний в тяжело-легких (D -, D_s -, B - и B_s -) мезонах в первую очередь чувствительна к выбору коэффициента смешивания λ и значения константы сильной связи α_s . Сравнение результатов расчетов по формулам (15), (32) с экспериментальными данными [32], [33] показывает, что наилучшее согласие достигается для $\lambda = 0.3$ и следующего набора параметров:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0.18 \text{ ГэВ}^2, & \alpha_s(c\bar{u} \text{ или } c\bar{d}) &= 0.386, & \alpha_s(b\bar{u} \text{ или } b\bar{d}) &= 0.3, \\ \alpha_s(s\bar{u} \text{ или } s\bar{d}) &= 0.421, & V_0(c\bar{u} \text{ или } c\bar{d}) &= -375 \text{ МэВ}, & V_0(b\bar{u} \text{ или } b\bar{d}) &= -450 \text{ МэВ}. \end{aligned}$$

Для масс u -, d -, s -, c - и b -кварков использовались их конституентные массы $m_{u,d} = 330$ МэВ, $m_s = 500$ МэВ, $m_c = 1550$ МэВ, $m_b = 4880$ МэВ. При расчете спектров

масс мы пренебрегали электромагнитным взаимодействием и разностью масс u - и d -кварков, поэтому, например, частицы D^+ , D^- , D^0 и $\bar{D}^0$ считались одним и тем же состоянием $Q\bar{q}$ -системы, $J^P = 0^-$. Точно так же для этих частиц не различались параметры модели взаимодействия σ , λ , α_s , V_0 . Рассчитанные в этом приближении спектры масс D^- , D_s -мезонов представлены в табл. 2, 3.

Таблица 2. Спектр масс и средние радиусы D -мезонов, полученные в ВКБ-приближении для потенциалов (9) (массы приведены в МэВ, а средние радиусы – в фм).

L_j	(n_r, k)	$M_{\text{теор}}$	$M_{\text{эксп}}$	$\langle r \rangle_{\text{числ}}$	$\langle r \rangle$ (35)
$S_{1/2}$	(0, -1)	2001.5	1971.1	0.472	0.402
	(1, -1)	2632.3	< 2637	0.684	0.664
$P_{3/2}$	(0, -2)	2443.2	2447.3	0.678	0.632
	(1, -2)	2981.9	–	0.856	0.833
$P_{1/2}$	(0, 1)	2403.7	2407.8	0.513	0.568
	(1, 1)	2933.4	–	0.770	0.788

Таблица 3. Спектр масс и средние радиусы D_s -мезонов, полученные в ВКБ-приближении для потенциалов (9) (массы приведены в МэВ, а средние радиусы – в фм).

L_j	(n_r, k)	$M_{\text{теор}}$	$M_{\text{эксп}}$		$\langle r \rangle_{\text{числ}}$	$\langle r \rangle$ (35)
$S_{1/2}$	(0, -1)	2069.0	2072		0.416	0.359
	(1, -1)	2737.4	–		0.646	0.628
$P_{3/2}$	(0, -2)	2552.1	2559.2 (I)	2530.7 (II)	0.625	0.588
	(1, -2)	3107.2	–	–	0.814	0.795
$P_{1/2}$	(0, 1)	2508.5	2423.8 (I)	2480.9 (II)	0.504	0.536
	(1, 1)	3058.5	–	–	0.739	0.756

Согласие модели с экспериментом лежит в пределах 3–5%, за исключением масс состояний $P_{3/2}$ и $P_{1/2}$ $c\bar{s}$ -системы, для которых отклонение зависит от интерпретации $D_{s1}(2536)^\pm$ -мезона и составляет 10%, если его рассматривать как векторное состояние $J^P = 1^+$, принадлежащее дублету $j = 3/2^+$, или 4%, если его относить к состоянию $J^P = 1^+$ дублета $j = 1/2^+$. Существует весьма широкий спектр мнений по поводу идентификации состояний $P_{3/2}$ и $P_{1/2}$ мезона с кварковым составом $c\bar{s}$ (см., например, [34]–[44]). Так, например, состояние $J^P = 2^+$ сравнительно узкого дублета $j = 3/2^+$ соотносят с D_{s2} (2573), а векторное состояние $J^P = 1^+$, принадлежащее к дублету $j = 3/2^+$, как правило, принято соотносить с изотопическим синглетом $D_{s1}(2536)^\pm$ -мезона, с массой $(2535.35 \pm 0.34 \pm 0.5)$ МэВ (значения (I) для $M_{\text{эксп}}$ в табл. 3) [34]–[37], [40]–[44]. С другой стороны, в работах [38], [39] состояние $D_{s1}(2536)^\pm$ ассоциируют с состоянием $J^P = 1^+$ широкого дублета $j = 1/2^+$

