УДК 519.21

**Г. І. Сливка-Тилищак** (Ужгородський нац. ун-т)

# ДОСТАТНІ УМОВИ ІСНУВАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА З ВИПАДКОВИМИ ФАКТОРАМИ

Conditions of existence with probability one generalized solution of hyperbolic equations type partial differential equation of mathematical physics with random strongly $Sub_\varphi(\Omega)$ initial conditions are found in the multidimensional case.

В роботі знайдено умови існування з імовірністю одиниця узагальненого розв'язку гіперболічного рівняння в частинних похідних математичної фізики з строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадковими початковими умовами.

**Вступ.** Дослідження умов збіжності випадкових рядів в різних функціональних просторах є одним з найважливіших напрямків в теорії випадкових процесів. Це пояснюється тим, що результати в цьому напрямку широко використовуються в теорії випадкових процесів та застосуванні цієї теорії. Зокрема при обґрунтуванні застосування методу Фур'є до крайових задач математичної фізики з випадковими факторами. Вперше застосування методу Фур'є до крайової задачі математичної фізики з випадковими початковими умовами було обґрунтовано різними методами в роботах [2], [3]. В цих роботах випадкові процеси, що задавали початкові умови, вважалися гауссовими, або процесами другого порядку. В роботі [6] досліджувались достатні умови існування з імовірністю одиниця двічі неперервно диференційованого розв'язку задачі математичної фізики гіперболічного типу у багатовимірному випадку з випадковими початковими умовами з простору $Sub_\varphi(\Omega)$. Знайдено достатні умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку задачі математичної фізики гіперболічного типу у багатовимірному випадку з випадковими початковими умовами з простору Орліча у роботі [7]. Перша крайова задача математичної фізики для неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою строго $\varphi$-субгауссовою правою частиною та нульовими початковими та крайовими умовами досліджувалася в [4]. Посилання на інші роботи, які проводилися в даному напрямку можна знайти в монографіях [1] і [5].

## 1.Рівняння коливання прямокутного паралелепіпеда з сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадковими початковими умовами.

Розглянемо рівняння

$$\Delta u - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c],\ t \in [0,T],$$

яке задовольняє початковим умовам

$$u|_{t=0} = \xi(x,y,z),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta(x,y,z), \tag{2}$$

крайовій умові

$$u|_{x=0} = u|_{x=a} = u\big|_{y=0} = u\Big|_{y=b} = u\Big|_{z=0} = u\Big|_{z=c} = 0, \tag{3}$$

Початкові умови ($\xi(x, y, z),\ x \in [0, a],\ y \in [0, b],\ z \in [0, c]$) і ($\eta(x, y, z)\ x \in [0, a]$, $y \in [0, b],\ z \in [0, c]$) є сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові поля, для яких виконуються умови

$$\xi(0, y, z) = \xi(a, y, z) = \xi(x, 0, z) = \xi(x, b, z) = \xi(x, y, 0) = \xi(x, y, c) = 0, \tag{4}$$

$$\eta(0, y, z) = \eta(a, y, z) = \eta(x, 0, z) = \eta(x, b, z) = \eta(x, y, 0) = \eta(x, y, c) = 0. \tag{5}$$

Позначимо кореляційні функції цих полів

$$B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = E\xi(x, y, z)\xi(x_1, y_1, z_1),$$

$$x,\ x_1 \in [0, a],\ y,\ y_1 \in [0, b],\ z,\ z_1 \in [0, c],$$

$$B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = E\eta(x, y, z)\eta(x_1, y_1, z_1),$$

