

© 2009 г. В. Ю. Лазур*, С. И. Мигалина*, А. К. Рейтий*

К КВАНТОВО-ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЕ ДВУХ ЭЛЕКТРОНОВ

Решена задача о взаимодействии двух квазимолекулярных электронов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга – около разных атомов (ядер). Взаимодействие рассматривается как эффект второго порядка квантово-электродинамической теории возмущений в координатном представлении. Последовательный учет естественного условия симметричности фактора запаздывания, электронных спинов и эффектов запаздывания релятивистского взаимодействия двух квазимолекулярных электронов, локализованных около разных ядер, приводит к появлению в выражении для оператора межэлектронного взаимодействия дополнительных членов по сравнению со стандартным оператором Брейта.

Ключевые слова: межэлектронное взаимодействие, эффекты запаздывания, оператор Брейта, квантовая электродинамика, квазимолекулярные электроны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Почти все двухэлектронные процессы с перераспределением (двухэлектронная перезарядка, перезарядка с одновременным возбуждением или ионизацией и т.д.), сопровождающие неупругие столкновения многозарядных ионов с атомами, неизбежно связаны с коррелированными переходами электронов из поля одного атомного остатка (или голого ядра) в поле другого. Основной вклад в вероятность таких переходов вносит конфигурация, в которой два активных электрона атома-мишени расходятся по разным ядрам, и в качестве нулевого справедливо приближение независимых электронов (см., например, обзор [1] и цитируемую там литературу). При низких энергиях столкновения квазирезонансные процессы с перераспределением характеризуются сечениями, большими по сравнению с атомным поперечником, и в значительной степени определяются переходами при больших межъядерных расстояниях R , что позволяет построить логически замкнутую асимптотическую теорию таких процессов (см. книгу [2]; в качестве примеров более позднего развития этого направления можно рекомендовать обзоры [1], [3], [4]). Распространение асимптотической теории процессов с перераспределением на область релятивистских энергий связи приводит к необходимости последовательного учета корреляций

*Ужгородский национальный университет, Ужгород, Украина.
E-mail: lazur@univ.uzhgorod.ua

двух разведенных по разным ядрам электронов, находящихся на далеких расстояниях друг от друга по сравнению с характерными длинами волн λ_0 в спектре взаимодействующих атомов. Именно эта далекая область межэлектронных расстояний $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, \vec{r}_1, \vec{r}_2 – радиус-векторы электронов, определяет вероятности двухэлектронных процессов с перераспределением в асимптотическом пределе $r_{12} \sim R \rightarrow \infty$; область $r_{12} \sim R > \lambda_0$ мы будем называть в дальнейшем областью далеких электронных корреляций.

Анализ автоионизационных состояний тяжелых многозарядных квазимолекул с двумя возбужденными электронами показывает [4], [5], что основной корреляционный эффект отвечает конфигурациям, в которых электроны находятся далеко друг от друга – около разных атомов. При изучении спектроскопии автоионизационных состояний таких квазимолекул реалистические вычисления должны основываться на полностью релятивистской теории. По сравнению с автоионизационными состояниями атомных систем в этом случае на передний план выступают иные физические аспекты, требующие детального изучения весьма общих вопросов о роли магнитных взаимодействий и эффектов запаздывания в процессах оже-ионизации атомов медленными высокозарядными ионами.

Однако уже сама формулировка двухчастичной задачи в рамках релятивистской квантовой теории сталкивается с принципиальными трудностями математического и логического характера. С известными оговорками можно сказать, что по сей день не существует удовлетворительной релятивистской теории двухчастичных систем. Непосредственное обобщение уравнения Дирака на случай двухэлектронной системы невозможно из-за отсутствия локального лоренц-инвариантного оператора, учитывающего релятивистский характер межэлектронного взаимодействия (эффекты запаздывания).

Не входя в более детальное обсуждение слабо исследованных проблем релятивистских двухчастичных взаимодействий, отметим лишь, что полный релятивистский гамильтониан системы можно было бы представить в виде разложения в ряд по степеням α^2 (где α – постоянная тонкой структуры). Еще в 1929 г. Брейт показал [6], что такое разложение до первого члена является хорошим приближением к релятивистскому взаимодействию между двумя электронами при условии малости эффектов запаздывания в спектре гелиеподобного атома. Полученный Брейтом релятивистский оператор межэлектронного взаимодействия имеет следующий вид [6], [7]:

$$V(\vec{r}_{12}) = V_C(r_{12}) + V_B(\vec{r}_{12}) = \frac{e^2}{r_{12}} - \frac{e^2}{2r_{12}} \left[\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 + \frac{(\vec{\alpha}_1 \vec{r}_{12})(\vec{\alpha}_2 \vec{r}_{12})}{r_{12}^2} \right]. \quad (1)$$

Здесь $\vec{\alpha}_1$ и $\vec{\alpha}_2$ – два коммутирующих набора матриц Дирака, $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, а нижние индексы 1 и 2 различают величины, относящиеся к первому и второму электрону соответственно. Первый член в (1) описывает электростатическое взаимодействие электронов, а оставшаяся брейтовская часть $V_B(\vec{r}_{12})$ учитывает магнитные спин-спиновые взаимодействия и поправки на запаздывание, связанные с конечностью скорости распространения взаимодействия. Пользуясь терминологией, принятой в квантовой электродинамике, можно сказать, что запаздывающее взаимодействие вызвано обменом между электронами поперечными виртуальными фотонами,

в то время как кулоновское взаимодействие обусловлено обменом “продольными” и “скалярными” фотонами [7].