(значения (II) в табл. 3). Поэтому говорить о надежной экспериментальной идентификации этого состояния нельзя. Отметим, что наши расчеты согласуются со вторым случаем.

Для $b\bar{u}$ - и $b\bar{s}$ -систем (табл. 4, 5) получено хорошее совпадение представленных результатов с экспериментальными данными для основного состояния с $j = 1/2^-$ и p -состояния с $j = 3/2^+$. Для состояний, входящих в дублет $j = 1/2^+$, имеются только теоретические предсказания других авторов. В случае $b\bar{u}$ -системы наши результаты согласуются с данными, полученными в [45], а в случае $b\bar{s}$ -системы наблюдается поразительное совпадение с результатами работ [34], [35], [46].

Таблица 4. Спектр масс и средние радиусы B -мезонов, полученные в ВКБ-приближении для потенциалов (9) (массы приведены в МэВ, а средние радиусы – в фм).

L_j	(n_r, k)	$M_{\text{теор}}$	$M_{\text{эксп}}$	$\langle r \rangle_{\text{числ}}$	$\langle r \rangle$ (35)
$S_{1/2}$	(0, -1)	5329.5	5313.5	0.516	0.448
	(1, -1)	5832.2	–	0.728	0.708
$P_{3/2}$	(0, -2)	5661.6	< 5698	0.711	0.666
	(1, -2)	6078.4	–	0.888	0.865
$P_{1/2}$	(0, 1)	5652.4	5751.6 [34] 5624 [45]	0.577	0.612
	(1, 1)	6059.0	–	0.812	0.829

Таблица 5. Спектр масс и средние радиусы B_s -мезонов, полученные в ВКБ-приближении для потенциалов (9) (массы приведены в МэВ, а средние радиусы – в фм).

L_j	(n_r, k)	$M_{\text{теор}}$	$M_{\text{эксп}}$	$\langle r \rangle_{\text{числ}}$	$\langle r \rangle$ (35)
$S_{1/2}$	(0, -1)	5415.6	5404.8	0.457	0.404
	(1, -1)	5931.2	–	0.688	0.671
$P_{3/2}$	(0, -2)	5765.6	< 5853	0.656	0.619
	(1, -2)	6186.8	–	0.845	0.826
$P_{1/2}$	(0, 1)	5752.2	5751.8 [34] 5753.3 [35] 5700.5 [45] 5755.0 [46] 5790.3 [47]	0.547	0.575
	(1, 1)	6166.8	–	0.779	0.795

В ведущем приближении (по $1/m_Q$) волновые функции и энергии возбуждения странного кварка в поле тяжелого c - или b -кварка с хорошей точностью повторяют характеристики аналогичных тяжело-легких мезонов с легкими u - , d -кварками. Поэтому с точностью до аддитивного сдвига масс вверх на величину токовой массы

странного кварка

$$m_s \approx M[D_s] - M[D] \approx M[B_s] - M[B] \approx 0.1 \text{ ГэВ}$$

система уровней D_s - и B_s -мезонов без учета зависящего от спина тяжелого кварка расщепления совпадает с системой уровней D -мезонов и B -мезонов соответственно. Далее, спин-орбитальное расщепление нижних состояний D_s - и B_s -мезонов для уровней $P_{3/2}$ и $P_{1/2}$ на 35% больше, чем в D - и B -мезонах.