$$x,\ x_1 \in [0, a],\ y,\ y_1 \in [0, b],\ z,\ z_1 \in [0, c].$$

Тоді з (4) і (5) випливає, що

$$\begin{aligned} &B_\xi(0, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_\xi(x, 0, z, x_1, y_1, z_1) = B_\xi(x, y, 0, x_1, y_1, z_1) = \\ &= B_\xi(a, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_\xi(x, b, z, x_1, y_1, z_1) = B_\xi(x, y, c, x_1, y_1, z_1) = \\ &= B_\xi(x, y, z, 0, y_1, z_1) = B_\xi(x, y, z, x_1, 0, z_1) = B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, 0) = \\ &= B_\xi(x, y, z, a, y_1, z_1) = B_\xi(x, y, z, x_1, b, z_1) = B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, c), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &B_\eta(0, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_\eta(x, 0, z, x_1, y_1, z_1) = B_\eta(x, y, 0, x_1, y_1, z_1) = \\ &= B_\eta(a, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_\eta(x, b, z, x_1, y_1, z_1) = B_\eta(x, y, c, x_1, y_1, z_1) = \\ &= B_\eta(x, y, z, 0, y_1, z_1) = B_\eta(x, y, z, x_1, 0, z_1) = B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, 0) = \\ &= B_\eta(x, y, z, a, y_1, z_1) = B_\eta(x, y, z, x_1, b, z_1) = B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, c). \end{aligned} \tag{7}$$

Згідно [8] розв'язок даного рівняння шукається у вигляді

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x, y, z) \left(a_i \cos \lambda_i t + b_i \sin \lambda_i t\right), \tag{8}$$

де власні функції $V_i(x, y, z)$ є розв'язком рівняння

$$\Delta V_i + \lambda_i^2 V_i = 0, \tag{9}$$

які задавольняють умові (3). Використовуючи метод відокремлення змінних $V_i$ можна записати у вигляді

$$V_i(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c}.$$

Власні функції $V_i(x, y, z)$ відповідають власним значенням $\lambda_i$ рівняння (9)

$$\lambda_i^2 = \pi^2 \left(\frac{k_i^2}{a^2} + \frac{l_i^2}{b^2} + \frac{m_i^2}{c^2}\right). \tag{10}$$

Коефіцієнти $a_i$ і $b_i$ мають вигляд

$$a_i = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \xi(x,y,z)V_i(x,y,z)dxdydz,$$

$$b_i = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \eta(x,y,z)V_i(x,y,z)dxdydz.$$

Позначимо через $D = [o,a] \times [0,b] \times [0,c]$.

**Означення 1.** *Узагальненим розв'язком задачі (1) — (3) в області $D$ називається ряд, що зображується у вигляді (8) і який для всіх $x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c],\ t \in [0,T]$ збігається рівномірно за ймовірністю.*

Розглянемо умови, що забезпечують рівномірну збіжність за ймовірністю ряду (8), якщо початкові умови $(\xi(x,y,z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c])$ і $(\eta(x,y,z)$ $x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c])$ є сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$ випадкові поля. Позначимо для $i \geq 1$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} V_i(x,y,z)\left(a_i \cos\lambda_i t + b_i \sin\lambda_i t\right).$$

**2. Умови існування узагальненого розв'язку з ймовірністю одиниця рівняння коливання прямокутного паралелепіпеда у частинному випадку.**

**Теорема 1.** *Нехай випадкові поля є сумісно $SSub_\varphi(\Omega)$. Для того щоб з ймовірністю одиниця існував узугальнений розв'язок задачі (1) — (3) в області $D$, що зображується у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (8) , достатньо щоб виконувались умови:*

1) *для всіх $(x,y,z,t) \in D$ збігається ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} V_i(x,y,z)V_j(x,y,z)\left(Ea_ia_j \cos\lambda_i t \cos\lambda_j t + \right.$$

$$\left. + Eb_ib_j \sin\lambda_i t \sin\lambda_j t + 2Ea_ib_j \cos\lambda_i t \sin\lambda_j t\right) < \infty;$$

2) *для $n \geq 1$*

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leq h\\ |y-y_1|\leq h\\ |z-z_1|\leq h\\ |t-t_1|\leq h}} \left(E\left|S_n(X,t) - S_n(Y,s)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sigma(h),$$

*де $\sigma(h)$ — неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(h) \to 0$ при $h \to\ 0$, і виконується умова*

$$\int\limits_{0+} \Psi\left(\ln\frac{1}{\sigma^{(-1)}(\varepsilon)}\right)d\varepsilon < \infty,$$

*де $\Psi(u) = \frac{u}{\varphi^{(-1)}(u)}$, $\sigma^{(-1)}(\varepsilon)$ –обернена до функції $\sigma(\varepsilon)$.*

***Доведення.*** Умова 1) забезпечує збіжність в середньому квадратичному ряду (8). З умови теореми 1.8 роботи [5] випливає, що ряд (8) збігається за ймовірністю в області $D$.