Нужно, однако, помнить, что оператор Брейта (1) является хорошим приближением для описания запаздывающего взаимодействия лишь до тех пор, пока расстояние r_{12} между электронами остается малым по сравнению с $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$, где ω_0 – характерная частота в спектре взаимодействующих электронов. Этим приближением нельзя пользоваться в связанных с медленными атомными столкновениями двух-электронных задачах, так как в этом случае, наоборот, существенны большие межэлектронные расстояния r_{12} . Поэтому проблема двух электронов, принадлежащих двум нейтральным атомам, находящимся на произвольном расстоянии друг от друга, привлекла к себе новую волну интереса в начале 70-х годов в связи с интенсивным исследованием многоатомных систем в поле излучения. Решающий шаг в этом направлении был сделан в работах [8]–[10], где методами квантовой электродинамики задача о взаимодействии двух электронов, принадлежащих двум водородоподобным атомам, изучалась в общей постановке, не связанной с какими-либо ограничениями на межатомные расстояния. В результате в работах [9], [10] был получен обобщенный оператор Брейта взаимодействия двух электронов посредством поля виртуальных фотонов как эффект второго порядка квантово-электродинамической теории возмущений. Однако в цитированных работах не проведен последовательно учет релятивистских эффектов. Конкретно это проявляется в отсутствии в построенном в работе [10] операторе взаимодействия симметрии в описании пары взаимодействующих частиц. Для полного учета эффектов запаздывания во взаимодействии электронов необходимо еще обеспечить выполнение естественного условия симметричности “фактора запаздывания” по отношению к взаимодействующим частицам. В настоящей работе показано, что это приводит к возникновению нового (“запаздывающего”) члена в релятивистском операторе взаимодействия двух электронов по сравнению с соответствующим оператором из работы [10].

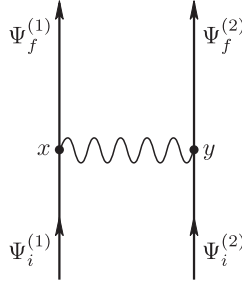
Наши исследования основаны на работах Гадомского с сотрудниками [10], [11], которые в течение последних трех десятилетий провели обширные исследования проблемы двух взаимодействующих электронов в рамках эффектов третьего порядка квантовой электродинамики, включающих процесс излучения (или поглощения) реального фотона. Значение этого подхода для общей постановки и решения ряда принципиальных проблем классической, нелинейной и квантовой оптики все более возрастает. В частности, он предоставляет способ описания поляризующих полей в системе двух водородоподобных атомов, в терминах которых удалось построить нелокальные уравнения распространения фотонов и электромагнитных волн в различных средах в зависимости от типов квантовых переходов и промежуточных состояний в спектре взаимодействующих атомов. Определенное завершение этот круг вопросов нашел в обзоре [12].

Настоящая статья построена следующим образом. В разделе 2 приведена постановка задачи о взаимодействии двух квазимолекулярных электронов посредством поля виртуальных фотонов на основе эффектов второго порядка квантовой электродинамики. В разделе 3 получен релятивистский оператор взаимодействия двух электронов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга. Последовательный учет естественного условия симметричности фактора запаздывания по

отношению к взаимодействующим частицам вносит дополнительный вклад в релятивистский оператор взаимодействия двух электронов (32) по сравнению с обобщенным оператором Брейта из работы [10] (см. формулу (33)).

2. ЭФФЕКТИВНАЯ ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДВУХ КВАЗИМОЛЕКУЛЯРНЫХ ЭЛЕКТРОНОВ, НАХОДЯЩИХСЯ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ РАССТОЯНИИ ДРУГ ОТ ДРУГА

Взаимодействие двух электронов во внешнем электростатическом поле будем рассматривать как эффект второго порядка квантовой электродинамики с диаграммой



Фейнмана, изображенной на рисунке. Соответствующий матричный элемент оператора рассеяния второго порядка $S^{(2)}$ может быть представлен в виде [13], [14]

$$S_{i \rightarrow f}^{(2)} \equiv \langle f | S^{(2)} | i \rangle = -i \int d^4x \int d^4y j_{fi}^{(2)\mu}(y) D_F(y-x) j_{fi}^{(1)}(x), \quad (2)$$

где D_F – функция распространения фотона (пропагатор), а плотности токов перехода $j_{fi}^{(1)}(x)$ и $j_{fi}^{(2)\mu}(y)$ даются равенствами

$$j_{fi}^{(1)}(x) = e \bar{\Psi}_f^{(1)}(x) \gamma_\mu^{(1)} \Psi_i^{(1)}(x), \quad j_{fi}^{(2)\mu}(y) = e \bar{\Psi}_f^{(2)}(y) \gamma^{(2)\mu} \Psi_i^{(2)}(y). \quad (3)$$

Здесь $e = -|e|$ – заряд электрона; γ^μ – ковариантная запись матриц Дирака, $\mu = 0, 1, 2, 3$; $\Psi_i^{(n)}$ и $\Psi_f^{(n)}$ – волновые функции начального и конечного состояний n -го электрона, $n = 1, 2$, причем $\bar{\Psi}_f^{(n)} = \Psi_f^{(n)+} \gamma^0$ – дираковски-сопряженный биспинор, а $\Psi_f^{(n)+}$ – эрмитово-сопряженный биспинор. Везде, где это не оговорено особо, используются релятивистские единицы $\hbar = c = 1$ и обозначения $x^\mu = (t_1, \vec{r}_1)$, $y^\mu = (t_2, \vec{r}_2)$ для 4-радиус-векторов и $d^4x = d^3x dt_1$, $d^4y = d^3y dt_2$ для элементов 4-объема. Индексы (1) и (2) служат для обозначения величин, относящихся к двум различным электронам. Индексы i и f характеризуют начальное и конечное состояния взаимодействующих электронов. В выражениях (2) и (3) используется представление для матриц Дирака

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

в котором матрица $\gamma^0 = \beta$ диагональна и выполняются соотношения $\gamma^j = \beta \alpha_j$, $j = 1, 2, 3$; $\vec{\sigma}$ – известные матрицы Паули, I – единичная матрица размера 2×2 .

