

КРИТИЧНИЙ ЗАРЯД У МОДИФІКОВАНІЙ КВАНТОВІЙ ЕЛЕКТРОДИНАМІЦІ

В.Ю. ЛАЗУР, О.К. РЕЙТІЙ, В.В. БОНДАРЧУК, В.К. РЕЙТІЙ

УДК 537.8
© 2007 р.

Ужгородський національний університет
(Вул. Волошина, 54, Ужгород 88000; e-mail: lazur@univ.uzhgorod.ua; reiti@univ.uzhgorod.ua)

Для однієї простої моделі протяжного джерела (ядра) отримано точні нормовані розв'язки рівняння Дірака зі скалярно-векторним потенціалом кулонівського типу, а також трансцендентне рівняння, що визначає рівні основного та збуджених електронних станів у докритичній області $Z < Z_{cr}$. Знайдено рівняння для величини критичного заряду ядра, за якого рівень опускається в нижній енергетичний континуум. Виявлено сильний вплив лоренцевої структури потенціалів взаємодії на критичний заряд та дискретний спектр ферміона в скалярному та векторному кулоноподібних полях.

1. Вступ

Останніми роками виник значний інтерес до вивчення поведінки квантових систем ферміонів за наявності разом взятих електромагнітного (векторного) та скалярного зовнішніх полів. Такі системи мають низку неординарних рис, суттєво відмінних від тих, котрі властиві ферміонам у присутності одного лише електромагнітного поля. Так, наприклад, на відміну від електромагнітного, скалярне поле діє однаково як на частинки, так і на античастинки. Тому картина рівнів енергії ферміонів, що взаємодіють зі скалярним та векторним (наприклад, кулонівським) полями одночасно, може істотно відрізнятись від звичної нам картини спектра релятивістської кулонівської задачі. Це, зокрема, проявляється в тому, що у випадку взаємодії масивних ферміонів з чисто скалярним зовнішнім полем дискретні спектри частинок і античастинок симетричні відносно нульового рівня ($E = 0$).

Зазначимо також, що спін-орбітальні взаємодії у скалярному та векторному полях мають протилежні знаки. У векторному полі спіни орієнтуються у напрямку $[\vec{F}, \vec{p}]$, де \vec{F} – сила, що діє на частинку, \vec{p} – її імпульс, а в скалярному полі – в напрямку $-\vec{F}$. Ці міркування дають наочне пояснення того факту, що в скалярному полі рівень $j = 3/2, l = 1$ лежить нижче ніж рівень $j = 1/2, l = 1$, а у векторному полі навпаки.

Математичні дослідження явищ, що відбуваються у сильних векторних (наприклад, електричних) та скалярних полях, адекватні фізичній ситуації, слід проводити на основі точних розв'язків релятивістських хвильових рівнянь у зовнішньому полі. При цьому на відміну від випадку взаємодії з електричним полем, яка вводиться у вільне рівняння Дірака мінімальним чином як часова компонента 4-потенціалу A_μ (векторний зв'язок), урахування взаємодії масивного ферміона зі скалярним зовнішнім полем S здійснюється за допомогою заміни $m_0 c^2 \rightarrow m_0 c^2 + S$ (скалярний зв'язок). Тоді за наявності статичного скалярного $S(\vec{r})$ і електростатичного $V(\vec{r})$ зовнішніх полів рівняння Дірака набуває вигляду

$$\left[c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta (m_0 c^2 + S(\vec{r})) - (E - V(\vec{r})) \right] \Psi(\vec{r}) = 0, \quad (1)$$

де $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ і β – стандартні матриці Дірака, \vec{p} – оператор імпульсу, E і m_0 – повна енергія і маса спокою частинки. Підкреслимо, що $S(\vec{r})$ є лоренц-скаляр, а $V(\vec{r})$ – нульова компонента лоренц-вектора.

Для простої моделі взаємодії ферміона зі скалярним та векторним зовнішніми полями кулонівського типу,

$$V(r) = -\hbar c \frac{\alpha_V}{r}, \quad S(r) = -\hbar c \frac{\alpha_S}{r}, \quad (2)$$

розв'язки і спектр рівняння Дірака були знайдені в [1, 2]; в рівностях (2) через α_S та α_V позначено скалярну і електростатичну константи зв'язку. Дану модель часто використовують як вихідне наближення при релятивістському описанні спектрів “екзотичних” ВП-систем (див., наприклад, [3, 4]), лептоатомів, взаємодія між складовими частинами яких здійснюється шляхом обміну квантами двох різних типів полів. А саме якщо кулонівська взаємодія зумовлена обміном віртуальним фотоном (квантом електромагнітного поля), то відповідальна за скалярний зв'язок взаємодія лептона з ядром може бути викликана обміном віртуальною нейтральною частинкою з нульовим спіном. Головним кандидатом на цю роль є скалярний

σ -мезон, на користь існування котрого в теорії є серйозні аргументи (див., наприклад, [5] і посилання там). До того ж порівняно недавно з'явилися повідомлення двох експериментальних груп [6, 7] про спостереження аномально широкого скалярного резонансу в каскадах нелептонних розпадів важких (D , B та J/Ψ) мезонів. Звернімо ще увагу на те, що виявлений у згаданих експериментах скалярний мезон має досить велику масу ($M_\sigma = 390$ MeV [6–8]) і тому скалярний потенціал $S(r)$, що відповідає обміну такою частинкою (в подальшому потенціал одномезонного обміну) насправді є короткодійним (юкавівського типу). Тим не менш, як було відзначено у роботах [1–4], уже в рамках такої порівняно простої моделі зі скалярно-векторним варіантом взаємодії, як розглядувана модель (2), можна виявити багато цікавих особливостей енергетичного спектра лептоатомів, котрі зберігаються і за реалістичнішого розгляду. Одна з важливих переваг даної моделі полягає в тому, що вона допускає точне розв'язання рівняння Дірака (1) у термінах відомих спеціальних функцій (вироджених гіпергеометричних функцій) [2–4]. Ці розв'язки можуть бути використані як базис для побудови різного роду уточнень, котрі враховують як “реалістичну” (юкавівську) форму потенціалу одномезонного обміну $S(r)$, так і ефекти руху та структури ядра, а також радіаційні поправки. Цим, мабуть, пояснюється та увага (див., наприклад, [9, 10]), яку останнім часом приділяють дослідники релятивістській задачі про рух ферміона у зовнішніх скалярному та електричному полях кулонівського типу (2).

Додаткові стимули до вивчення подібних задач з'явилися недавно у теорії сильних взаємодій – квантової хромодинаміці (КХД) і КЕД надсильних кулонівських полів. У першому випадку мова йде про моделі будови змішаних мезонів (КХД-аналогів ВП-атомів), що складаються, наприклад, з одного легкого антикварка \bar{q} і одного важкого кварка Q ($Q\bar{q}$ -мезони (див., наприклад, [11–13]). Розглядаючи в наближенні нескінченно важкого кварка Q рівняння Дірака як рівняння руху для одного легкого антикварка \bar{q} , можна вивчити (подібно картині ВП-атомів) ряд важливих аспектів теорії важко-легких кварк-антикваркових систем, таких, як релятивістську динаміку легкого антикварка \bar{q} у зовнішньому полі важкого кварка Q , лоренц-структуру далекодійної (утримуючої) частини $Q\bar{q}$ -взаємодії, тонку структуру спектра змішаних мезонів, вплив на спектр спонтанного порушення кіральної симетрії тощо. Як відомо з КХД [11–13], на малих відстанях внаслідок явища асимптотичної свободи основний внесок в $Q\bar{q}$ -

взаємодію дає звичайний кулонівський потенціал одноклоонного обміну $V(r) = -4\alpha_s \hbar c / (3r)$, де α_s – константа сильної взаємодії. Зі зростанням відстані основною стає скалярна утримуюча взаємодія (конфайнмент), “точний” вигляд якої поки що не встановлений. КХД-розрахунки на решітках з перших принципів [14] виділяють на великих відстанях лінійний (скалярний) конфайнмент $S(r) = \hbar c \sigma r$, де σ – натяг струни. Всі інші взаємодії, зрозуміло, важливі за більш ретельного опису властивостей мезонів, проте вони є малими у порівнянні зі скалярним потенціалом, котрий зв'язує кварки в мезони. Ми не будемо зупинятися на цих питаннях детальніше, оскільки вони з достатньою повнотою висвітлені в огляді [14].