**2. Умови існування узагальненого розв'язку з ймовірністю одиниця рівняння коливання прямокутного паралелепіпеда у частинному випадку.**

**Теорема 2.** *Нехай випадкові процеси* $(\xi(x,y,z),\ x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ i\ z\in[0,c])$ *і* $(\eta(x,y,z),\ x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ z\in[0,c])$ *є сумісно строго* $Sub_\varphi(\Omega)$, *де* $\varphi(x)$ *— така функція, що* $\varphi(x)=|x|^p$, *при* $|x|>1,\ p>1$.

$$B_\xi\left(x,y,z,x_1,y_1,z_1\right)=E\xi(x,y,z)\xi(x_1,y_1,z_1),$$

$$B_\eta\left(x,y,z,x_1,y_1,z_1\right)=E\eta(x,y,z)\eta(x_1,y_1,z_1).$$

*Для того, щоб з ймовірністю одиниця існував узагальнений розв'язок задачі (1) — (3) в області $D$, що зображується у вигляді ряду (8), який є рівномірно збіжним за ймовірністю, достатньо, щоб виконувались умови:*

1) *для достатньо малих $h$ виконується нерівності*

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\le h\\|y-y_1|\le h\\|z-z_1|\le h}}\left(B_\xi(x,y,z,x,y,z)+B_\xi(x_1,y_1,z_1,x_1,y_1,z_1)-\right.$$

$$\left.-\,2B_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)\right)^{\frac12}\le\frac{C}{|\ln|h||^\delta},$$

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\le h\\|y-y_1|\le h\\|z-z_1|\le h}}\left(B_\eta(x,y,z,x,y,z)+B_\eta(x_1,y_1,z_1,x_1,y_1,z_1)\right.$$

$$\left.-\,2B_\eta(x,y,z,x_1,y_1,z_1)\right)^{\frac12}\le\frac{C_1}{|\ln|h||^\delta},$$

*де* $\delta>1-\frac{1}{p}$;

2) *збігається наступний ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left[|Ea_ia_j|+|Eb_ib_j+2\,|Ea_ib_j||\right]<\infty;$$

3) *для довільних* $\delta>1-\frac1p$ *і* $|h|<1$ *виконується наступна умова*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac12}+\left(Eb_i^2\right)^{\frac12}\right]\left((\ln k_i)^\delta+(\ln m_i)^\delta+(\ln l_i)^\delta\right)<\infty.$$

***Доведення.*** Умови 1, 2 даної теореми забезпечують виконання умови 2 теореми 1. Доведемо, що із виконання умови 3 даної теореми випливає виконання умови тієї ж теореми.

Розглянемо

$$\left(E\left|S_n(x,y,z,t)-S_n(x_1,y_1,z_1,t_1)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(E\left|\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\sin\frac{\pi m_i z}{c}\left(a_i\cos\lambda_i t+b_i\sin\lambda_i t\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{8}{abc}}\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\left(a_i\cos\lambda_i t_1+b_i\sin\lambda_i t_1\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\leq\sqrt{\frac{8}{abc}}\sum_{i=1}^{n}\left[\left(Ea_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\sin\frac{\pi m_i z}{c}\cos\lambda_i t-\right.\right.$$

$$\left.-\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\cos\lambda_i t_1\right|+$$

$$+\left(Eb_i^2\right)^{\frac{1}{2}}\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\sin\frac{\pi m_i z}{c}\sin\lambda_i t-\right.$$

$$\left.\left.-\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\sin\lambda_i t_1\right|\right].$$

$$\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}\sin\frac{\pi l_i y}{b}\sin\frac{\pi m_i z}{c}\cos\lambda_i t-\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\cos\lambda_i t_1\right|\leq$$

$$\leq\left[\left|\sin\frac{\pi k_i x}{a}-\sin\frac{\pi k_i x_1}{a}\right|+\left|\sin\frac{\pi l_i y}{b}-\sin\frac{\pi l_i y_1}{b}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\sin\frac{\pi m_i y}{c}-\sin\frac{\pi m_i z_1}{c}\right|+\left|\cos\lambda_i t-\cos\lambda_i t_1\right|\right]\leq$$

$$\leq 2\left(\left|\sin\frac{\pi k_i(x-x_1)}{2a}\right|+\left|\sin\frac{\pi l_i(y-y_1)}{2b}\right|+\right.$$