В рамках используемого квазиклассического приближения можно вычислить не только спектр связанных систем, но и все другие наблюдаемые характеристики тяжело-легких мезонов. Так, важной характеристикой мезонов является средний радиус $\langle r \rangle$, определяющий в случае водородоподобных кварковых систем радиус орбиты легкого кварка в определенном состоянии $|n_r k\rangle$. Получим сначала общие формулы, выражающие средние типа $\langle r^m \rangle$ (т. е. моменты плотности распределения вероятности) через квазиклассические асимптотики решений уравнения Дирака. Стандартная процедура приводит к известной квазиклассической формуле

$$\langle r^m \rangle = \int_0^\infty \chi^+ r^m \chi dr = \int_0^\infty (|F(r)|^2 + |G(r)|^2) r^m dr \approx \frac{2}{T} \int_{r_0}^{r_1} \frac{E - V(r)}{p(r)} r^m dr, \quad (34)$$

в которой период T радиальных колебаний классической релятивистской частицы дается формулой $T = 2 \int_{r_0}^{r_1} (E - V(r))/p(r) dr$ [16].

Все встречающиеся в (34) интегралы выражаются через полные эллиптические интегралы (II.1). В частности, средний радиус связанного состояния равен

$$\langle r \rangle = \frac{4[n_1 F(\chi) + n_2 E(\chi) + n_3 \Pi(\nu, \chi)]}{T \sqrt{(a-c)(b-d)(1-2\lambda)} |\sigma|}, \quad (35)$$

где

$$T = \frac{4[n_4 F(\chi) + n_5 E(\chi) + n_6 \Pi(\nu, \chi)]}{\sqrt{(a-c)(b-d)(1-2\lambda)} |\sigma|}, \quad (36)$$

а величины n_i ($i = 1, \dots, 6$) определены в приложении. Результаты расчета $\langle r \rangle$ по формулам (35), (36) для различных состояний D -, D_s -, B - и B_s -мезонов представлены в последних столбцах табл. 2–5. Видно, что квазиклассическое приближение неплохо описывает результаты численных расчетов $\langle r \rangle_{\text{числ}}$ и имеет точность 3% (кроме основного состояния). Расчеты показывают, что с ростом энергии уровня средний радиус $Q\bar{q}$ -системы монотонно возрастает.

Наряду с “точными” квазиклассическими формулами (35), (36) желательно найти приближенные аналитические выражения для величин $\langle r \rangle$ и T . Аналогичная задача уже рассматривалась в предыдущем разделе при построении асимптотических приближений для интегралов квантования.

На спектральном промежутке $\tilde{E} < \tilde{m}$ при выполнении условия $\sigma/\xi \tilde{m}^2 \ll 1$ в интеграле, определяющем средний радиус $\langle r \rangle$, существенна только та область значений переменной интегрирования r , в которой действующий потенциал $v(r)$ можно рассматривать как малое возмущение. Пренебрегая им, мы получаем в нулевом

приближении следующие выражения для среднего радиуса и периода:

$$\langle r \rangle \approx \frac{\pi \tilde{E}_0}{T \mu_0^3} \left(\frac{3\xi^2 \tilde{m}^2}{\mu_0^2} - k^2 \right), \quad T \approx \frac{2\pi \xi \tilde{m}^2}{\mu_0^3}. \quad (37)$$

Более точное (чем (37)) выражение для среднего радиуса получается при использовании в интеграле $\int_0^\infty (|F(r)|^2 + |G(r)|^2) r dr \equiv \langle r \rangle$ точных решений системы Дирака (1) в кулоновском поле [17]. Результирующее выражение для среднего радиуса водородоподобной системы принимает вид

$$\langle r \rangle_{\text{Coul}} = \frac{\tilde{E}_0}{2\xi \tilde{m}^2} \left(\frac{3\xi^2 \tilde{m}^2}{\mu_0^2} - k^2 - \frac{k\tilde{m}}{\tilde{E}_0} \right) \quad (38)$$

и совпадает с (37) при больших значениях радиального квантового числа n_r .

Это простое приближение имеет удивительно хорошую точность для глубоких уровней (но, разумеется, не при $E = 0$). Так, для первых трех уровней $1S_{1/2}$, $1P_{1/2}$, $2S_{1/2}$ b -кварка ($m_b = 4.88$ ГэВ) из (38) получаем соответственно $\langle r \rangle = 0.153$ фм, 0.501 фм, 0.609 фм, а точный расчет (численное решение системы Дирака с потенциалами (9) при $\xi = 0.4$, $\lambda = 0.3$, $V_0 = -0.45$ ГэВ, $\sigma = 0.18$ ГэВ²) дает соответственно $\langle r \rangle = 0.153$ фм, 0.493 фм, 0.600 фм. Таким образом, данное приближение имеет высокую точность для тяжелых кварков.

