МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

РЕЙТІЙ О.К.

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

(методичний посібник з лабораторних робіт)

Частина III. Динаміка матеріальної системи і твердого тіла

Ужгород – 2007

Рейтій О.К. Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт). Частина III. Динаміка матеріальної системи. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2007. – 44 с.

Рецензент:

доктор фізико-математичних наук, професор,
декан фізичного факультету, завідувач кафедри теоретичної фізики
Лазур В.Ю.

Відповідальний за випуск:

доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики
Маринець В.В.

Дане видання є останньою частиною методичного посібника з лабораторних робіт для курсу „Теоретична механіка”, який читається на математичному факультеті УжНУ. В посібнику наведено завдання для чотирьох лабораторних робіт з динаміки матеріальної системи та твердого тіла, кожне з яких містить по 40 варіантів. Як і в попередніх частинах, до кожної лабораторної роботи подано приклад виконання типового завдання.

Посібник розрахований на студентів-математиків, також може бути корисний студентам технічних спеціальностей, аспірантам, викладачам та інженерно-технічним працівникам для поглиблення знань з теоретичної механіки.

Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету (протокол № 3 від 24 листопада 2007 року)

ЗМІСТ

РОЗДІЛ 1. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ ДО ВИЗНАЧЕННЯ КУТОВОЇ ШВИДКОСТІ ТВЕРДОГО ТІЛА

Завдання для лабораторної роботи №9

Тіло *H* масою m_1 обертається навколо вертикальної осі *z* зі сталою кутовою швидкістю ω_0; при цьому в точці *O* жолоба *AB* тіла *H* на відстані *AO* від точки *A*, яка відраховується вздовж жолоба, знаходиться матеріальна точка *K* масою m_2. В деякий момент часу ($t = 0$) на систему починає діяти пара сил з моментом $M_z = f_1(t)$. При $t = \tau$ дія пари сил припиняється; одночасно точка *K* починає відносний рух з точки *O* уздовж жолоба *AB* (в напрямку до *B*) за законом $OK = s = f_2(t - \tau)$ для $t > \tau$.

Визначити кутову швидкість тіла *H* при $t = \tau$ і при $t = T$, нехтуючи опором обертанню тіла *H*. Тіло *H* розглядати як пластинку, що має форму, вказану на рис. 1.1-1.4. Необхідні для розв’язання дані приведені в табл. 1.1, 1.2.

В тих варіантах, в яких пластинка *H* розташована у вертикальній площині, відносний рух точки *K* викликається силою, що діє в тій же площині; в інших варіантах під точкою *K* розуміється самохідний візок.