Внешним электронным линиям диаграммы соответствуют волновые функции стационарных состояний

$$\Psi_{i,f}^{(1)}(x) = \Psi_{i,f}^{(1)}(\vec{r}_1)e^{-iE_{i,f}^{(1)}t_1}, \quad \Psi_{i,f}^{(2)}(y) = \Psi_{i,f}^{(2)}(\vec{r}_2)e^{-iE_{i,f}^{(2)}t_2}. \quad (4)$$

Величины $E_i^{(1)}$ ($E_f^{(1)}$) и $E_i^{(2)}$ ($E_f^{(2)}$) являются начальными (конечными) энергиями первого и второго электронов соответственно. Принимая во внимание формулы (4), выделим явную зависимость токов перехода от времени:

$$j_{fi\mu}^{(1)}(x) = j_{fi\mu}^{(1)}(\vec{r}_1)e^{i\omega_{fi}^{(1)}t_1}, \quad j_{fi}^{(2)\mu}(x) = j_{fi}^{(2)\mu}(\vec{r}_2)e^{i\omega_{fi}^{(2)}t_2}, \quad (5)$$

при этом частота перехода $\omega_{fi}^{(n)} = E_f^{(n)} - E_i^{(n)}$, $n = 1, 2$.

Внутренней фотонной линии диаграммы в фейнмановской калибровке сопоставляется пропагатор

$$D_F(y-x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{-4\pi e^{-ik(y-x)}}{k^2 + i\varepsilon} \right). \quad (6)$$

Здесь $k = (\omega, \vec{k})$, \vec{k} и ω – волновой вектор и частота кванта, а бесконечно малая мнимая добавка в знаменателе фиксирует правила обхода полюсов в комплексной плоскости. Подставляя (5) и (6) в формулу (2), получим следующее представление для S -матрицы:

$$S_{i \rightarrow f}^{(2)} = -i \int d^4x \int d^4y \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} j_{fi}^{(2)\mu}(\vec{r}_2)e^{i\omega_{fi}^{(2)}t_2} \left(\frac{-4\pi e^{-ik(y-x)}}{k^2 + i\varepsilon} \right) j_{fi\mu}^{(1)}(\vec{r}_1)e^{i\omega_{fi}^{(1)}t_1}. \quad (7)$$

После интегрирования по времени t_2 формула (7) приобретает вид

$$S_{i \rightarrow f}^{(2)} = 4\pi i \int d^3x \int d^3y \int dt_1 \int d\omega \delta(\omega - \omega_{fi}^{(2)}) e^{i(\omega_{fi}^{(1)} + \omega)t_1} \times \\ \times j_{fi}^{(2)\mu}(\vec{r}_2) j_{fi\mu}^{(1)}(\vec{r}_1) \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\vec{k}\vec{r}_{12}}}{\omega^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon}. \quad (8)$$

Произведя здесь интегрирование по d^3k (с учетом правила обхода полюсов, расположенных в точках $k = \pm(\omega + i\varepsilon' \operatorname{sgn} \omega)$), получим представление

$$S_{i \rightarrow f}^{(2)} = -i \int d^3x \int d^3y \int dt_1 \int d\omega \delta(\omega - \omega_{fi}^{(2)}) \times \\ \times e^{i(\omega_{fi}^{(1)} + \omega)t_1} j_{fi}^{(2)\mu}(\vec{r}_2) \frac{e^{i|\omega|r_{12}}}{r_{12}} j_{fi\mu}^{(1)}(\vec{r}_1). \quad (9)$$

После интегрирования по времени t_1 и частотам виртуальных фотонов ω последнее выражение принимает вид

$$S_{i \rightarrow f}^{(2)} = -2\pi i \delta(\omega_{fi}^{(1)} + \omega_{fi}^{(2)}) \int d^3x \int d^3y j_{fi}^{(2)\mu}(\vec{r}_2) \frac{e^{i|\omega_{fi}^{(2)}|r_{12}}}{r_{12}} j_{fi\mu}^{(1)}(\vec{r}_1). \quad (10)$$

Перейдем теперь от матрицы рассеяния $S_{i \rightarrow f}^{(2)}$ к матрице $U_{i \rightarrow f}^{(2)}$ эффективной энергии взаимодействия системы двух зарядов, определяемой следующим равенством:

$$S_{i \rightarrow f}^{(2)} = -2\pi i U_{i \rightarrow f}^{(2)} \delta(E_f^{(1)} - E_i^{(1)} + E_f^{(2)} - E_i^{(2)}). \quad (11)$$

Выделение в виде множителя одномерной δ -функции от разности между суммарными энергиями двух электронов в начальном и конечном состояниях учитывает закон сохранения энергии

$$E_f^{(1)} + E_f^{(2)} = E_i^{(1)} + E_i^{(2)}, \quad (12)$$

который представляет собой проявление симметрии относительно непрерывной операции сдвига времени. В силу закона сохранения (12) примем соглашение записывать $|\omega_{fi}^{(1)}|$ и $|\omega_{fi}^{(2)}|$ в упрощенном виде $|\omega_{fi}|$ (подразумеваем, что $|\omega_{fi}| = |\omega_{fi}^{(1)}| = |\omega_{fi}^{(2)}|$). Тогда согласно (10) и (11) матрица эффективной энергии взаимодействия двух электронов дается выражением

$$U_{i \rightarrow f}^{(2)} = \int d^3x \int d^3y j_{fi}^{(2)\mu}(\vec{r}_2) \frac{e^{i|\omega_{fi}|r_{12}}}{r_{12}} j_{fi\mu}^{(1)}(\vec{r}_1). \quad (13)$$

Все приведенные в этом разделе формулы даны применительно к матричному элементу (2). Чтобы получить полное выражение для $S_{i \rightarrow f}^{(2)}$, необходимо к матричному элементу (2) добавить соответствующий обменный матричный элемент, отражающий неразличимость электронов.

3. ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР БРЕЙТА ДАЛЬНОДЕЙСТВУЮЩЕГО ТИПА

С помощью определений (3)–(5) выразим в формуле (13) для матричного элемента эффективной энергии взаимодействия токи перехода через волновые функции:

$$U_{i \rightarrow f}^{(2)} = e^2 \int d^3x \int d^3y \Psi_f^{(2)+}(\vec{r}_2) \Psi_f^{(1)+}(\vec{r}_1) \frac{1 - \vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2}{r_{12}} e^{i|\omega_{fi}|r_{12}} \Psi_i^{(2)}(\vec{r}_2) \Psi_i^{(1)}(\vec{r}_1), \quad (14)$$

где $\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2$ – матрицы Дирака, действующие на различные одноэлектронные волновые функции: $\vec{\alpha}_1$ действует на $\Psi_i^{(1)}(\vec{r}_1)$, а $\vec{\alpha}_2$ – на $\Psi_i^{(2)}(\vec{r}_2)$. Наличие в этом выражении “фактора запаздывания” $e^{i|\omega_{fi}|r_{12}}$, зависящего явно от начальной и конечной энергии системы, не позволяет в общем случае ввести гамильтониан взаимодействия двух электронов, т.е. оператор V , для которого выполнялось бы соотношение

$$U_{i \rightarrow f}^{(2)} = \langle f | V | i \rangle = \int d^3x \int d^3y \Psi_f^{(2)+}(\vec{r}_2) \Psi_f^{(1)+}(\vec{r}_1) V \Psi_i^{(2)}(\vec{r}_2) \Psi_i^{(1)}(\vec{r}_1); \quad (15)$$

здесь подразумевается, что оператор эффективной потенциальной энергии V представляет собой 16-компонентную матрицу по спинорным индексам.

Однако в приближении малых скоростей ($v/c \ll 1$, где v – скорость электронов в атоме, c – скорость света в вакууме) такой оператор можно построить. Действительно, для атомных электронов в наших единицах $|\omega_{fi}| \sim m(\alpha Z_{\text{эф}})^2$, где $Z_{\text{эф}}$ – эффективный заряд ядра, действие которого на данный электрон эквивалентно действию ядра, экранированного всеми остальными электронами атома. Учтем, что

характерное значение межэлектронного расстояния в атоме $r_{12} \sim (m\alpha Z_{\text{eff}})^{-1}$. Следовательно, показатель $|\omega_{fi}|r_{12}$ экспоненты, входящей в (14), оценивается величиной порядка αZ_{eff} . Фактически для всех атомных электронов, в том числе и внутренних, отношение v/c , имея порядок величины αZ_{eff} , заметно меньше единицы, поэтому можно ограничиться приближенным учетом запаздывания и всех других релятивистских эффектов, отбрасывая в разложении матричного элемента (14) по степеням v/c члены порядка v^3/c^3 и выше. Это приближение приводит к известному выражению (1) для оператора Брейта [6], [7], который зависит не только от относительного положения $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ пары электронов, но и от их спинов. Теперь мы можем утверждать, что это выражение является хорошим приближением для описания релятивистского взаимодействия электронов лишь во внутриатомной области, но становится неприменимым в области достаточно больших межэлектронных расстояний ($r_{12} \gtrsim \lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$). В этой, как мы ее назвали, области далеких электронных корреляций эффекты запаздывания во взаимодействии электронов существенно усиливаются.

Рассмотрим теперь двухэлектронный атом (или ион) $A^{(Z_a-2)+}$, на произвольном расстоянии R от которого находится голое ядро B^{Z_b+} с незаполненными оболочками. Здесь через Z_a, Z_b обозначены заряды атомных ядер A^{Z_a+} и B^{Z_b+} , которые в используемой двухцентровой модели мы считаем неподвижными. Пусть \vec{r}_{na} и \vec{r}_{nb} – радиус-векторы n -го электрона относительно ядер A^{Z_a+} и B^{Z_b+} соответственно, $n = 1, 2$. Теперь представим себе, что один из электронов атома $A^{(Z_a-2)+}$, скажем первый электрон, туннелирует в непосредственную окрестность чужого ядра B^{Z_b+} , а второй остается около своего ядра A^{Z_a+} . Если области пространственной локализации электронов около разных ядер (первого электрона – вблизи B^{Z_b+} , а второго – вблизи A^{Z_a+}) достаточно малы (порядка атомных размеров) и достаточно отдалены друг от друга, то при выполнении условия $\Delta r < R < \infty$ расстояние r_{12} между разведенными к разным ядрам электронами может быть разложено в ряд по степеням отношения $\Delta r/R$:

$$r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = R \left(1 + \frac{\vec{R}\Delta\vec{r}}{R^2} + \frac{M_1}{R} \right). \tag{16}$$

Здесь $\Delta\vec{r} = \vec{r}_{1b} - \vec{r}_{2a}$, $\Delta r = |\Delta\vec{r}|$, \vec{r}_{1b} и \vec{r}_{2a} – радиус-векторы первого и второго электронов относительно соответствующих ядер, а $M_1 = M_1(\Delta\vec{r}, \vec{R})$ – малые поправки, включающие в себя более высокие степени отношения $\Delta r/R$.

Выделим в матрице эффективной энергии взаимодействия (14) множитель

$$K(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega_{fi}) = \frac{e^{i|\omega_{fi}|r_{12}/c}}{r_{12}}, \tag{17}$$

отвечающий за обмен виртуальными фотонами между двумя электронами. Здесь и ниже используется система единиц, в которой $c \neq 1$. В предыдущих работах [6], [7] при построении разложения фактора запаздывания предполагалось, что единственным малым параметром является величина $\omega_0 r_{12}/c \ll 1$ (или же формально $1/c$). Полученное таким образом разложение фактора $K(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega_{fi})$ пригодно, очевидно, лишь до тех пор, пока межэлектронное расстояние r_{12} остается малым по сравнению с характерными длинами волн $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ в спектре взаимодействующих электронов. Далее асимптотическое разложение K -фактора строится для случая, когда

в качестве естественных малых параметров выступают одновременно $1/c$ и $\Delta r/R$. Такое выделение малых параметров соответствует пределу разъединенных атомов ($R \rightarrow \infty$) [1]–[3] и в рамках используемой двухцентрковой модели реализуется, например, когда электроны находятся далеко друг от друга – около разных атомов (ядер).