К сожалению, область применимости такого приближения ограничена условием $\sigma/\xi \tilde{m}^2 \ll 1$. Ввиду важности вопроса о размерах связанного состояния $Q\bar{q}$ -системы мы рассмотрим его с количественной стороны. Воспользуемся тем, что в интересующей нас области спектра $\tilde{E} > \tilde{m}$ для всех типичных значений параметров ξ и σ тяжело-легких мезонов выполняется условие $\sigma\gamma/\tilde{E}^2 \ll 1$. В этом случае движение легких кварков определяется главным образом линейным потенциалом, а кулоновское взаимодействие можно рассматривать как возмущение. В ряде случаев для вычисления $\langle r \rangle$ и T достаточно нулевого приближения:

$$\langle r \rangle \approx \frac{2}{T\sigma^2(1-2\lambda)} \left\{ \left(\frac{3\lambda\eta_1}{2(1-2\lambda)} + \tilde{E} \right) \sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2} - \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda}} \left[\tilde{E}\eta_1 + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{3\eta_1^2}{1-2\lambda} + \tilde{E}^2 - \tilde{m}^2 \right) \right] \arccos \frac{\eta_1}{\eta_2} \right\}, \quad (39)$$

$$T \approx \frac{2}{\sigma(1-2\lambda)} \left[-\lambda \sqrt{\tilde{E}^2 - \tilde{m}^2} + (1-\lambda)\eta\eta_2 \right], \quad (40)$$

где величина $\tilde{E}$ определена в (11), величины η_1 , η_2 – в (17), а величина η – в (27). Так, для первых трех уровней $1S_{1/2}$, $1P_{1/2}$, $2S_{1/2}$ B -мезона ($m_b = 4.88$ ГэВ, $m_u = 0.33$ ГэВ) в приближении (39), (40) получаем $\langle r \rangle = 0.381$ фм, 0.576 фм, 0.681 фм, а расчет с помощью “точных” формул (35) и (36) (при $\alpha_s = 0.3$, $\lambda = 0.3$, $V_0 = -0.45$ ГэВ, $\sigma = 0.18$ ГэВ²) соответственно дает 0.448 фм, 0.612 фм, 0.708 фм. Таким образом, данное приближение имеет приемлемую точность при вычислении средних радиусов $Q\bar{q}$ -мезонов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Рассмотрим интеграл квантования J_1 . Перепишем выражение для J_1 из (14) в виде суммы интегралов:

$$J_1 = -|\sigma|\sqrt{1-2\lambda}(l\Im_{-1} + h\Im_0 + g\Im_1 + f\Im_2 + \Im_3), \quad \Im_n = \int_b^a \frac{r^n}{R(r)} dr,$$

где величины f, g, h, l определены в (10), а $R(r)$ – в (13). После стандартной замены переменной интегрирования [24]

$$r = \frac{b(a-c) - c(a-b)\sin^2\varphi}{a-c - (a-b)\sin^2\varphi}$$

интегралы $\Im_n$ выражаются через полные эллиптические интегралы первого, второго и третьего рода, которые в общепринятых обозначениях [25] записываются как

$$F(\chi) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\Delta}, \quad E(\chi) = \int_0^{\pi/2} \Delta d\varphi, \quad \Pi(\nu, \chi) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{(1-\nu\sin^2\varphi)\Delta}, \quad (\text{П.1})$$

$$\Delta = \sqrt{1-\chi^2\sin^2\varphi}, \quad \nu = \frac{a-b}{a-c}, \quad \chi = \sqrt{\nu\frac{(c-d)}{(b-d)}}.$$