Особливий інтерес до розглядуваного кола задач виник недавно у КЕД. Як добре відомо (див. [3, 15]), в електродинаміці надсильних кулонівських полів суттєвими параметрами теорії є критичний заряд ядра Z_{cr} і критична відстань R_{cr} в системі двох важких ядер, що зіштовхуються. За досягнення цих параметрів основний рівень електронного спектра опускається до межі нижнього континууму, після чого (тобто при $Z = Z_1 + Z_2 > Z_{cr}$ або $R < R_{cr}$) стає можливим спонтанне народження позитронів з вакууму. Експериментальне спостереження цього ефекту означало б перевірку статусу КЕД і рівняння Дірака не в традиційному напрямку надвисоких енергій та малих відстаней, а у новій області надсильних полів. Проте розпочаті майже чверть століття тому в GSI (Дармштадт, Німеччина) на прискорювачі важких іонів UNILAC експерименти з пошуку вказаного фундаментального процесу не дали позитивного результату. У зв'язку з такою ситуацією рядом авторів (наприклад, [2, 16]) було розглянуто різні модифікації КЕД та їх вплив на ефект спонтанного народження позитронів. Зокрема, якщо дотримуватися погляду авторів відомої монографії [3] (див. також [2]), що в умовах експериментів GSI (тобто в надсильних кулонівських полях) у взаємодії електрона з ядром (поряд з кулонівським) з'являється додатковий юкавівський скалярний потенціал $S(r)$ одномезонного обміну, то першочергового значення набуває питання про його вплив на критичний заряд Z_{cr} і критичну відстань R_{cr} . При цьому якісний бік питання може бути з'ясована в моделі з кулоноподібною скалярною взаємодією (2).

Нарешті, зазначимо, що спінорне рівняння (1) зі змішаним скалярно-векторним зв'язком цікаве також з погляду його можливих застосувань в теорії адронних атомів [17]. В принципі, не виключено, що це ж рівняння може виявитись корисним і для опису де-

яких ефектів у фізиці твердого тіла (наприклад у двозонних напівпровідниках [18]). Враховуючи, що у майбутньому інтерес до перерахованих вище фізичних застосувань моделі (2) без сумніву буде зростати, видається доцільною постановка релятивістської кулонівської задачі для рівняння Дірака зі скалярним та векторним потенціалами кулонівського типу.

Структура роботи така. Другий розділ має допоміжний характер: він містить постановку задачі та короткий аналіз особливостей руху релятивістського електрона в зовнішньому скалярно-векторному полі (2) точкового джерела (ядра). В третьому розділі розглянуто розв'язок і спектр рівняння Дірака зі змішаною лоренц-структурою потенціалу взаємодії для електрона в полі ядра з зарядом $Z > 137$, коли в наближенні точкового заряду відбувається “падіння на центр”. Урахування скінченних розмірів ядра, яке приводить до регуляризації скалярного та векторного кулоноподібних потенціалів (2) при $r \rightarrow 0$, дозволяє пройти точку $Z = 137$ аж до “критичного” значення Z_{cr} , за якого енергія стану досягає межі нижнього континууму $E = -m_0c^2$. Зокрема, для однієї простої моделі протяжного джерела отримано трансцендентне рівняння, що неявно визначає рівні енергії основного та збудженого електронних станів для $Z < Z_{cr}$. Детально розглянуто випадок гранично малого радіуса обрізування кулоноподібних векторного та скалярного полів, коли параметр $\Lambda = \ln(\lambda_c/r_N) \gg 1$; тут $\lambda_c = \hbar/m_0c$ – комптонівська довжина хвилі. При цьому в задачі з'являється малий параметр Λ^{-1} , що дозволяє знайти асимптотичні формули для критичного заряду ядра та енергії основного рівня для $r_N \ll \lambda_c$. У четвертому розділі отримано рівняння для визначення величини критичного заряду Z_{cr} , при якому основний рівень електронного спектра опускається до межі нижнього континууму і стає можливим спонтанне народження позитронів із вакууму. Досліджено залежність Z_{cr} від величини константи скалярного зв'язку α_S і виявлено сильний вплив лоренцевої структури потенціалів взаємодії на критичний заряд ядра та енергетичний спектр спінорної частинки в зовнішньому скалярно-векторному полі.

2. Точний розв'язок рівняння Дірака зі скалярним та векторним потенціалами кулонівського типу

В цьому розділі ми розглянемо дану задачу в тому наближенні, в якому можна нехтувати розмірами та структурою ядра, і вважатимемо, що скалярно-векторний потенціал взаємодії визначається форму-

лами (2) для всіх значень $0 \leq r < \infty$. Враховуючи центральну симетрію потенціальної енергії ферміона в такому полі, зручно перейти у сферичну систему координат з центром на ядрі. Відповідно до цього будемо шукати хвильову функцію $\Psi(\vec{r})$ стаціонарного стану (в стандартному зображенні) у вигляді

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} F(r)\Omega_{jlm}(\vec{n}) \\ (-1)^{l-l'+1}G(r)\Omega_{j'l'm}(\vec{n}) \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \vec{r}/r, \quad (3)$$

де $\Omega_{jlm}(\vec{n})$ – кульовий спінор [19], $j = 1/2, 3/2, \dots$ – повний кутовий момент, $l = j \pm 1/2$ – орбітальний кутовий момент, $l' = 2j - l$, $m = -j, -j + 1, \dots, j$ – проекція повного кутового момента на вісь квантування.

Підставляючи вираз (3) в рівняння (1), отримаємо таку систему рівнянь для радіальних функцій:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF}{dr} + \frac{k}{r}F - \frac{1}{\hbar c} [E - V(r) + m_0c^2 + S(r)] G &= 0, \\ \frac{dG}{dr} - \frac{k}{r}G + \frac{1}{\hbar c} [E - V(r) - m_0c^2 - S(r)] F &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

де $k = \pm(j + 1/2)$.

Згідно з характером поведінки радіальних функцій $F(r)$ та $G(r)$ в асимптотичних областях великих і малих r розв'язки системи рівнянь (4) зі скалярно-векторним варіантом взаємодії (2) будемо шукати у вигляді [3, 4]

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{m_0c^2 + E} e^{-\rho/2} \rho^\gamma (Q_1 + Q_2), \\ G &= -\sqrt{m_0c^2 - E} e^{-\rho/2} \rho^\gamma (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (5)$$

де введено позначення

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m_0^2c^4 - E^2}/(\hbar c), \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \alpha_V^2 + \alpha_S^2}.$$

Скінченний при $\rho \rightarrow 0$ розв'язок системи рівнянь (4) можна подати в термінах виродженої гіпергеометричної функції $F(a, b; z)$ за допомогою зображень (5) та таких рівностей:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF(\gamma - \chi, 2\gamma + 1; \rho), \\ Q_2 &= -BF(\gamma + 1 - \chi, 2\gamma + 1; \rho), \end{aligned} \quad (6)$$