Так же, как это было сделано в работе [10], преобразуем фактор запаздывания в (17) к виду

$$K(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega_{fi}) = e^{i|\omega_{fi}|R/c} \frac{e^{i|\omega_{fi}|(r_{12}-R)/c}}{r_{12}}. \quad (18)$$

Для электронов, разведенных к разным ядрам, проведенное преобразование удобно тем, что выделяет релятивистский фактор $e^{i|\omega_{fi}|R/c}$ усиления эффектов запаздывания взаимодействия заряженных частиц на далеких расстояниях друг от друга ($r_{12} \sim R \gtrsim \lambda_0$). Наличие разности $r_{12} - R$ относительных расстояний между электронами r_{12} и ядрами R в показателе одной из быстро осциллирующих экспонент, входящих в состав фактора запаздывания (18), указывает на то, что разложение величины $K(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega_{fi})$ должно вестись теперь не только по степеням $1/c$, но также и по степеням малого параметра $\Delta r/R$. Впредь мы будем полагать, что

$$\frac{|\omega_{fi}|}{c} \frac{\Delta r}{R} \ll 1. \quad (19)$$

При выполнении данного условия показатель $|\omega_{fi}|(r_{12}-R)/c$ экспоненты в правой части (18) – малая величина, так что можно разложить K -фактор в ряд по малому параметру (19) и ограничиться первыми тремя членами разложения:

$$K(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega_{fi}) = e^{i|\omega_{fi}|R/c} \left\{ f_0(r_{12}) + \frac{i}{c} |\omega_{fi}| f_1(r_{12}) - \frac{\omega_{fi}^2}{2c^2} f_2(r_{12}) \right\}. \quad (20)$$

Коэффициенты

$$\begin{aligned} f_0(r_{12}) &= \frac{1}{g_0(r_{12})} = \frac{1}{r_{12}}, \\ f_1(r_{12}) &= \frac{g_1(r_{12})}{g_0(r_{12})} = \frac{r_{12} - R}{r_{12}}, \\ f_2(r_{12}) &= \frac{g_2(r_{12})}{g_0(r_{12})} = \frac{(r_{12} - R)^2}{r_{12}} \end{aligned} \quad (21)$$

разложения (20) в свою очередь являются степенными рядами по $\Delta r/R$, которые выписываются сразу же с помощью асимптотических представлений функций g_0 , g_1 , g_2 при малых значениях параметра $\Delta r/R$:

$$\begin{aligned} g_0(\Delta \vec{r}, \vec{R}) &= R \left[1 + \frac{\vec{R} \vec{\Delta r}}{R^2} + \frac{M_1}{R} \right], \\ g_1(\Delta \vec{r}, \vec{R}) &= \frac{\vec{R} \vec{\Delta r}}{R} + M_1, \quad g_2(\Delta \vec{r}, \vec{R}) = \left[\frac{\vec{R} \vec{\Delta r}}{R} + M_1 \right]^2. \end{aligned}$$

Полученное разложение (20) является справедливым во всей практически интересной области изменения межъядерного расстояния $\Delta r \leq R < \infty$.

Исключим из выражения (20) частоты, используя уравнения Дирака

$$\widehat{H}^{(n)}(\vec{r}_n)\Psi_i^{(n)}(\vec{r}_n) = E_i^{(n)}\Psi_i^{(n)}(\vec{r}_n), \quad \widehat{H}^{(n)}(\vec{r}_n)\Psi_f^{(n)}(\vec{r}_n) = E_f^{(n)}\Psi_f^{(n)}(\vec{r}_n). \quad (22)$$

Здесь индекс n принимает значения 1, 2, а одноэлектронный релятивистский гамильтониан $\widehat{H}^{(n)}(\vec{r}_n)$ действует в пространстве дираковских волновых функций $\Psi_{i,f}^{(n)}(\vec{r}_n)$ электрона с номером n .

В приведенной форме (20) разложение K -фактора никак не выявляет симметрию по отношению к взаимодействующим частицам. Для придания двум последним членам разложения (20) требуемой симметричности мы воспользуемся соотношением $\omega_{fi}^{(1)} = -\omega_{fi}^{(2)}$, которое выражает закон сохранения энергии (12). При этом в соответствии с двумя возможностями $E_f^{(1)} > E_i^{(1)}$ или $E_f^{(1)} < E_i^{(1)}$ справедливо, приходится рассматривать по отдельности два случая: $\omega_{fi}^{(1)} > 0$ и $\omega_{fi}^{(1)} < 0$. Пусть $E_f^{(1)} > E_i^{(1)}$ ($E_f^{(1)} < E_i^{(1)}$), тогда $\omega_{fi}^{(1)} = -\omega_{fi}^{(2)} > 0$ ($\omega_{fi}^{(1)} = -\omega_{fi}^{(2)} < 0$) и $|\omega_{fi}^{(1)}| = \omega_{fi}^{(1)}$ ($|\omega_{fi}^{(1)}| = -\omega_{fi}^{(1)}$). Воспользовавшись этими соотношениями, можно преобразовать второй член в (20) к симметричному виду:

$$|\omega_{fi}|f_1(r_{12}) = |\omega_{fi}^{(1)}|f_1(r_{12}) = \pm\omega_{fi}^{(1)}f_1(r_{12}) = \pm\frac{1}{2}[E_f^{(1)} - E_i^{(1)} + E_i^{(2)} - E_f^{(2)}]f_1(r_{12}). \quad (23)$$