Таким образом получаем представления для $\Im_{-1}, \dots, \Im_3$:

$$\Im_{-1} = \int_b^a \frac{dr}{rR} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)bc}} \left[bF(\chi) - (b-c)\Pi\left(\frac{c}{b}\nu, \chi\right) \right], \quad (\text{П.2})$$

$$\Im_0 = \int_b^a \frac{dr}{R} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} F(\chi), \quad (\text{П.3})$$

$$\Im_1 = \int_b^a \frac{r dr}{R} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} [cF(\chi) + (b-c)\Pi(\nu, \chi)], \quad (\text{П.4})$$

$$\begin{aligned} \Im_2 = \int_b^a \frac{r^2 dr}{R} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} & \left[c^2 F(\chi) + c(b-c)\Pi(\nu, \chi) + \right. \\ & \left. + (b-c)^2 T_2\left(\frac{\pi}{2}, \nu, \chi\right) \right], \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

$$\begin{aligned} \Im_3 = \int_b^a \frac{r^3 dr}{R} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} & \left[c^3 F(\chi) + 3c^2(b-c)\Pi(\nu, \chi) + \right. \\ & \left. + 3c(b-c)^2 T_2\left(\frac{\pi}{2}, \nu, \chi\right) + (b-c)^3 T_3\left(\frac{\pi}{2}, \nu, \chi\right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Интегралы вида

$$T_n(\varphi, \nu, \chi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1-\nu\sin^2\varphi)^n \Delta}$$

вычисляются с помощью рекуррентной формулы

$$\begin{aligned} T_{n-3} = \frac{1}{(2n-5)\chi^2} & \left\{ \frac{-\nu^2 \Delta \sin\varphi \cos\varphi}{(1-\nu\sin^2\varphi)^{n-1}} + 2(n-2)[3\chi^2 - \nu(1+\chi^2)]T_{n-2} - \right. \\ & \left. - (2n-3)[\chi^2(3-2\nu) + \nu(\nu-2)]T_{n-1} + 2(n-1)(\chi^2 - \nu)(1-\nu)T_n \right\}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим интегралы, которые фигурируют в формулах (14) в выражении для J_2 :

$$\int_b^a \frac{dr}{(r - \lambda_{\pm})R} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}(b - \lambda_{\pm})(\lambda_{\pm} - c)} \times \\ \times \left[(\lambda_{\pm} - b)F(\chi) - (b - c)\Pi\left(\frac{(\lambda_{\pm} - c)}{(\lambda_{\pm} - b)}\nu, \chi\right) \right]. \quad (\text{П.7})$$

После подстановки выражений (П.2)–(П.7) в интегралы (14), условие квантования (3) принимает вид трансцендентного уравнения (15), где

$$\begin{aligned} \nu_{\pm} &= \frac{\lambda_{\pm} - c}{\lambda_{\pm} - b}\nu, \quad \Re = (1 - \nu)(\chi^2 - \nu), \quad \aleph = \chi^2(3 - 2\nu) + \nu(\nu - 2), \\ N_1 &= \frac{\chi^2(b - c)}{4} - \frac{3\aleph(b - c)}{8(1 - \nu)} - \frac{(\chi^2 - \nu)}{2}(f + 3c) + \\ &\quad + \frac{\Re}{(b - c)^2}\left(c^3 + c^2f + cg + h + \frac{l}{c}\right), \\ N_2 &= -\frac{\nu}{2}\left[f + 3c + \frac{3}{4}\frac{(b - c)\aleph}{\Re}\right], \\ N_3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}\frac{(b - c)\aleph^2}{\Re} + \frac{2\Re}{(b - c)}(3c^2 + 2cf + g) + (b - c)((1 + \chi^2)\nu - 3\chi^2) + \right. \\ &\quad \left. + \aleph(f + 3c)\right], \quad N_4 = -\frac{\Re}{(b - c)}\frac{l}{bc}, \\ N_5 &= [(b - \lambda_+)(\lambda_+ - c)]^{-1}, \quad N_6 = [(b - \lambda_-)(\lambda_- - c)]^{-1}, \\ N_7 &= \frac{2}{(\lambda_+ - c)(\lambda_- - c)}\left(c + \frac{\tilde{E} + \tilde{m}}{2(1 - 2\lambda)\sigma}\right). \end{aligned}$$