$$\left.+\left|\sin\frac{\pi m_i(z-z_1)}{2c}\right|+\left|\sin\frac{\lambda_i(t-t_1)}{2}\right|\right)\leq$$

$$\leq 2\left(\frac{\left(\ln\left(\frac{\pi k_i}{2a}+e^\delta\right)\right)^\delta}{\left|\ln|x-x_1|\right|^\delta}+\frac{\left(\ln\left(\frac{\pi l_i}{2b}+e^\delta\right)\right)^\delta}{\left|\ln|y-y_1|\right|^\delta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(\ln\left(\frac{\pi m_i}{2c}+e^\delta\right)\right)^\delta}{\left|\ln|z-z_1|\right|^\delta}+\frac{\left(\ln\left(\frac{\lambda_i}{2}+e^\delta\right)\right)^\delta}{\left|\ln|-t_1|\right|^\delta}\right)\leq$$

$$\leq\frac{2}{\left|\ln|h|\right|^\delta}\left(\left(\ln\left(\frac{\pi k_1}{2a}+e^\delta\right)\right)^\delta+\left(\ln\left(\frac{\pi l_1}{2b}+e^\delta\right)\right)^\delta+\right.$$

$$\left.+\left(\ln\left(\frac{\pi m_1}{2c}+e^\delta\right)\right)^\delta+\left(\ln\left(\frac{\pi\sqrt{\frac{k_i^2}{a^2}+\frac{l_i^2}{b^2}+\frac{m_i^2}{c^2}}}{2}+e^\delta\right)\right)^\delta\right)\leq$$

$$\leq\frac{2}{\left|\ln|h|\right|^\delta}\left(\left(\ln k_i\right)^\delta+\left(\ln m_i\right)^\delta+\left(\ln l_i\right)^\delta+\frac{1}{2}\left(\left(\ln k_i\right)^\delta+\left(\ln m_i\right)^\delta+\left(\ln l_i\right)^\delta\right)\right)=$$

$$= \frac{3}{|\ln|h||^{\delta}} \left( (\ln k_i)^{\delta} + (\ln m_i)^{\delta} + (\ln l_i)^{\delta} \right).$$

$$\left| \sin \frac{\pi k_i x}{a} \sin \frac{\pi l_i y}{b} \sin \frac{\pi m_i z}{c} \sin \lambda_i t - \sin \frac{\pi k_i x_1}{a} \sin \frac{\pi l_i y_1}{b} \sin \frac{\pi m_i z_1}{c} \sin \lambda_i t_1 \right| \leq$$

$$\leq \left[ \left| \sin \frac{\pi k_i x}{a} - \sin \frac{\pi k_i x_1}{a} \right| + \left| \sin \frac{\pi l_i y}{b} - \sin \frac{\pi l_i y_1}{b} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \sin \frac{\pi m_i y}{c} - \sin \frac{\pi m_i z_1}{c} \right| + |\sin \lambda_i t - \sin \lambda_i t_1| \right] \leq$$

$$\leq 2 \left( \left| \sin \frac{\pi k_i (x - x_1)}{2a} \right| + \left| \sin \frac{\pi l_i (y - y_1)}{2b} \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \sin \frac{\pi m_i (z - z_1)}{2c} \right| + \left| \sin \frac{\lambda_i (t - t_1)}{2} \right| \right) \leq$$

$$\leq \frac{3}{|\ln|h||^{\delta}} \left( (\ln k_i)^{\delta} + (\ln m_i)^{\delta} + (\ln l_i)^{\delta} \right).$$

Отже

$$\left( E \left| S_n(x, y, z, t) - S_n(x_1, y_1, z_1, t_1) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C}{|\ln|h||^{\delta}},$$

де

$$C = \sqrt{\frac{72}{abc}} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \left( E a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left( E b_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \left( (\ln k_i)^{\delta} + (\ln m_i)^{\delta} + (\ln l_i)^{\delta} \right).$$

Отже, виконання умови 2 даної теореми забезпечує виконання умови 2 теореми 1.