Знак плюс в (23) соответствует случаю $E_f^{(1)} > E_i^{(1)}$ ($\omega_{fi}^{(1)} > 0$), а знак минус – случаю $E_f^{(1)} < E_i^{(1)}$ ($\omega_{fi}^{(1)} < 0$). При симметризации величины $|\omega_{fi}|f_1$ мы могли бы с равным успехом исходить из равенства $|\omega_{fi}|f_1 = |\omega_{fi}^{(2)}|f_1$ вместо $|\omega_{fi}|f_1 = |\omega_{fi}^{(1)}|f_1$. Легко убедиться, что полученное таким образом представление для $|\omega_{fi}|f_1$ эквивалентно описанному выше представлению (23). Имея в виду, что выражение (20) умножается справа на $\Psi_i^{(2)}(\vec{r}_2)\Psi_i^{(1)}(\vec{r}_1)$, а слева – на $\Psi_f^{(2)+}(\vec{r}_2)\Psi_f^{(1)+}(\vec{r}_1)$ и интегрируется по \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , мы можем заменить в (23) энергии $E_i^{(1)}$ и $E_i^{(2)}$ операторами $\widehat{H}^{(1)}$ и $\widehat{H}^{(2)}$, расположенными справа от множителя $f_1(r_{12})$, а энергии $E_f^{(1)}$ и $E_f^{(2)}$ – операторами $\widehat{H}^{(1)}$ и $\widehat{H}^{(2)}$, расположенными слева от $f_1(r_{12})$:

$$\begin{aligned} |\omega_{fi}|f_1(r_{12}) &\rightarrow \pm\frac{1}{2}\{\widehat{H}^{(1)}f_1(r_{12}) - f_1(r_{12})\widehat{H}^{(1)} + f_1(r_{12})\widehat{H}^{(2)} - \widehat{H}^{(2)}f_1(r_{12})\} = \\ &= \pm\frac{1}{2}\{[\widehat{H}^{(1)}, f_1(r_{12})] + [f_1(r_{12}), \widehat{H}^{(2)}]\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь и далее квадратные скобки обозначают коммутаторы соответствующих величин.

Подобным образом (воспользовавшись соотношением $\omega_{fi}^{(1)} = -\omega_{fi}^{(2)}$) исключим частоты из третьего слагаемого в разложении (20):

$$\begin{aligned} -\omega_{fi}^2 f_2(r_{12}) &= (E_f^{(1)} - E_i^{(1)})(E_f^{(2)} - E_i^{(2)})f_2(r_{12}) \rightarrow \\ &\rightarrow f_2(r_{12})\widehat{H}^{(1)}\widehat{H}^{(2)} - \widehat{H}^{(1)}f_2(r_{12})\widehat{H}^{(2)} - \\ &- \widehat{H}^{(2)}f_2(r_{12})\widehat{H}^{(1)} + \widehat{H}^{(1)}\widehat{H}^{(2)}f_2(r_{12}) = [\widehat{H}^{(1)}, [\widehat{H}^{(2)}, f_2(r_{12})]]. \end{aligned} \quad (25)$$

Внося операторные выражения (24) и (25) в правую часть (20), приходим к следующему преобразованию K -фактора:

$$K(\vec{r}_1, \vec{r}_2; \omega_{fi}) \rightarrow e^{i|\omega_{fi}|R/c} \left\{ f_0(r_{12}) \pm \frac{i}{2c} ([\hat{H}^{(1)}, f_1(r_{12})] + [f_1(r_{12}), \hat{H}^{(2)}]) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2c^2} [\hat{H}^{(1)}, [\hat{H}^{(2)}, f_2(r_{12})]] \right\}, \quad (26)$$

где $|\omega_{fi}| = |\omega_{fi}^{(1)}| = |\omega_{fi}^{(2)}|$, а функции f_0 , f_1 и f_2 по-прежнему задаются равенствами (21).

Таким образом, K -фактор (17) представлен двойным разложением (20) по степеням $1/c$ и $\Delta r/R$. При этом в разложении по степеням $1/c$ мы ограничились первыми тремя членами, а в разложении по малому параметру $\Delta r/R$ каких-либо ограничений нет, так как функция M_1 содержит все высшие поправочные члены. По этой причине все последующее рассмотрение учитывает взаимодействие двух квазимолекулярных электронов произвольной мультипольности.

Движение отдельных электронов в двухцентрковой системе $A^{(Z_a-2)+} + B^{Z_b+}$ описывается дираковским одноэлектронным гамильтонианом для задачи двух кулоновских центров, покоящихся на расстоянии R друг от друга:

$$\hat{H}^{(n)} = c\vec{\alpha}_n \hat{p}_n + \beta_n mc^2 + V(\vec{r}_n), \quad n = 1, 2, \quad (27)$$

где

$$V(\vec{r}_n) = - \left(\frac{Z_a e^2}{r_{na}} + \frac{Z_b e^2}{r_{nb}} \right), \quad r_{na, nb} = \left| \vec{r}_n \pm \frac{\vec{R}}{2} \right|. \quad (28)$$

Здесь и далее $\hbar \neq 1$, через $\hat{p}_n = -i\hbar \vec{\nabla}_n$ обозначен оператор импульса, $\vec{\nabla}_n$ – трехмерный градиент по координатам \vec{r}_n электрона с номером n , а индекс n у $\vec{\alpha}_n$ и β_n указывает, что данные матрицы действуют на функцию $\Psi_i^{(n)}(\vec{r}_n)$. Очевидно, что в гамильтониане (27) можно ввести и другие члены, учитывающие, например, неточечность и спин ядра, экранировку поля ядра электронной оболочкой атомного остова и т.д.

Вычислим коммутаторы, входящие в (26). Заметим прежде всего, что не коммутирующим с $f_1(r_{12})$ и $f_2(r_{12})$ является только один член в $\hat{H}^{(n)}$, а именно $c\vec{\alpha}_n \hat{p}_n$. По этой причине в выражении (27) для операторов $\hat{H}^{(1)}$, $\hat{H}^{(2)}$ при подстановке их под знак коммутаторов в (26) можно сразу отбрасывать не содержащие матриц $\vec{\alpha}_n$ слагаемые:

$$[\hat{H}^{(1)}, f_1] = c[\vec{\alpha}_1 \hat{p}_1, f_1], \quad [f_1, \hat{H}^{(2)}] = c[f_1, \vec{\alpha}_2 \hat{p}_2], \\ [\hat{H}^{(1)}, [\hat{H}^{(2)}, f_2]] = c^2 [\vec{\alpha}_1 \hat{p}_1, [\vec{\alpha}_2 \hat{p}_2, f_2]]. \quad (29)$$