де $\chi = (\alpha_V E + \alpha_S m_0c^2)/(\hbar c\lambda)$. Поклавши в одному з рівнянь для функцій Q_1 і Q_2 $\rho = 0$, знайдемо зв'язок між сталими A і B :

$$B = \frac{\hbar c \gamma \lambda - \alpha_V E - \alpha_S m_0c^2}{\hbar c k \lambda - \alpha_V m_0c^2 - \alpha_S E} A. \quad (7)$$

Із умови скінченності радіальних хвильових функцій $F(r)$ і $G(r)$ при $r \rightarrow \infty$ отримуємо рівняння для можливих значень енергії

$$\frac{\alpha_V E + \alpha_S m_0 c^2}{\hbar c \lambda} = n_r + \gamma, \quad (8)$$

де n_r – ціле невід’ємне число, причому

$$n_r = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots, & k < 0; \\ 1, 2, 3, \dots, & k > 0. \end{cases}$$

Для зв’язаних станів ($E < m_0 c^2$) хвильова функція (3) повинна бути нормована умовою $\int |\Psi|^2 d\vec{r} = 1$; звідси впливає умова проміжного нормування для радіальних функцій

$$\int_0^\infty (F^2 + G^2) dr = 1. \quad (9)$$

Виконавши інтегрування, отримуємо формулу для спільної нормувальної сталої

$$A = \frac{1}{\Gamma(2\gamma + 1)} \sqrt{\frac{\lambda \Gamma(2\gamma + n_r + 1)(N - k)}{2m_0 c^2 N n_r!}}, \quad (10)$$

де $N = (\alpha_V m_0 c^2 + \alpha_S E) / (\hbar c \lambda)$.

Зібравши разом отримані формули, випишемо кінцеві вирази для нормованих радіальних хвильових функцій

$$\left. \begin{matrix} F \\ G \end{matrix} \right\} = \pm A \sqrt{m_0 c^2 \pm E} \rho^\gamma e^{-\rho/2} [F(-n_r, 2\gamma + 1; \rho) \mp \mp n_r (N - k)^{-1} F(-n_r + 1, 2\gamma + 1; \rho)] \quad (11)$$

(верхні знаки відносяться до F , нижні – до G).

Розв’язуючи рівняння (8) відносно E , знаходимо такий вираз для дискретних рівнів енергії [3, 4]:

$$E = m_0 c^2 \frac{\pm(n_r + \gamma) \sqrt{n_r(n_r + 2\gamma) + k^2} - \alpha_V \alpha_S}{\alpha_V^2 + (n_r + \gamma)^2}. \quad (12)$$

Формула (12) визначає так звану тонку структуру рівнів енергії релятивістського воднеподібного атома і є узагальненням відомої формули Дірака–Зоммерфельда [19] на випадок скалярно-векторної взаємодії кулонівського типу. Надалі ми будемо брати додатний знак перед коренем в (12) і розглядати тільки електронні рівні; друга вітка спектра енергій

приводить при $\alpha_S = 0$ до побічного розв’язку рівняння (8).

Поклавши в (12) $n_r = 0$, $k = -1$, знайдемо енергію електрона на найнижчому рівні

$$E_0 = m_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \alpha_V^2 + \alpha_S^2} - \alpha_V \alpha_S}{1 + \alpha_S^2}. \quad (13)$$

Обговоримо зміст формули (13). Як видно, із збільшенням константи векторного зв’язку $\alpha_V = Z\alpha$ (де Z – заряд ядра атома, $\alpha \approx 1/137$ – стала тонкої структури релятивістського ВП-атома) енергія основного стану E_0 зменшується, перетинає нуль при $\alpha_V = 1$ і обривається при значенні $\alpha_V = \sqrt{1 + \alpha_S^2}$ (для збуджених станів це відбувається при $\alpha_V = \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$). Продовження формули (13) в область $\alpha_V > \sqrt{1 + \alpha_S^2}$ приводить до комплексних значень енергії та осциляції хвильових функцій при $r \rightarrow 0$, що відповідає не допустимій в релятивістській теорії ситуації “падіння на центр”. Поява цього ускладнення пов’язана з ідеалізацією задачі, а саме з нехтуванням скінченними розмірами ядра. За малих значень заряду Z ядро можна вважати точковим, тобто врахування його радіуса r_N дає дуже малі поправки до енергії рівнів. Однак, коли α_V наближається до $\sqrt{1 + \alpha_S^2}$, ситуація кардинально змінюється.

Врахування скінчених розмірів ядра знімає вказану аномалію у поведінці рівнів. Першими це помітили Померанчук і Смородінський [20] в 1945 р. Ввівши в розгляд скінченний радіус ядра r_N , ці автори показали, що розв’язок звичайного рівняння Дірака (з векторним типом взаємодії) для обрізаного на малих відстанях кулонівського потенціалу існує у всій області від $Z = 0$, $E = m_0 c^2$ до $Z = Z_{cr}(r_N)$, $E = -m_0 c^2$, і оцінили величину критичного заряду $Z_{cr}(r_N)$, за якого енергія рівня $1s_{1/2}$ досягає величини $E = -m_0 c^2$. Причому виявилось, що із зростанням Z в області $Z > 137$ рівні енергії стають від’ємними і продовжують опускатися аж до межі нижнього континууму $E = -m_0 c^2$. Аналогічна поведінка рівнів енергії електрона спостерігається і в розглядуваному нами випадку скалярно-векторної взаємодії при $\alpha_V > \sqrt{1 + \alpha_S^2}$, однак перетин межі нижнього континууму $E = -m_0 c^2$ відбувається при значно більших значеннях критичного заряду Z_{cr} , ніж у чисто векторному випадку. Подальше обговорення питань, пов’язаних з рухом рівнів поблизу $E = -m_0 c^2$, і розгляд методів визначення величини критичного заряду ми відкладемо до наступних розділів.

3. Дискретний спектр при $\alpha_V > \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$

Для знаходження енергетичного спектра електрона в кулонівському полі ядра з $\alpha_V > \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$ необхідно поставити деяку граничну умову в нулі (що еквівалентно визначенню самоспряженого розширення оператора енергії [21]); лише після цього задача стає математично коректною [22, 23]. Фізично постановка граничної умови в нулі означає обрізування потенціалів (2) на малих відстанях, тобто врахування скінченних розмірів ядра.

Припустимо, що $V(r)$ і $S(r)$ є кулоноподібними аж до поверхні ядра, а всередині ядра мають складніший вигляд:

$$V(r) = \begin{cases} -\hbar c \frac{\alpha_V}{r}, & r > r_N, \\ -\hbar c \frac{\alpha_V}{r_N} f\left(\frac{r}{r_N}\right), & 0 \leq r \leq r_N, \end{cases} \quad (14)$$

$$S(r) = \begin{cases} -\hbar c \frac{\alpha_S}{r}, & r > r_N, \\ -\hbar c \frac{\alpha_S}{r_N} f\left(\frac{r}{r_N}\right), & 0 \leq r \leq r_N. \end{cases} \quad (15)$$

Тут $f(x)$ – функція обрізування, яка враховує скінченні розміри ядра, $0 \leq x = r/r_N \leq 1$. Найчастіше використовуються дві найпростіші моделі обрізування [20, 24–26]:

Модель I. $f(x) = 1$, тобто прямокутне обрізування. Для векторного потенціалу це відповідає концентрації всього електричного заряду на поверхні ядра.

Модель II. $f(x) = (3 - x^2)/2$, що відповідає у чисто векторному випадку рівномірному розподілу заряду по об'єму ядра.