Накладемо деякі умови на кореляційні функції $B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ і $B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$, при яких будуть справедливі твердження теореми 2. Продовжимо функції $B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$, $B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, z_1)$ на весь простір так, щоб вони були періодичними функціями з періодом $2a$ за $x$ і $x_1$, $2b$ за $y$ і $y_1$, $2c$ за $z$ і $z_1$ і щоб виконувались рівності

$$B_\xi(-x, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_\xi(x, -y, z, x_1, y_1, z_1) =$$

$$= B_\xi(x, y, -z, x_1, y_1, z_1) = -B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, z_1) =$$

$$= B_\xi(x, y, z, -x_1, y_1, z_1) = B_\xi(x, y, z, x_1, -y_1, z_1) =$$

$$= B_\xi(x, y, z, x_1, y_1, -z_1),$$

$$B_\eta(-x, y, z, x_1, y_1, z_1) = B_\eta(x, -y, z, x_1, y_1, z_1) =$$

$$= B_\eta(x, y, -z, x_1, y_1, z_1) = -B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, z_1) =$$

$$= B_\eta(x, y, z, -x_1, y_1, z_1) = B_\eta(x, y, z, x_1, -y_1, z_1) =$$

$$= B_\eta(x, y, z, x_1, y_1, -z_1).$$

Нехай

$$\Delta_{\tau_1 \tau_2 \tau_3 \tau_4 \tau_5 \tau_6} f(x, y, z, x_1, y_1, z_1) =$$

$$= f(x + \tau_1, y + \tau_2, z + \tau_3, x_1 + \tau_4, y_1 + \tau_5, z_1 + \tau_6) -$$

$$-f(x+\tau_1,y,z,x_1,y_1,z_1)-f(x,y+\tau_2,z,x_1,y_1,z_1)-$$
$$-f(x,y,z+\tau_3,x_1,y_1,z_1)-f(x,y,z,x_1+\tau_4,y_1,z_1)-$$
$$-f(x,y,z,x_1,y_1+\tau_5,z_1)-f(x,y,z,x_1,y_1,z_1+\tau_6)=$$
$$+f(x,y,z,x_1,y_1,z_1).$$
$$B^*_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=\frac{\partial^{18}B_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)}{\partial x^3\partial y^3,\partial x^3\partial x_1^3\partial y_1^3\partial z_1^3},$$
$$B^*_\eta(x,y,z,x_1,y_1,z_1)=\frac{\partial^{18}B_\eta(x,y,z,x_1,y_1,z_1)}{\partial x^3\partial y^3,\partial x^3\partial x_1^3\partial y_1^3\partial z_1^3}.$$

**Теорема 3.** *Нехай випадкові поля $\xi(x,y,z)$ і $\eta(x,y,z)$ є сумісно строго $Sub_\varphi(\Omega)$. Для того, щоб існував з ймовірністю одиниця узагальнений розв'язок задачі (1) — (3), при наведених вище обмеженнях, що зображений у вигляді рівномірно збіжного за ймовірністю ряду (8), достатньо, щоб виконувались умови:*

1) *для достатньо малих $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4,\ \tau_5,\ \tau_6>0$ виконуються умови*

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\Delta_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6}\left|B^*_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)\right|dxdydzdx_1dy_1dz_1\le$$
$$\le c_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6,$$
$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\Delta_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6}\left|B^*_\eta(x,y,z,x_1,y_1,z_1)\right|dxdydzdx_1dy_1dz_1\le$$
$$\le c_2\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_6;$$

2) *для достатньо малих $\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,>0$ і $\delta>1-\frac{1}{p}$ виконуються умови*

$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\Delta_{\tau_1\tau_2\tau_3}\left|B^*_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)\right|dxdydzdx_1dy_1dz_1\le$$
$$\le\frac{c_1\tau_1^2\tau_2^2\tau_3^2}{(\ln\tau_1)^\delta+(\ln\tau_2)^\delta+(\ln\tau_3)^\delta},$$
$$\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c}\Delta_{\tau_1\tau_2\tau_3}\left|B^*_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)\right|dxdydzdx_1dy_1dz_1\le$$
$$\le\frac{c_2\tau_1^2\tau_2^2\tau_3^2}{(\ln\tau_1)^\delta+(\ln\tau_2)^\delta+(\ln\tau_3)^\delta}.$$