С помощью этих соотношений, а также очевидной вспомогательной формулы

$$[\vec{\alpha}_n \hat{p}_n, f_{1,2}] = -i\hbar(\vec{\alpha}_n \vec{\nabla}_n) f_{1,2}$$

легко убедиться в том, что вклады второго и третьего слагаемых в разложении (26) определяются следующими операторными равенствами:

$$\pm \frac{i}{2c} ([\hat{H}^{(1)}, f_1] + [f_1, \hat{H}^{(2)}]) = \pm \hbar R \frac{\vec{\alpha}_1 \vec{n} + \vec{\alpha}_2 \vec{n}}{2r_{1,2}^2}, \quad (30)$$

$$\frac{1}{2c^2} [\widehat{H}^{(1)}, [\widehat{H}^{(2)}, f_2]] = -\frac{\hbar^2}{2} (\vec{\alpha}_1 \vec{\nabla}_1) (\vec{\alpha}_2 \vec{\nabla}_2) r_{12} - \frac{\hbar^2 R^2}{2} (\vec{\alpha}_1 \vec{\nabla}_1) (\vec{\alpha}_2 \vec{\nabla}_2) \frac{1}{r_{12}}, \quad (31)$$

где $\vec{n} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Таким образом, величина $\langle f|V|i\rangle$ действительно может быть представлена в виде (15), где оператор V , описывающий обмен между частицами виртуальными фотонами, определяется следующим выражением (здесь вновь $\hbar = 1$):

$$V^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R) = e^2 \cdot \exp\left(\frac{i|\omega_{fi}R}{c}\right) \left\{ \frac{1}{r_{12}} - \frac{\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 + (\vec{\alpha}_1 \vec{n})(\vec{\alpha}_2 \vec{n})}{2r_{12}} \pm \right. \\ \left. \pm R \frac{\vec{\alpha}_1 \vec{n} + \vec{\alpha}_2 \vec{n}}{2r_{12}^2} - R^2 \frac{\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 - 3(\vec{\alpha}_1 \vec{n})(\vec{\alpha}_2 \vec{n})}{2r_{12}^3} \right\}. \quad (32)$$

В этом равенстве знак плюс перед членом, содержащим множитель R , соответствует случаю $E_f^{(1)} > E_i^{(1)}$, а знак минус – случаю $E_f^{(1)} < E_i^{(1)}$. Матричный элемент (15) этого оператора вычисляется с четырехкомпонентными волновыми функциями $\Psi_i^{(n)}(\vec{r}_n)$ и $\Psi_f^{(n)}(\vec{r}_n)$. Первое слагаемое в (32) представляет собой энергию мгновенного (кулоновского) взаимодействия электронов, а остальные учитывают поправки, обусловленные запаздыванием релятивистского взаимодействия и наличием электронных спинов.

В пределе объединенного атома ($R \rightarrow 0$) оператор (32) переходит в релятивистский оператор Брейта (1) взаимодействия двух атомных электронов в гелиеподобных системах. Тем самым оператор (32) можно рассматривать как непосредственное обобщение оператора Брейта [6], [7] на область сколь угодно больших межэлектронных расстояний, где релятивистский характер взаимодействия движущихся зарядов проявляется наиболее ярко. Нетривиальным моментом такого обобщения является наличие в выражении (32) дополнительных (по сравнению с брейтовским выражением (1)) запаздывающих членов, пропорциональных R и R^2 . Этот дополнительный вклад в $V^{(\pm)}$ носит принципиально релятивистский характер и появляется за счет дополнительного запаздывания релятивистского взаимодействия двух электронов, находящихся на произвольно большом расстоянии друг от друга по сравнению с $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$.

В соответствии с уточнением оператора Брейта, сделанным в настоящей работе, выражение (32) можно было бы назвать обобщенным оператором Брейта дальнего действия (чтобы подчеркнуть возможность его использования при решении двухэлектронных задач физики медленных атомных столкновений [1]–[3], теории квазимолекулярной оже-спектроскопии [4], [5], а также ряда важных проблем нелинейной и квантовой оптики [8]–[12]).

Для анализа симметричных свойств оператора (32) введем обозначение P_{12} для оператора перестановки пары взаимодействующих частиц 1 и 2. Если подействовать оператором P_{12} на $V^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R)$, то мы получим

$$P_{12}V^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R) = V^{(\mp)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R).$$

Здесь учтено, что $\vec{\alpha}_1 \vec{n}$ и $\vec{\alpha}_2 \vec{n}$ меняют знак при перестановке частиц 1 и 2, а значит, их произведение остается неизменным. Однако таким свойством не обладает третий

член в (32): он антисимметричен по отношению к перестановке частиц. Обратим внимание также на то, что найденная форма оператора (32) в явном виде выявляет симметрию по отношению к взаимодействующим частицам. После надлежащей симметризации по формулам (23)–(25) каждого отдельного члена разложения (20) этот результат никак нельзя назвать неожиданным: входящие в правую часть (26) функции f_0 , f_1 , f_2 зависят только от расстояния между частицами, и тем самым ясно видна симметрия формул (21) относительно перестановки векторов $\vec{r}_1 \rightleftharpoons \vec{r}_2$.

В работах [9]–[12], положивших начало современному этапу исследования проблемы двух электронов, был получен следующий результат для релятивистского оператора взаимодействия двух электронов:

$$\widehat{U}^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R) = e^2 \cdot \exp\left(\frac{i|\omega_{fi}|R}{c}\right) \left\{ \frac{1}{r_{12}} - \frac{\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 + (\vec{\alpha}_1 \vec{n})(\vec{\alpha}_2 \vec{n})}{2r_{12}} + R \frac{\vec{\alpha}_2 \vec{n}}{r_{12}^2} - R^2 \frac{\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2 - 3(\vec{\alpha}_1 \vec{n})(\vec{\alpha}_2 \vec{n})}{2r_{12}^3} \right\}. \quad (33)$$

Принципиальным недостатком этого оператора является отсутствие симметрии в описании пары взаимодействующих частиц. Как отмечалось ранее, в нашем построении оператора (32) равноправность описания обеих частиц достигается путем надлежащей симметризации двух последних членов в разложении фактора запаздывания (26). Это приводит к тому, что в окончательном выражении (32) для оператора $V^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R)$ наряду с членами, которые отражены в представлении (33), появляется новое слагаемое $\pm R(\vec{\alpha}_1 \vec{n})/2r_{12}^2$, которое обязано своим происхождением дополнительному запаздыванию во взаимодействии электронов. Именно это обстоятельство было упущено в работах [9]–[12] и привело к неправильному результату (33) для релятивистского оператора взаимодействия двух электронов.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе на основе квантово-электродинамического подхода решена задача о взаимодействии двух квазимолекулярных электронов, находящихся на произвольном расстоянии друг от друга – около разных атомов (ядер). Взаимодействие рассматривается как эффект второго порядка квантово-электродинамической теории возмущений с диаграммой Фейнмана, приведенной на рисунке. Выделим основные свойства этого взаимодействия.