Щоб знайти спектр рівняння Дірака з потенціалами (14), (15) і визначити величину критичного заряду Z_{cr} , необхідно розв'язати це рівняння всередині ($0 < r < r_N$) і ззовні ($r > r_N$) ядра, що у випадку моделі II при $0 < r < r_N$ вимагає числових розрахунків. Ми обмежимося моделлю прямокутного обрізування обох потенціалів, для якої рівняння Дірака розв'язується в аналітичному вигляді. Реалістичніший вибір форми потенціалу всередині ядра зводиться в основному до збільшення в 1,5 раза максимальних значень $V(0)$ та $S(0)$, що мало відображається у кінцевих результатах (див., наприклад, чисто векторний випадок [26]). Перейдемо до описання процедури розв'язування системи рівнянь Дірака (4) при $0 \leq r \leq r_N$.

Виключаючи із системи (4) функцію $G(r)$, отримуємо рівняння для визначення $F(r)$

$$\frac{d^2 F(r)}{dr^2} + \left[K^2 - \frac{k(k+1)}{r^2} \right] F(r) = 0. \quad (16)$$

Тут враховано, що $V, S = \text{const}$ у всій внутрішній області $0 \leq r \leq r_N$, а стала

$$K = \frac{\sqrt{(E - V)^2 - (m_0 c^2 + S)^2}}{\hbar c}.$$

Загальний розв'язок рівняння (16) має вигляд

$$F(r) = \sqrt{r} \left[\tilde{A} J_{|k+1/2|}(Kr) + \tilde{B} N_{|k+1/2|}(Kr) \right], \quad (17)$$

де $J_n(x)$ і $N_n(x)$ – відповідно функції Бесселя і Неймана цілого порядку n [27]. Виразивши $G(r)$ через $F(r)$ за допомогою (4) та використавши рекурентні співвідношення для функцій $J_n(x)$ і $N_n(x)$, отримуємо відповідний вираз для нижньої компоненти

$$G(r) = \text{sgnk} \frac{\hbar c K \sqrt{r}}{E - V + m_0 c^2 + S} \left[\tilde{A} J_{|k-1/2|}(Kr) + \tilde{B} N_{|k-1/2|}(Kr) \right]. \quad (18)$$

З умови скінченності $F(r)$ при $r = 0$ випливає, що $\tilde{B} = 0$. Тоді остаточні формули для радіальних функцій у внутрішній області $0 \leq r \leq r_N$ набувають простішого вигляду:

$$F(r) = \tilde{A} \sqrt{r} J_{|k+1/2|}(Kr), \quad (19)$$

$$G(r) = \tilde{A} \text{sgnk} \frac{\hbar c K \sqrt{r}}{E - V + m_0 c^2 + S} J_{|k-1/2|}(Kr). \quad (20)$$

У зовнішній області $r > r_N$ потенціали $V(r)$ і $S(r)$ є кулоноподібними і розв'язок системи Дірака (4), експоненціально згасаючий на нескінченності, визначається виразами типу (5), а функції Q_1 та Q_2 виражаються через вироджені гіпергеометричні функції аналогічно (6). Однак тепер необхідно враховувати обидва знаки величини $\gamma = \sqrt{k^2 - \alpha_V^2 + \alpha_S^2}$. Тому замість (6) маємо зображення

$$Q_j = C_j \Psi(\chi_j, 2\gamma + 1; \rho), \quad j = 1, 2, \quad (21)$$

де $\chi_1 = \gamma - \chi$, $\chi_2 = \chi_1 + 1$, C_1 і C_2 – деякі сталі, а $\Psi(a, b; z)$ – іррегулярний розв'язок виродженого гіпергеометричного рівняння; регулярний розв'язок $F(a, b; z)$ цього рівняння тут неприйнятний через його зростання на нескінченності. Підставляючи (21),

(5) в (4) та використовуючи рекурентні співвідношення між виродженими гіпергеометричними функціями [27], знаходимо зв'язок між сталими C_1 і C_2 :

$$\frac{C_2}{C_1} = k + \frac{\alpha_V m_0 c^2 + \alpha_S E}{\hbar c \lambda} = k + N. \quad (22)$$

Співвідношення між сталими \tilde{A} і C_1 встановлюємо шляхом зшивання виразів для $F(r)$, знайдених у внутрішній (див. (19)) і зовнішній (формули (5), (21)) областях, в точці $r = r_N$:

$$\frac{\tilde{A}}{C_1} = \sqrt{\frac{m_0 c^2 + E}{r_N}} \frac{\rho_N^\gamma e^{-\rho_N/2}}{J_{|k+1/2|}(K r_N)} [\Psi(\chi_1, 2\gamma + 1; \rho_N) + (k + N)\Psi(\chi_2, 2\gamma + 1; \rho_N)] \quad (\rho_N = 2\lambda r_N). \quad (23)$$

Сталу C_1 знайдемо (з точністю до фазового множника) з умови проміжного нормування (9):

$$|C_1| = \left[\frac{2m_0 c^2 \nu \Gamma(2\gamma + 1) \Gamma(-2\gamma)}{\lambda \Gamma(\chi_2) \Gamma(\chi_2 - 2\gamma)} \right]^{-1/2}, \quad (24)$$

де $\nu = \xi C(C - k) - \gamma(2\varepsilon C + 1)$, $\xi = \psi(\chi_2 - 2\gamma) - \psi(\chi_2)$, $\varepsilon = E/m_0 c^2$, $C = k + N$ (математичні деталі обчислення даного інтеграла наведено в Додатку).

Зшивання відношення G/F для внутрішнього та зовнішнього розв'язків на краю ядра (при $r = r_N$) дає рівняння

$$-\frac{\sqrt{m_0 c^2 - E}}{\sqrt{m_0 c^2 + E}} \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1 + Q_2} \Big|_{r=r_N} = A_k, \quad (25)$$

яке визначає спектр рівняння Дірака в області $-m_0 c^2 \leq E \leq m_0 c^2$. Тут A_k – відношення функцій (19), (20) при $r = r_N$:

$$A_k = \operatorname{sgn} k \frac{\hbar c K}{E - V + m_0 c^2 + S} \frac{J_{|k-1/2|}(K r_N)}{J_{|k+1/2|}(K r_N)}. \quad (26)$$

За допомогою рекурентного співвідношення [27]

$$\frac{d\Psi(a, b; z)}{dz} = \frac{a}{z} [(a - b + 1)\Psi(a + 1, b; z) - \Psi(a, b; z)]$$

перетворимо рівняння (25) до компактнішого вигляду

$$\rho_N \frac{\Psi'(\chi_1, 2\gamma + 1; \rho_N)}{\Psi(\chi_1, 2\gamma + 1; \rho_N)} = \frac{A_k(k + t\alpha_-) - kt - \alpha_+}{A_k + t} - \gamma, \quad (27)$$

де $t = -\sqrt{(m_0 c^2 - E)/(m_0 c^2 + E)}$, $\alpha_\pm = \alpha_V \pm \alpha_S$, штрих означає похідну по ρ_N , а параметри λ і χ_1 ті ж, що і в (21). Отримане точне рівняння (27) для енергії рівнів має вельми нетривіальну аналітичну структуру і для прямих розрахунків навряд чи придатне. Тому доцільно спробувати по можливості спростити вираз (27), принаймні в деяких граничних випадках. Як впливає з розгляду значно більш повно вивченої релятивістської кулонівської задачі у чисто векторному випадку [26], спрощення можливі в разі використання наближення малого радіуса обрізування кулонівського поля. Подивимось, як працює це наближення у випадку рівняння (27).