***Доведення.*** *Для того, щоб при зроблених припущеннях виконувались умови теореми 2 достатньо показати, що*

$$|Ea_ia_j|\le\frac{c}{|k_ik_jm_im_jl_il_j|^4},\tag{11}$$

$$|Eb_ib_j|\le\frac{c}{|k_ik_jm_im_jl_il_j|^4},\tag{12}$$

$$|Ea_i a_j| \leq \frac{c}{|k_i k_j m_i m_j l_i l_j|^8 \left|(\ln \tau_1)^\delta + (\ln \tau_2)^\delta + (\ln \tau_3)^\delta\right|}, \tag{13}$$

$$|Eb_i b_j| \leq \frac{c}{|k_i k_j m_i m_j l_i l_j|^8 \left|(\ln \tau_1)^\delta + (\ln \tau_2)^\delta + (\ln \tau_3)^\delta\right|}, \tag{14}$$

*де $c$ – деяка стала. За означенням*

$$Ea_i a_j = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1) V_i(x,y,z) \times$$

$$\times V_j(x_1,y_1,z_1) dxdydzdx_1dy_1dz_1,$$

$$Eb_i b_j = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\eta(x,y,z,x_1,y_1,z_1) V_i(x,y,z) \times$$

$$\times V_j(x_1,y_1,z_1) dxdydzdx_1dy_1dz_1,$$

$$Ea_i^2 = \left(\int_0^a \int_0^b \int_0^c E\xi(x,y,z) V_i(x,y,z) dxdydz\right)^2 =$$

$$= \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1) V_i(x,y,z) \times$$

$$\times V_i(x_1,y_1,z_1) dxdydzdx_1dy_1dz_1,$$

$$Eb_i^2 = \left(\int_0^a \int_0^b \int_0^c E\eta(x,y,z) V_i(x,y,z) dxdydz\right)^2 =$$

$$= \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\eta(x,y,z,x_1,y_1,z_1) V_i(x,y,z) \times$$

$$\times V_i(x_1,y_1,z_1) dxdydzdx_1dy_1dz_1.$$

*Розглянемо*

$$Ea_i a_j = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1) V_i(x,y,z) \times$$

$$\times V_j(x_1,y_1,z_1) dxdydzdx_1dy_1dz_1 =$$

$$= \frac{8}{abc} \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1) \times$$

$$\times \sin\frac{\pi k_i x}{a} \sin\frac{\pi l_i y}{b} \sin\frac{\pi m_i z}{b} \sin\frac{\pi k_j x_1}{b} \sin\frac{\pi l_j y_1}{b} \sin\frac{\pi k_j z}{c} dxdydzdx_1dy_1dz_1.$$

*Інтегруючи частинами і використовуючи (6), отримаємо*

$$\left| Ea_i a_j = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c B_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1) V_i(x,y,z) \times \right.$$

$$\times\ V_j(x_1,y_1,z_1)|\ dxdydzdx_1dy_1dz_1 \leq$$

$$\leq \frac{8\,|abc|^5}{\pi^{18}\,|k_i l_i m_i k_j l_j m_j|^3} \left| \int_0^a \int_0^b \int_0^c \int_0^a \int_0^b \int_0^c \frac{\partial^{18} B_\xi(x,y,z,x_1,y_1,z_1)}{\partial x^3 \partial y^3, \partial x^3 \partial x_1^3 \partial y_1^3 \partial z_1^3} \times \right.$$

$$\times \cos\frac{\pi k_i x}{a}\cos\frac{\pi l_i y}{b}\cos\frac{\pi m_i z}{b}\cos\frac{\pi k_j x_1}{b}\cos\frac{\pi l_j y_1}{b}\cos\frac{\pi k_j z}{c}dxdydzdx_1dy_1dz_1\Big| \leq$$

$$\leq \frac{8\,|abc|^5}{\pi^{18}\,|k_il_im_ik_jl_jm_j|^3}\int_0^a\int_0^b\int_0^c\int_0^a\int_0^b\int_0^c \left|B_\xi^*(x,y,z,x_1,y_1,z_1)\right| \times$$
$$\times dxdydzdx_1dy_1dz_1.$$

*Розглянемо величину*

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c\int_0^a\int_0^b\int_0^c B_\xi^*(x,y,z,x_1,y_1,z_1)dxdydzdx_1dy_1dz_1.$$

*Оскільки функція $B_\xi^*$ періодична з періодом $2a$ за $x$ і $x_1$, $2b$ за $y$ і $y_1$, $2c$ за $z$ і $z_1$, то*