Аналогично находятся интегралы, возникающие при вычислении средних радиусов по формуле (34). Величины n_i ($i = 1, \dots, 6$), фигурирующие в формулах (35) и (36), приведены ниже:

$$\begin{aligned} n_1 &= \tilde{E}\left(c^2 - \frac{(b - c)^2}{2(1 - \nu)}\right) - \lambda\sigma\left(c^3 - \frac{3c(b - c)^2}{2(1 - \nu)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(b - c)^3}{4\Re}\left(\chi^2 - \frac{3\aleph}{2(1 - \nu)}\right)\right) + \xi c, \\ n_2 &= -\frac{\nu(b - c)^2}{2\Re}\left[\tilde{E} - 3\lambda\sigma\left(c + \frac{(b - c)\aleph}{4\Re}\right)\right], \\ n_3 &= (b - c)\left[\tilde{E}\left(2c + \frac{(b - c)\aleph}{2\Re}\right) - \lambda\sigma\left(3c^2 + \frac{(b - c)\aleph}{2\Re} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \left(3c - \frac{(b - c)(3\chi^2 - \nu(1 + \chi^2))}{\aleph} + \frac{3(b - c)\aleph}{4\Re}\right)\right) + \xi\right], \\ n_4 &= c\tilde{E} - \lambda\sigma\left(c^2 - \frac{(b - c)^2}{2(1 - \nu)}\right) + \xi, \end{aligned}$$

$$n_5 = \frac{\lambda\sigma\nu(b-c)^2}{2\Re}, \quad n_6 = (b-c) \left[\tilde{E} - \lambda\sigma \left(2c + \frac{(b-c)\Re}{2\Re} \right) \right].$$

Список литературы

- [1] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров, *Общие принципы квантовой теории поля*, Наука, М., 1987.
- [2] E. E. Salpeter, H. A. Bethe, *Phys. Rev.*, **84**:6 (1951), 1232–1242.
- [3] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cimento*, **29**:2 (1963), 380–399.
- [4] W. Macke, *Z. Naturforschung A*, **8** (1953), 599–615; W. Królikowski, J. Rzewuski, *Nuovo Cimento*, **2** (1955), 203–219.
- [5] W. Greiner, B. Muller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1985.
- [6] T. Matsuki, T. Morii, *Phys. Rev. D*, **56**:9 (1997), 5646–5667; T. Matsuki, T. Morii, K. Sudoh, *Progr. Theoret. Phys.*, **117**:6 (2007), 1077–1098; [arXiv: hep-ph/0605019v5](#).
- [7] В. В. Двоглазов, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов, *ЭЧАЯ*, **25**:1 (1994), 144–228.
- [8] M. I. Eides, H. Grotch, V. A. Shelyuto, *Phys. Rep.*, **342**:2–3 (2001), 63–261; [arXiv: hep-ph/0002158](#).
- [9] В. П. Маслов, *Теория возмущений и асимптотические методы*, Изд-во МГУ, М., 1965.
- [10] В. П. Маслов, *Асимптотические методы и теория возмущений*, Наука, М., 1988; В. П. Маслов, М. В. Федорюк, *Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики*, Наука, М., 1976.
- [11] В. Д. Мур, В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, *Письма в ЖЭТФ*, **28**:3 (1978), 140–144.
- [12] В. Д. Мур, В. С. Попов, *ЯФ*, **28**:3 (1978), 837–849.
- [13] В. С. Попов, Д. Н. Воскресенский, В. Л. Елецкий, В. Д. Мур, *ЖЭТФ*, **76**:2 (1979), 431–459.
- [14] В. С. Попов, *ЯФ*, **64**:3 (2001), 421.
- [15] Yu. A. Simonov, *ЯФ*, **60**:12 (1997), 2252; **63**:1 (2000), 104.
- [16] V. V. Rubish, V. Yu. Lazur, O. K. Reity et. al., *Czech. J. Phys.*, **54**:9 (2004), 897–919; В. Ю. Лазур, А. К. Рейтий, В. В. Рубиш, *ТМФ*, **143**:1 (2005), 83–111.
- [17] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1981.
- [18] Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Теоретическая физика. Т. 3: Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1989.
- [19] M. S. Plesset, *Phys. Rev.*, **41**:3 (1932), 278–290.
- [20] H. G. Dosch, *Phys. Lett. B*, **190**:1–2 (1987), 177–181; H. G. Dosch, Yu. A. Simonov, *Phys. Lett. B*, **205**:2–3 (1988), 339–344.
- [21] Ю. А. Симонов, *УФН*, **166**:4 (1996), 337–362.
- [22] Б. А. Арбузов, *ЭЧАЯ*, **19**:1 (1988), 5–50.
- [23] S. W. Otto, J. D. Stack, *Phys. Rev. Lett.*, **52**:26 (1984), 2328–2331.
- [24] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, Справочная математическая библиотека, Наука, М., 1967.
- [25] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды*, Наука, М., 1981.
- [26] I. V. Anikin, M. A. Ivanov, N. B. Kulimanova, V. E. Lyubovitskij, *Z. Phys. C*, **65**:4 (1995), 681–690; *ЯФ*, **57** (1994), 1082–1090.
- [27] V. D. Mur, V. S. Popov, Yu. A. Simonov, V. P. Yurov, *ЖЭТФ*, **105**:1 (1994), 3–27.
- [28] N. Isgur, G. Karl, *Phys. Rev. D*, **18**:11 (1978), 4187–4205; **19**:9 (1979), 2653–2677; N. Isgur, M. Wise, *Phys. Lett. B*, **232**:1 (1989), 113–117; **237**:3–4 (1990), 527–530.
- [29] D. Ebert, R. N. Faustov, V. O. Galkin, *Письма в ЭЧАЯ*, **2**:5(128) (2005), 37–42.
- [30] V. V. Khrushev, V. I. Savrin, S. V. Semenov, *Phys. Lett. B*, **525**:3–4 (2002), 283–288; [arXiv: hep-ph/0111055](#).
- [31] D. B. Lichtenberg, E. Predazzi, C. Rossetti, *Z. Phys. C*, **40**:3 (1988), 357–363.