Якщо екстраполювати на область $Z > 137$ залежність $r_N = R_0 A^{1/3}$, вважаючи (як і для важких ядер) $A = 2,5Z$, $R_0 = 1,1$ фм, то радіус ядра r_N виявляється малим у порівнянні з комптонівською довжиною хвилі електрона (наприклад, при $Z = 170$ маємо $r_N \approx 0,02$ в одиницях $\hbar/m_0 c$), і можна використати наближення $K \approx \sqrt{\alpha_+ \alpha_-}/r_N$. При цьому у виразі (26) зникає залежність від енергії E і він набуває простішої форми

$$A_k = \operatorname{sgn} k \sqrt{\frac{\alpha_+}{\alpha_-}} \frac{J_{|k-1/2|}(\sqrt{\alpha_+ \alpha_-})}{J_{|k+1/2|}(\sqrt{\alpha_+ \alpha_-})}. \quad (28)$$

Подальшого спрощення рівняння (27) досягаємо, використовуючи розклад функції $\Psi(a, b; z)$ поблизу нуля:

$$\Psi(a, b; z) = \frac{\Gamma(1 - b)}{\Gamma(a - b + 1)} + \frac{\Gamma(b - 1)}{\Gamma(a)} z^{1-b} + \dots \quad (29)$$

Обчисливши логарифмічну похідну функції (29), використавши властивості Γ -функцій і підставивши одержаний результат в (27), отримаємо рівняння

$$(2\lambda r_N)^{2\gamma} = \frac{2\gamma \sin(2\pi\gamma) \Gamma^2(2\gamma) \Gamma(1 + \chi - \gamma)}{\pi \Gamma(1 + \chi + \gamma)} \times \frac{\sin[\pi(\chi - \gamma)] (A_k \alpha_- - k + \gamma)(t\alpha_- + k + \gamma)}{\sin[\pi(\chi + \gamma)] (A_k \alpha_- - k - \gamma)(t\alpha_- + k - \gamma)} \quad (30)$$

зручне для аналізу станів дискретного спектра при $\alpha_V < \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$, коли величина γ – дійсна. Легко помітити, що при $r_N \rightarrow 0$, $\gamma \neq 0$ формула (30) переходить в (8), і спектр енергій описується рівністю (12).

У випадку $\alpha_V > \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$, коли $\gamma = i\theta$ стає чисто уявною величиною, приходимо до трансцендентного рівняння

$$\operatorname{ctg}\{\theta \ln(2\lambda r_N) - \arg[\Gamma(1 + 2i\theta)/\Gamma(-\chi + i\theta)]\} =$$

$$= \frac{(A_k \alpha_- - k)(t \alpha_- + k) - \theta^2}{\theta \alpha_- (A_k + t)}, \quad (31)$$

яке разом з (30) неявно визначає рівні енергії електрона як для основного, так і для збуджених станів з урахуванням скінченності розмірів ядра згідно з моделлю I.

Рівняння (30), (31) значно простіші за точне рівняння (26), однак їх розв'язання все ж вимагає числових розрахунків. На рис. 1 наведено числові розв'язки рівнянь (30) і (31) для основного $1s_{1/2}$ стану при різних значеннях сталої скалярного зв'язку α_S . Проаналізуємо рух енергетичних рівнів в залежності від заряду $Z = 137\alpha_V$ спочатку для чисто векторного випадку ($\alpha_S = 0$). Починаючи з $Z = 0$, рівень енергії опускається до осі Z , яку перетинає при $Z = 137$, а далі розв'язки рівняння Дірака для точкового ядра втрачають зміст (штрихова крива). Енергетичний рівень електрона у воднеподібному атомі із скінченними розмірами ядра перетинає поріг $E = 0$ при $Z \approx 147$ (суцільна лінія) і при $Z_{cr} \approx 172$ опускається в нижній континуум, де стає квазістаціонарним. У випадку $\alpha_S = 1$ та $\alpha_S = 2$ рівень досягає нуля при $Z \approx 137$, а опускається до межі нижнього континуума при значеннях заряду $Z_{cr} \approx 214$ та $Z_{cr} \approx 318$ відповідно.

4. Логарифмічне наближення

Хоча при одержанні рівнянь (30) і (31) вже було використано наближення $r_N \ll \lambda_c$ ($\lambda_c = \hbar/m_0c = 3,86 \cdot 10^{-11}$ см – комптонівська довжина хвилі), деякі аналітичні оцінки для рівнів енергії і величини критичного заряду Z_{cr} можна отримати, якщо, наслідуючи роботам [25], накласти додаткову умову $|\ln(r_N/\lambda_c)| \gg 1$, що приводить до появи великого параметра $\Lambda = -\ln(r_N/\lambda_c) \gg 1$. Хоча для реальних розмірів ядра $r_N \sim 10^{-12}$ см значення цього параметра не дуже велике ($\Lambda \approx 3,5$), таке наближення, як ми побачимо нижче, дає правильну загальну картину руху рівнів зі зміною Z .

Отже, перейдемо до технічного оформлення використаного тут наближення ($\Lambda \gg 1$). При $r_N \rightarrow 0$ значення α_V близьке до $\sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$ і $\theta \rightarrow 0$. Тому в правій частині рівняння (31) можна покласти $\alpha_V = \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$, причому згідно з (28)

$$A_k = \frac{k J_{|k-1/2|}(|k|)}{\tilde{\alpha} J_{|k+1/2|}(|k|)}, \quad \tilde{\alpha} = \sqrt{k^2 + \alpha_S^2} - \alpha_S. \quad (32)$$

Оскільки при $\theta \rightarrow 0$

$$\varphi = 2\theta\psi(1) - \arg \Gamma(-\chi + i\theta) + O(\theta^2),$$

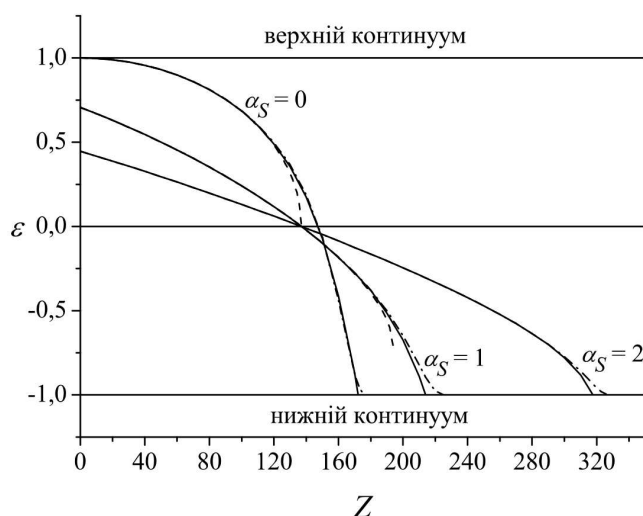


Рис. 1. Залежності енергії ($\varepsilon = E/mc^2$) основного стану від заряду Z ядра атома для значень константи скалярного зв'язку $\alpha_S = 0, 1, 2$: суцільні криві – числові розв'язки рівнянь (30), (31); штрихові і штрих-пунктирні – результати розрахунків за формулами (13) і (40) відповідно

де $\psi(z)$ – логарифмічна похідна Γ -функції, то рівняння (31) зводиться до вигляду

$$\frac{\pi n'}{\theta} = \frac{1}{A_k \tilde{\alpha} - k} + \frac{1}{t \tilde{\alpha} + k} - \frac{1}{\theta} \arg \Gamma(-\chi + i\theta) + 2\psi(1) - \ln(2\lambda r_N), \quad (33)$$

де $n' = n_r + (1 - \text{sgn}k)/2$ – ціле число, яке нумерує рівні енергії. При $\theta \rightarrow +0$ функція $\omega(x, \theta) = \arg \Gamma(x + i\theta)$ має розриви поблизу точок $x = -n$, в яких розташовано полюси Γ -функції. А саме якщо $|x + n| \gg \theta$, то з точністю до членів порядку θ^2

$$\omega(x, \theta) = \begin{cases} \theta\psi(x), & x > 0, \\ -(n+1)\pi + \theta\psi(x), & -(n+1) < x < -n, \end{cases} \quad (34)$$

де $\psi(x)$ – логарифмічна похідна Γ -функції. В безпосередньому околі полюса $x = -n$

$$\omega(x, \theta) = -\left(n\pi + \text{arccctg} \frac{x+n}{\theta}\right). \quad (35)$$

В області $\theta \ll |x+n| \ll 1$ формули (34) і (35) зшиваються між собою і обидві дають

$$\omega(x, \theta) = -[(n+\nu)\pi + \theta/(x+n) + \dots], \quad (36)$$

де $\nu = 0$ для $x > -n$ і $\nu = 1$ для $x < -n$.