Имеются две области конфигурационного пространства, в которых обобщенный оператор Брейта $V^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R)$ различным образом ведет себя в зависимости от изменения относительного расстояния r_{12} пары электронов. Так, например, если $R \rightarrow 0$, то формула (32) для $V^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R)$ переходит в предельное выражение (1), которое правильно описывает эффекты запаздывания релятивистского взаимодействия лишь при сближении частиц на небольшие расстояния r_{12} . В частности, область действия формулы Брейта (1) ограничивается следующим условием на координатные переменные:

$$\frac{\omega_0 r_{12}}{c} \ll 1, \quad (34)$$

где ω_0 – характерная частота в спектре взаимодействующих электронов. Соответствующую область конфигурационного пространства мы будем обозначать через Ω_1

и называть областью близких электронных корреляций. Однако в области Ω_{II} , где электроны разведены к разным ядрам и для всех $\Delta r \leq R < \infty$ выполнено условие (19), оператор Брейта (1) перестает адекватно описывать релятивистское взаимодействие двух электронов даже на качественном уровне. В то же время построенный в настоящей статье релятивистский оператор $V^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R)$, называемый еще обобщенным оператором Брейта дальнего действия типа, позволяет единообразно описать запаздывающее взаимодействие двух электронов как в области Ω_I близких, так и в области Ω_{II} далеких электронных корреляций, и поэтому может быть применен при решении многих двухэлектронных задач атомной и молекулярной спектроскопии, астрофизики, теории медленных атомных столкновений и т.д.

Для каждой области расстояний r_{12} характерны свои временные масштабы передачи взаимодействия и, соответственно, свои расчетные приближения, позволяющие выделить малые параметры и учесть различные типы взаимодействий. Тем самым получается дополнительное обоснование того, что обобщенный оператор Брейта $V^{(\pm)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2; R)$ можно использовать при решении многоэлектронных двухцентровых задач, наряду с более ясным представлением о неполноте той квантово-электродинамической картины взаимодействия двух электронов, которая описывается стандартным оператором Брейта (1).

Как мы видели в предыдущем разделе, при выводе оператора Брейта (1) предполагается [7], что единственным малым параметром, по которому следует вести разложение фактора запаздывания, является величина (34). Это означает, что наряду с характерным (средним) временем электронных переходов $T_0 = 2\pi/\omega_0$ используется также (отвечающий области Ω_I) единый временной масштаб $T_b = r_{12}/c$. Это время можно толковать как время, необходимое для передачи взаимодействия. При этом должно соблюдаться условие $2\pi T_b \ll T_0$, т.е. заметное изменение электронной плотности в системе двух взаимодействующих электронов происходит за время передачи взаимодействия.

На достаточно больших расстояниях между электронами (в области Ω_{II}), при которых время распространения взаимодействия $T_b = R/c$ значительно превышает среднее время электронных переходов $T_0 = 2\pi/\omega_0$, в качестве естественного малого параметра разложения выступает величина (19). Обмен виртуальными фотонами на таких расстояниях приводит к взаимодействию между электронами (см. (32)), которое наряду с кулоновским и брейтовским взаимодействиями (1) содержит еще дополнительные слагаемые, обусловленные усилением эффектов запаздывания в спин-орбитальном и спин-спиновом взаимодействиях двух электронов. Параметром, определяющим степень усиления эффектов запаздывания во взаимодействии электронов, является здесь отношение T_b/T_0 или R/λ_0 , где $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$.

Список литературы

- [1] M. I. Chibisov, R. K. Janev, *Phys. Rep.*, **166**:1 (1988), 1–87.
- [2] В. М. Галицкий, Е. Е. Никитин, Б. М. Смирнов, *Теория столкновений атомных частиц*, Наука, М., 1981.
- [3] Б. М. Смирнов, *УФН*, **171**:3 (2001), 233–266.
- [4] Б. Г. Краков, Э. С. Парилис, *УФН*, **157**:3 (1989), 477–512.

- [5] Э. С. Парилис, Л. М. Кишиневский, В. И. Матвеев, Б. Г. Краков, *Оже-процессы при атомных столкновениях*, ФАН, Ташкент, 1989.
- [6] G. Breit, *Phys. Rev.*, **34**:4 (1929), 553–573; **39**:4 (1932), 616–624.
- [7] А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1981.
- [8] C. S. Chang, P. Stehle, *Phys. Rev. A*, **4**:2 (1971), 630–640.
- [9] О. Н. Гадомский, В. Р. Нагибаров, Н. К. Соловаров, *ЖЭТФ*, **63**:3 (1972), 813–819.
- [10] O. N. Gadomskii, V. R. Nagibarov, N. K. Solovarov, *ЖЭТФ*, **70**:2 (1976), 435–444.
- [11] О. Н. Гадомский, К. К. Алтунин, *ЖЭТФ*, **114**:5 (1998), 1555–1577.
- [12] О. Н. Гадомский, *УФН*, **170**:11 (2000), 1145–1179.
- [13] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1989.
- [14] Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл, *Релятивистская квантовая теория*. Т. I. *Релятивистская квантовая механика*, Наука, М., 1978.

Поступила в редакцию 5.05.2008