- [32] Particle Data Group (S. Eidelman, K. G. Hayes, K. A. Olive et al.), “Meson Particle Listings”, *Phys. Lett. B*, **592**:1–4 (2004), 495–850, Review of Particle Physics.
- [33] S. Godfrey, *Phys. Rev. D*, **72**:5 (2005), 054029; [arXiv: hep-ph/0508078](#).
- [34] P. Colangelo, F. De Fazio, R. Ferrandes, *Modern Phys. Lett. A*, **19**:28 (2004), 2083–2102; [arXiv: hep-ph/0407137](#).
- [35] W. A. Bardeen, E. J. Eichten, C. T. Hill, *Phys. Rev. D*, **68**:5 (2003), 054024.
- [36] S. Godfrey, *Phys. Lett. B*, **568**:3–4 (2003), 254–260; [arXiv: hep-ph/0305122](#).
- [37] P. Colangelo, F. De Fazio, *Phys. Lett. B*, **570**:3–4 (2003), 180–184; [arXiv: hep-ph/0305140](#).
- [38] N. Cahn, J. Jackson, *Phys. Rev. D*, **68**:3 (2003), 037502.
- [39] W. Lucha, F. Schöberl, *Modern Phys. Lett. A*, **18**:39 (2003), 2837–2847.
- [40] Belle Collaboration (K. Abe et al.), *Phys. Rev. D*, **69**:11 (2004), 112002.
- [41] FOCUS Collaboration (J. M. Link et al.), *Phys. Lett. B*, **586**:1–2 (2004), 11–20; **586**:3–4, 183–190; [arXiv: hep-ex/0401001](#).
- [42] CLEO Collaboration (S. Anderson et al.), *Nuclear Phys. A*, **663–664** (2000), 647–650; [arXiv: hep-ex/9908009](#).
- [43] CLEO Collaboration (D. Besson et al.), *Phys. Rev. D*, **68** (2003), 032002.
- [44] BABAR Collaboration (B. Aubert et al.), *Phys. Rev. Lett.*, **90**:24 (2003), 242001.
- [45] M. Sadzikowski, *Phys. Lett. B*, **579**:1–2 (2004), 39–42; [arXiv: hep-ph/0307084](#).
- [46] A. Deandrea, G. Nardulli, A. Polosa, *Phys. Rev. D*, **68**:9 (2003), 097501; [arXiv: hep-ph/0307069](#).
- [47] A. Green, J. Koponen, C. Michael et al., *Phys. Rev. D*, **69**:9 (2004), 094505; [arXiv: hep-lat/0312007](#).

Поступила в редакцию 31.07.2007,
после доработки 1.10.2007