Покладемо спочатку $E = -m_0c^2$. Тоді $\chi \rightarrow -\infty$ і з (33), (34), використовуючи асимптотику дігамма-функції $\psi(z)$ [27]

$$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} + \dots \quad (z \rightarrow \infty, |\arg z| < \pi), \quad (37)$$

отримаємо для визначення $\theta_{cr} = \sqrt{\alpha_{Vcr}^2 - \alpha_S^2 - k^2}$ ($\alpha_{Vcr} = Z_{cr}\alpha$) співвідношення

$$\frac{\pi n'}{\theta_{cr}} = \Lambda + \frac{1}{A_k \tilde{\alpha} - k} + 2\psi(1) - \ln(2\tilde{\alpha}), \quad (38)$$

звідки випливає

$$\alpha_{Vcr} = \sqrt{k^2 + \alpha_S^2} + \frac{\pi^2 n'^2}{2\sqrt{k^2 + \alpha_S^2} \Lambda^2} + O(\Lambda^{-3}). \quad (39)$$

З формули (39) видно, що при $\Lambda \gg 1$ головний член асимптотики залежить тільки від радіуса обрізування r_N , а залежність від конкретного вигляду функції обрізування $f(x)$ з'являється тільки в наступних за порядком членах розкладу (39).

З формул (33), (35) можна знайти енергію E в явному вигляді:

$$E = m_0c^2 \frac{(n_r + g) \sqrt{\alpha_V^2 - \alpha_S^2 + (n_r + g)^2} - \alpha_V \alpha_S}{\alpha_V^2 + (n_r + g)^2}, \quad (40)$$

де $g = \theta \operatorname{ctg}(\theta\Lambda)$.

Маючи аналітичний вираз для енергії рівня (40), цікаво прослідкувати, яким чином врахування скінченних розмірів ядра знімає особливість формули (13) при $\alpha_V = \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$. Після заміни $\theta \rightarrow -i\gamma$, $g \rightarrow \gamma \operatorname{cth}(\gamma\Lambda)$ формула (40) залишається правильною і для $\alpha_V < \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$. В області $\alpha_V < \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$ (за умови $\Lambda\gamma \gg 1$) $\operatorname{cth}(\gamma\Lambda)$ швидко прямує до одиниці і формула (40) переходить в (13). З іншого боку, точка $\alpha_V = \sqrt{k^2 + \alpha_S^2}$, $\gamma = 0$ вже не є особливою для функції $E(Z)$. Чим меншим є радіус ядра, тим крутіше крива рівня входить у нижній континуум.

5. Критичний заряд ядра. Ефективний розмір системи при $Z > 137$

Розглянемо розв'язки системи рівнянь Дірака (4) при $E = -m_0c^2$ і визначимо відповідні критичні значення заряду Z_{cr} . Виключаючи з системи (4) функцію $G(r)$, отримуємо рівняння

$$F'' - \frac{V' - S'}{V - S} F' - \left[\frac{k(k+1)}{r^2} + \frac{k}{r} \frac{V' - S'}{V - S} - \right.$$

$$\left. - \frac{V - S}{\hbar^2 c^2} (2m_0c^2 + V + S) \right] F = 0. \quad (41)$$

В області $r > r_N$ розв'язок, збіжний на нескінченності, виражається (з точністю до константи) через функцію Макдональда уявного індексу [27]:

$$F(r) = K_{2i\theta}(\sqrt{8\alpha_- r/\lambda_c}), \quad G(r) = (rF' + kF)/\alpha_-. \quad (42)$$

У внутрішній області $0 \leq r \leq r_N$ (для моделі I функції обрізування векторного та скалярного потенціалів (14), (15)) розв'язок системи (4) задається формулами (19), (20), в яких слід зробити заміну $E \rightarrow -m_0c^2$.

Зшиваючи знайдені тут розв'язки в точці $r = r_N$,

$$\left(\frac{G(r)}{F(r)} \right)_{r=r_N-0} = \left(\frac{G(r)}{F(r)} \right)_{r=r_N+0}, \quad (43)$$

отримуємо трансцендентне рівняння, яке визначає (за фіксованого r_N) критичний заряд:

$$\operatorname{sgn} k K_{r_N} \frac{J_{|k-1/2|}(Kr_N)}{J_{|k+1/2|}(Kr_N)} = \frac{x K'_{2i\theta}(x)}{2 K_{2i\theta}(x)} + k, \quad (44)$$

де $x = \sqrt{8\alpha_- r_N/\lambda_c}$. Вважаючи, що параметр r_N малий порівняно з комптонівською довжиною хвилі електрона λ_c , використаємо асимптотичне зображення для функції Макдональда при малих значеннях аргументу:

$$K_{2i\theta}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2\theta \operatorname{sh}(2\pi\theta)}} \sin P + \dots,$$

$$P = \arg \Gamma(1 + 2i\theta) - \theta \ln(2\alpha_- r_N/\lambda_c).$$

З врахуванням тільки головних членів в розкладі функції Макдональда та її похідної і в наближенні $K \approx \sqrt{\alpha_+ \alpha_-}/r_N$ рівняння (44) набуває вигляду

$$\theta \operatorname{ctg} P = k - \operatorname{sgn} k \sqrt{\alpha_V^2 - \alpha_S^2} \frac{J_{|k-1/2|}(\sqrt{\alpha_V^2 - \alpha_S^2})}{J_{|k+1/2|}(\sqrt{\alpha_V^2 - \alpha_S^2})}. \quad (45)$$

Рівняння (45) є трансцендентним відносно критичного значення константи векторного зв'язку $\alpha_V = \alpha_{Vcr} = Z_{cr}\alpha$, де Z_{cr} – критичний заряд ядра атома. Числові розв'язки рівняння (45) для кількох нижніх станів зображено у вигляді залежності від константи скалярного зв'язку α_S на рис. 2. З рисунка видно, що для кожного з рівнів функція $Z_{cr}(\alpha_S)$ має мінімум

при $\alpha_S \sim 0,1 \div 0,2$, а далі різко зростає зі збільшенням α_S . Це означає, що вакуум квантової електродинаміки в сильному скалярно-векторному полі кулонівського типу повинен проявляти нестійкість по відношенню до утворення електрон-позитронних пар при суттєво більших значеннях критичного заряду, ніж у чисто векторному випадку. Так, наприклад, при $\alpha_S = 1,1$, для того щоб почався процес спонтанного народження позитронів, потрібно зближувати ядра з сумарним зарядом $Z_1 + Z_2 \geq Z_{cr} = 222$. Таким чином, якщо скалярна взаємодія виявиться досить суттєвою, то це практично унеможливить постановку експериментів із виявлення даного процесу.

Пунктирною лінією на рис. 2 наведено значення критичного заряду для основного стану, обчислені за формулою (38) (радіус ядра r_N вважали рівним $0,02 \hbar/m_0c$), яка дає точніші за вираз (39) результати. Як видно, для найнижчого рівня енергії логарифмічне наближення досить добре відтворює числові розрахунки.