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c\int_0^a\int_0^b\int_0^c B_\xi^*(x,y,z,x_1,y_1,z_1)dxdydzdx_1dy_1dz_1 =$$

$$= \int_0^a\int_0^b\int_0^c\int_0^a\int_0^b\int_0^c B_\xi^*(x+\frac{a}{k_i},y+\frac{b}{l_i},z+\frac{c}{m_i},x_1+\frac{a}{k_j},y_1+\frac{b}{l_j},z_1+\frac{c}{m_j})\times$$
$$\times dxdydzdx_1dy_1dz_1.$$

*Крім того*

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c\int_0^a\int_0^b\int_0^c B_\xi^*(x,y,z,x_1,y_1,z_1)dxdydzdx_1dy_1dz_1 =$$

$$= -\int_0^a\int_0^b\int_0^c\int_0^a\int_0^b\int_0^c B_\xi^*(x+\frac{a}{k_i},y,z,x_1,y_1,z_1)dxdydzdx_1dy_1dz_1.$$

*Звідси, враховуючи умову 1 даної теореми, отримаємо*

$$\frac{1}{8}\Big|\int_0^a\int_0^b\int_0^c\int_0^a\int_0^b\int_0^c \Big[B_\xi^*(x+\frac{a}{k_i},y+\frac{b}{l_i},z+\frac{c}{m_i},x_1+\frac{a}{k_j},y_1+\frac{b}{l_j},z_1+\frac{c}{m_j})-$$

$$-B_\xi^*(x+\frac{a}{k_i},y,z,x_1,y_1,z_1)-B_\xi^*(x,y+\frac{b}{l_i},z,x_1,y_1,z_1)-$$

$$-B_\xi^*(x,y,z+\frac{c}{m_i},x_1,y_1,z_1)-B_\xi^*(x,y,z,x_1+\frac{a}{k_j},y_1,z_1)-$$

$$-B_\xi^*(x,y,z,x_1,y_1+\frac{b}{l_j},z_1)-B_\xi^*(x,y,z,x_1,y_1,z_1+\frac{c}{m_j})+$$

$$+\ B_\xi^*(x,y,z,x_1,y_1,z_1)\Big]\,dxdydzdx_1dy_1dz_1\Big| \leq$$

$$\leq \frac{1}{8}\int_0^b\int_0^c\int_0^a\int_0^b\int_0^c \left|\Delta_{\frac{a}{k_i},\frac{b}{l_i}\frac{c}{m_i}\frac{a}{k_j},\frac{b}{l_j}\frac{c}{m_j}} B_\xi^*(x,y,z,x_1,y_1,z_1)\right| \leq$$

$$\leq \frac{C}{k_il_im_ik_jl_jm_j.}$$

*Звідси й отримаємо, що виконується (11).*

*Виконання умов (12), (12) і (13) доводимо аналогічно.*

1. *V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes, – American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000.
2. *Булдыгин В. В., Козаченко Ю. В.* К вопросу применимости метода Фурье для решения задач со случайными краевыми условиями // Случайные процесы в задачах математической физики. – Киев : Ин-т. Математики АН УССР, 1979. – С. 4–35.
3. *Бейсенбаев Е., Козаченко Ю. В.* Равномерная сходимость случайных рядов по вероятности и решение краевых задач со случайными начальными условиями //Теория вероятн. и мат. статистика. – 1979. – Вып. 21. – С. 9–23.
4. *Довгай Б. В.* Обґрунтування методу Фур'є для неоднорідного гіперболічного рівняння з випадковою правою частиною // Укр. мат. журн. – 2004. – 56, №5. – С. 616–624.
5. *Б. В. Довгай, Ю. В. Козаченко, Г. І. Сливка-Тилищак* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами. Монографія. – К. ВЦ «Київський університет», 2008. – 174с.
6. *Козаченко Ю. В., Сливка Г. І.* Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймов. та матем. статист. Вип. 69, – 2003. – С. 48–63.
7. *Сливка-Тилищак Г. І., Вереш К. Й.* Обґрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча // Наук. Вісник Ужгород. ун-ту. Серія матем. і інформ. – 2008. – Вип. 16. – С. 174–183.
8. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики.- Москва: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1954. –254с.


Одержано 12.06.2009