Цікавим також є питання про локалізацію електрона, енергія якого лежить на межі смуги неперервного спектра $E \rightarrow -m_0c^2$. В рамках стандартної (чисто векторної) моделі Герштейном і Зельдовичем [24] спочатку було висунуто припущення про те, що при $Z \rightarrow Z_{cr}$ відбувається делокалізація поляризації вакууму, тобто поляризаційний заряд йде на як завгодно великі відстані від ядра. Основним аргументом при цьому було те, що при $r \rightarrow \infty$ хвильова функція зв'язаного стану $F(r) \sim e^{-\lambda r}$, і тому при $E \rightarrow -m_0c^2$ електронна хмара, здавалося б, делокалізується. Однак подальший аналіз показав, що це не так (див., наприклад, [25]). Аналогічна ситуація спостерігається і в нашому випадку: якщо в формулі (42) скористатися асимптотикою функції Макдональда при великих значеннях аргументу [27],

$$K_{2i0}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left(1 - \frac{4\theta^2 + 1/4}{2x} + \dots \right), \quad (46)$$

то видно, що $F(r) \sim \exp(-\sqrt{8\alpha_- r/\lambda_c})$ при $r \rightarrow \infty$ і $E = -m_0c^2$. Причиною настільки різкої відмінності в поведінці хвильової функції електрона при $E = \pm m_0c^2$ є залежність ефективного потенціалу від знака E . Ефективний потенціал задачі поводить себе як $-\hbar c(\alpha_V E/m_0c^2 + \alpha_S)/r$ при $r \rightarrow \infty$, тобто при $\alpha_S = 0$ є потенціалом притягання для $E = m_0c^2$ і відштовхування для $E = -m_0c^2$ (на достатньо великих відстанях від ядра). При $\alpha_S \neq 0$ жоден з рівнів не досягає межі верхнього неперервного спектра, і тому порівнювати ці два граничні випадки ($E = +m_0c^2$ і $E = -m_0c^2$) не має змісту.

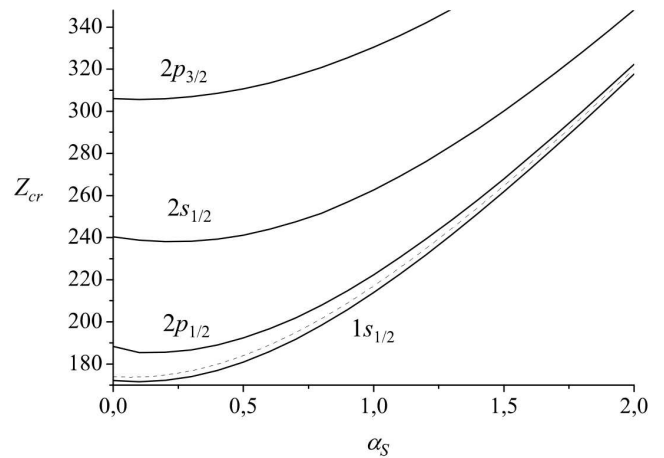


Рис. 2. Залежності критичного заряду Z_{cr} від константи скалярного зв'язку α_S для кількох нижніх рівнів: суцільні криві – числові розв'язки рівнянь (45); пунктирна – результати розрахунків за формулою (38)

Таким чином, оскільки стан електрона при $E \rightarrow -m_0c^2$ залишається зв'язаним і не “розбухає”, то відповідають і висунуті в [24] аргументи на користь делокалізації поляризації вакууму. З огляду на складність питання про розміри зв'язаного стану в скалярно-векторному випадку розглянемо його з кількісного боку. Для цього знайдемо середній радіус системи

$$\bar{r} = \int_0^{\infty} (F^2 + G^2) r dr. \quad (47)$$

Інтеграл (47) обчислено в Додатку (див. формули (Д1), (Д2), (Д8), (Д9)), і він має вигляд (в одиницях \hbar/m_0c)

$$\begin{aligned} \bar{r} = & \{2C(C - k)(\chi\xi - 2\gamma) - \gamma(1 + \varepsilon C)(2\chi + 1) + \\ & + \xi C[\varepsilon C(C - 2k) - k]\}/(2\lambda\nu). \end{aligned} \quad (48)$$

Побудовану за формулою (48) залежність \bar{r} від заряду для основного стану при $\alpha_S = 0, 1, 2$ зображено на рис. 3. З рисунка видно, що зі збільшенням заряду ефективний розмір системи зменшується і на межі нижнього енергетичного континууму, $E = -m_0c^2$, залишається скінченним. Дійсно, при $E \rightarrow -m_0c^2$ вираз (48) дає значення середнього радіуса на межі нижнього континууму:

$$\bar{r} = \frac{4\theta^2 + 1}{10(\alpha_V - \alpha_S)} \frac{3\alpha_V - 2\alpha_S + \tau(3 - 2k)}{2(2\alpha_V - \alpha_S) + \tau(1 - 2k)}, \quad (49)$$

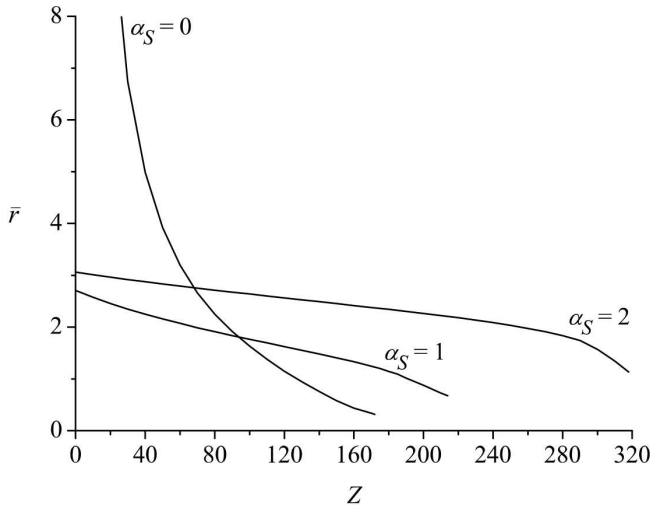


Рис. 3. Середній радіус основного стану як функція заряду ядра Z при $\alpha_S = 0, 1, 2$

де $\tau = (1 - k)/(\alpha_V - \alpha_S)$. Для основного стану при $\alpha_S = 0, 1, 2$ відповідно маємо $\bar{r} = 0,3240, 67; 1, 12$, тобто, як вже відмічалось вище, зв'язаний стан не де-локалізується.

ДОДАТОК

Для того щоб знайти сталу нормування C_1 для радіальних хвильових функцій F та G (див. розділ 2), а також середній радіус системи \bar{r} (див. розділ 4), необхідно обчислити інтеграл

$$I_\mu = \int_0^\infty (F^2 + G^2)r^\mu dr, \quad \mu = 0, 1. \tag{Д1}$$

Оскільки радіус ядра $r_N \ll \lambda_c$ і область $0 \leq r \leq r_N$ дає малий внесок в інтеграл (Д1), вважатимемо, що радіальні хвильові функції F і G мають вигляд (5), (21) у всій області інтегрування $0 \leq r < \infty$. Тоді рівність (Д1) набуває вигляду

$$I_\mu = \frac{2m_0 c^2}{(2\lambda)^\mu + 1} [X_\mu(\chi_1, \chi_1) + C^2 X_\mu(\chi_2, \chi_2) + 2\epsilon C X_\mu(\chi_1, \chi_2)], \tag{Д2}$$

$$X_\mu(a, b) = \int_0^\infty \Psi(a, 2\gamma + 1; \rho) \Psi(b, 2\gamma + 1; \rho) \rho^{2\gamma + \mu} e^{-\rho} d\rho. \tag{Д3}$$

де $\epsilon = E/(m_0 c^2)$, $C = k + N$.

Для обчислення інтеграла (Д3) замінимо кожен з гіпергеометричних функцій інтегральним представленням [27]

$$\Psi(a, c; \rho) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-\rho t} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt.$$

Тоді інтегрування за ρ зводиться до обчислення такого інтеграла:

$$\int_0^\infty \rho^{2\gamma + \mu} e^{-\rho(t+t'+1)} d\rho = \frac{\Gamma(\zeta)}{(t+t'+1)^\zeta}, \tag{Д4}$$

де t і t' - змінні інтегрування, $\zeta = 2\gamma + \mu + 1$. Враховуючи (Д4), інтегрування за t дасть гіпергеометрію ${}_2F_1(\zeta, a; a + \mu + 1; t'/(t'+1))$. Розкладаючи її в ряд та інтегруючи почленно, отримуємо гіпергеометричну функцію вищого порядку з ${}_3F_2$:

$$X_\mu(a, b) = \frac{(\mu!)^2 \Gamma(\zeta) {}_3F_2(a, b, \zeta; a + \mu + 1, b + \mu + 1; 1)}{\Gamma(a + \mu + 1) \Gamma(b + \mu + 1)}. \tag{Д5}$$

Для частинних випадків $\mu = 0, 1$ і $a, b = \chi_{1,2}$ формула (Д5) допускає деякі спрощення, а саме:

$$X_0(\chi_1, \chi_1) = \frac{\Gamma(1 + 2\gamma) \Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(\chi_1) \Gamma(\chi_1 - 2\gamma)} [\psi(\chi_1 - 2\gamma) - \psi(\chi_1)], \tag{Д6}$$

$$X_0(\chi_1, \chi_2) = \frac{\Gamma(1 + 2\gamma) \Gamma(1 - 2\gamma)}{\Gamma(\chi_2) \Gamma(\chi_2 - 2\gamma)}, \tag{Д7}$$

$$X_1(\chi_1, \chi_1) = \frac{\Gamma(1 + 2\gamma) \Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(\chi_1) \Gamma(\chi_1 - 2\gamma)} \{ (2\gamma - 2\chi_1 + 1) \times [\psi(\chi_1 - 2\gamma) - \psi(\chi_1)] - 4\gamma \}, \tag{Д8}$$

$$X_1(\chi_1, \chi_2) = \frac{\Gamma(1 + 2\gamma) \Gamma(-2\gamma)}{\Gamma(\chi_2) \Gamma(\chi_2 - 2\gamma)} \{ -\gamma(2\gamma - 2\chi_1 + 1) + \chi_1(\chi_1 - 2\gamma) [\psi(\chi_2 - 2\gamma) - \psi(\chi_2)] \}, \tag{Д9}$$

де $\psi(x)$ - дигамма-функція. $X_\mu(\chi_2, \chi_2)$ отримується з $X_\mu(\chi_1, \chi_1)$ заміною $\chi_1 \rightarrow \chi_2$.

1. H.G. Dosch, J.H.D. Jensen, and V.F. Müller, *Physical Norweica*. **5**, 2 (1971).
2. G. Soff, B. Müller, J. Rafelski, W. Greiner, *Z. Naturforsch. Teil. A*. **28**, 1389 (1978).
3. W. Greiner, B. Müller, J. Rafelski, *Quantum Electrodynamics of Strong Fields* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1985).
4. W. Greiner, *Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1990).
5. A. Faessler, Th. Gutsche, M.A. Ivanov, V.E. Lyubovitskij, P. Wang, *Phys. Rev. D*. **68**, 1 (2003).
6. E791 Collaboration E.M. Aitala et al., *Phys. Rev. Lett.* **86**, 770 (2001).
7. Ning Wu, hep-ex/0104050.
8. N.A. Tornqvist, hep-ph/0008135; F.E. Close, N.A. Tornqvist, *J. Phys. G*. **34**, 249 (2002).
9. A.N. Vaidya, L.E.S. Souza, hep-th/0203133.
10. A. Leviatan, nucl-th/0312018.
11. V.D. Mur, V.S. Popov, Yu.A. Simonov, V.P. Yurov, *ЖЭТФ*. **105**, 3 (1994).
12. Ю.А. Симонов, *ЯФ*. **60**, 2252 (1997).
13. V.V. Rubish, V.Yu. Lazur, O.K. Reity, S. Chalupka, and M. Salak, *Czech. J. Phys.* **54**, 897 (2004); В.Ю. Лазур, А.К. Рейтій, В.В. Рубиш, *ТМФ*. **143**, 83 (2005).
14. Ю.А. Симонов, *УФН*. **166**, 338 (2002); S.W. Otto, J.D. Stack, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2328 (1984).
15. В.С. Попов, *ЯФ*. **64**, 421 (2001).

16. D.G. Caldi, A. Chodos, Phys. Rev. D. **36**, P. 2876 (1987).
17. В.С. Попов, А.Е. Кудрявцев, В.И. Лисин, В.Д. Мур, ЖЭТФ. **80**, 1272 (1981).
18. Я.Б. Зельдович, ФТТ. **1**, 1637 (1959).
19. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский, *Квантовая электродинамика* (Наука, Москва, 1989).
20. I. Pomernanchuk, Ya. Smorodinsky, J. Phys. USSR. **9**, 97 (1945).
21. А.И. Базь, Я.Б. Зельдович, А.М. Переломов, *Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике* (Наука, Москва, 1971).
22. К.М. Case, Phys. Rev. **80**, 797 (1950).
23. А.М. Переломов, В.С. Попов, ТМФ. **4**, 48 (1970).
24. С.С. Герштейн, Я.Б. Зельдович, ЖЭТФ. **57**, 654 (1969); Nuovo Sim. Lett. **1**, 835 (1969).
25. В.С. Попов, Пис. ЖЭТФ. **11**, 254 (1970); ЖЭТФ. **60**, 1228 (1971); ЯФ. **12**, 429 (1970).
26. Я.Б. Зельдович, В.С. Попов, УФН. **105**, 403 (1971).
27. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции: Пер. с англ. В 2-т.* (т. 1, Наука, Москва, 1973; т. 2, Наука, Москва, 1974).

Одержано 27.11.06

КРИТИЧЕСКИЙ ЗАРЯД В МОДИФИЦИРОВАННОЙ
КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

В.Ю. Лазур, А.К. Рейтуй, В.В. Бондарчук, В.К. Рейтуй

Резюме

Для одной простой модели протяжённого источника (ядра) получены точные нормированные решения уравнения Дирака со

скалярно-векторным потенциалом кулоновского типа, а также трансцендентное уравнение, определяющее уровни основного и возбужденных электронных состояний в докритической области $Z < Z_{cr}$. Найдены уравнения для величины критического заряда ядра, при котором уровень опускается в нижний энергетический континуум. В рамках логарифмического приближения получены явные аналитические выражения для энергии дискретных уровней и критического заряда. Выявлено сильное влияние лоренцевой структуры потенциалов взаимодействия на критический заряд и дискретный спектр фермиона в скалярном и векторном кулоноподобных полях.

CRITICAL CHARGE IN MODIFIED QUANTUM
ELECTRODYNAMICS

V.Yu. Lazur, O.K. Reity, V.V. Bondarchuk, V.K. Reity

Uzhgorod National University
(54, Voloshin Str., Uzhgorod 88000, Ukraine;
e-mail: lazur@univ.uzhgorod.ua, reiti@univ.uzhgorod.ua)

Summary

For a simple model of extended source (a nucleus), we have got the exact normed solutions of the Dirac equation with a scalar-vector potential of the Coulomb type and a transcendental equation which determines the levels of the ground and excited electron states in the subcritical region $Z < Z_{cr}$. We have constructed the equation for the critical charge of a nucleus, at which the level descends into the lower energy continuum. A strong influence of the Lorentz structure of interaction potentials on the critical charge and the discrete spectrum of a fermion in scalar and vector Coulomb-like fields is revealed.