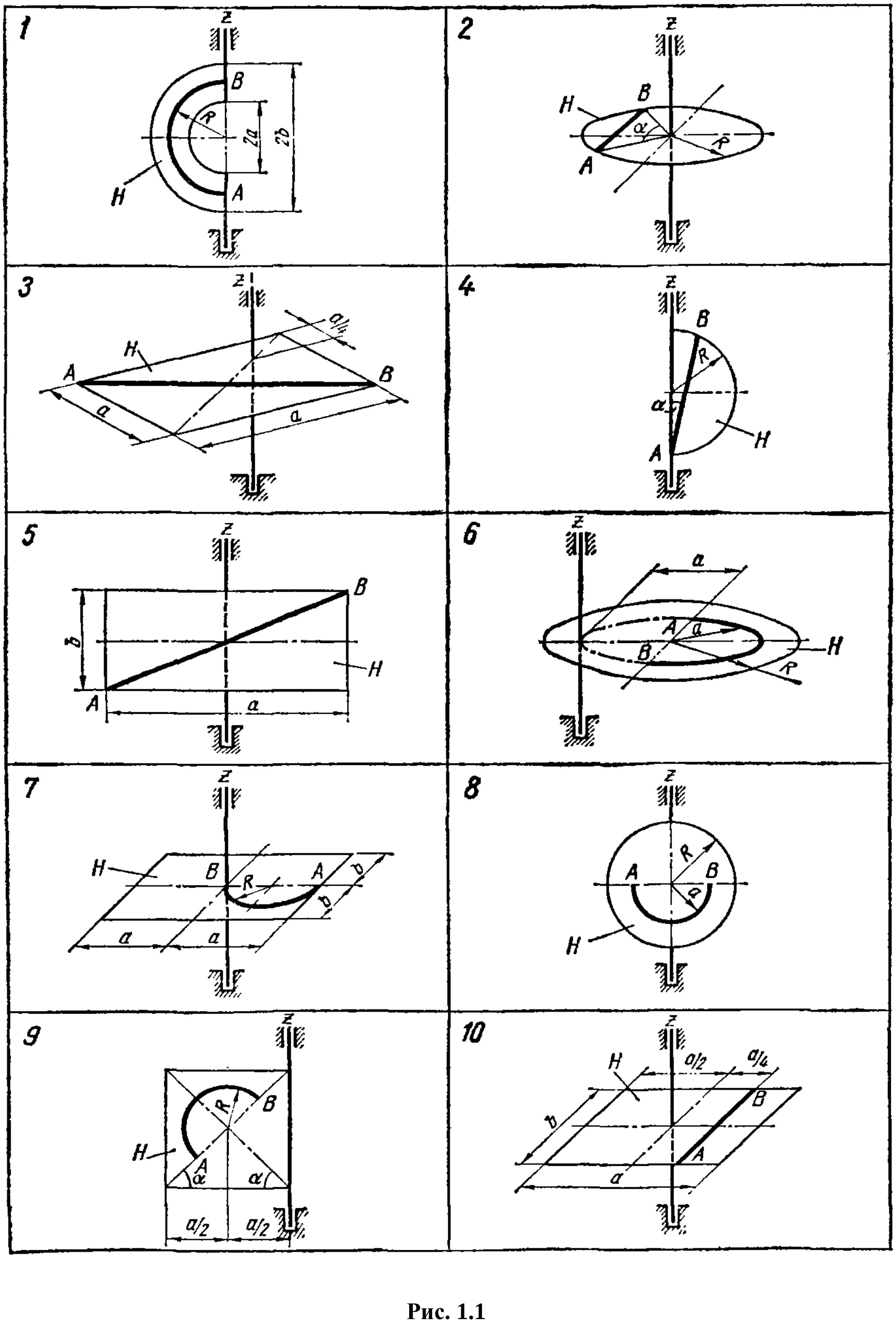

1 z B R 2a 2b H A
2 z B H α R A
3 z a/4 H A B a a
4 z B R α H A
5 z B b H A a
6 z a A α H B R
7 z H B R A b b a a
8 z R A B a H
9 z R B H A α α a/2 a/2
10 z H a/2 a/4 B b A a

Рис. 1.1

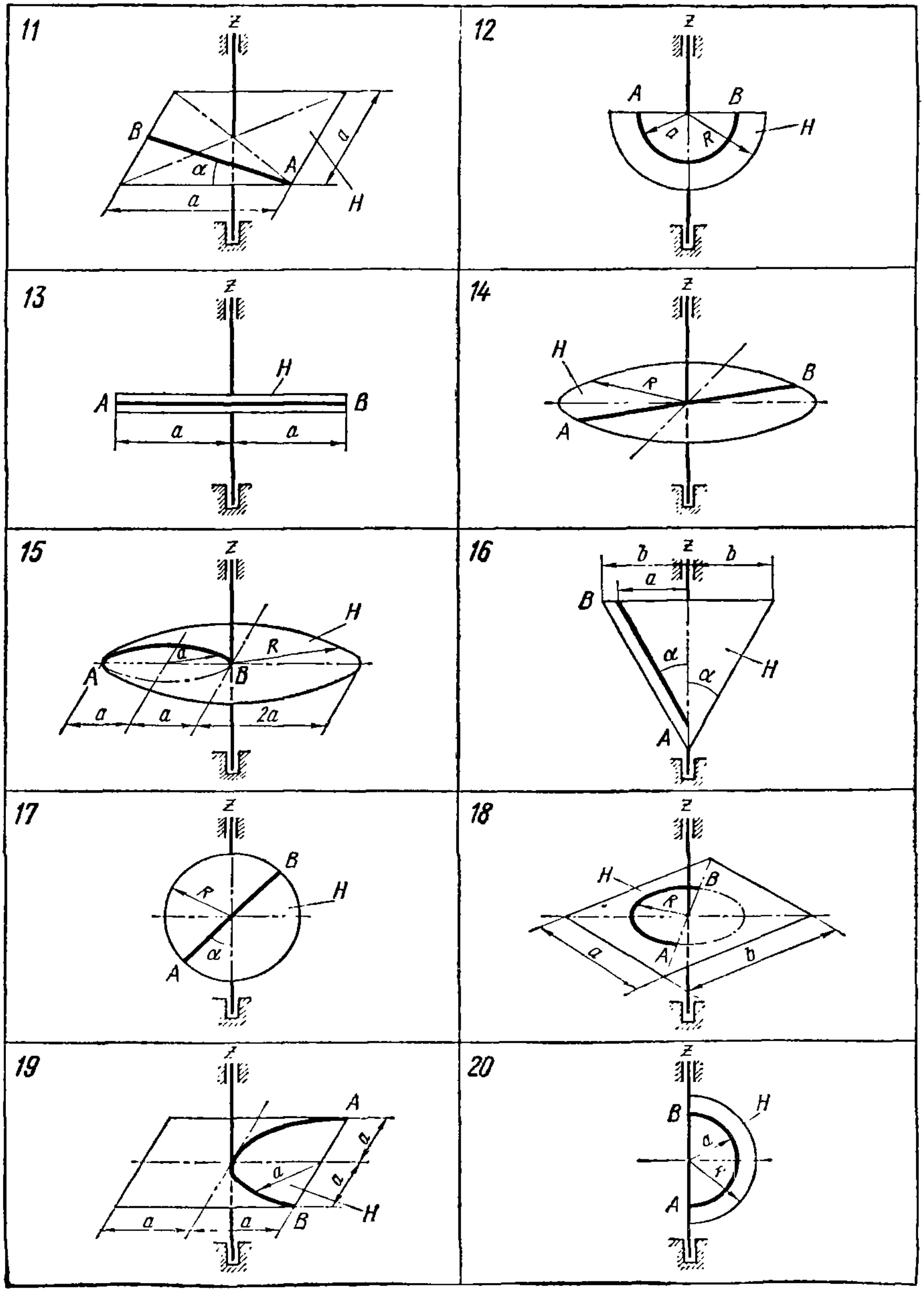
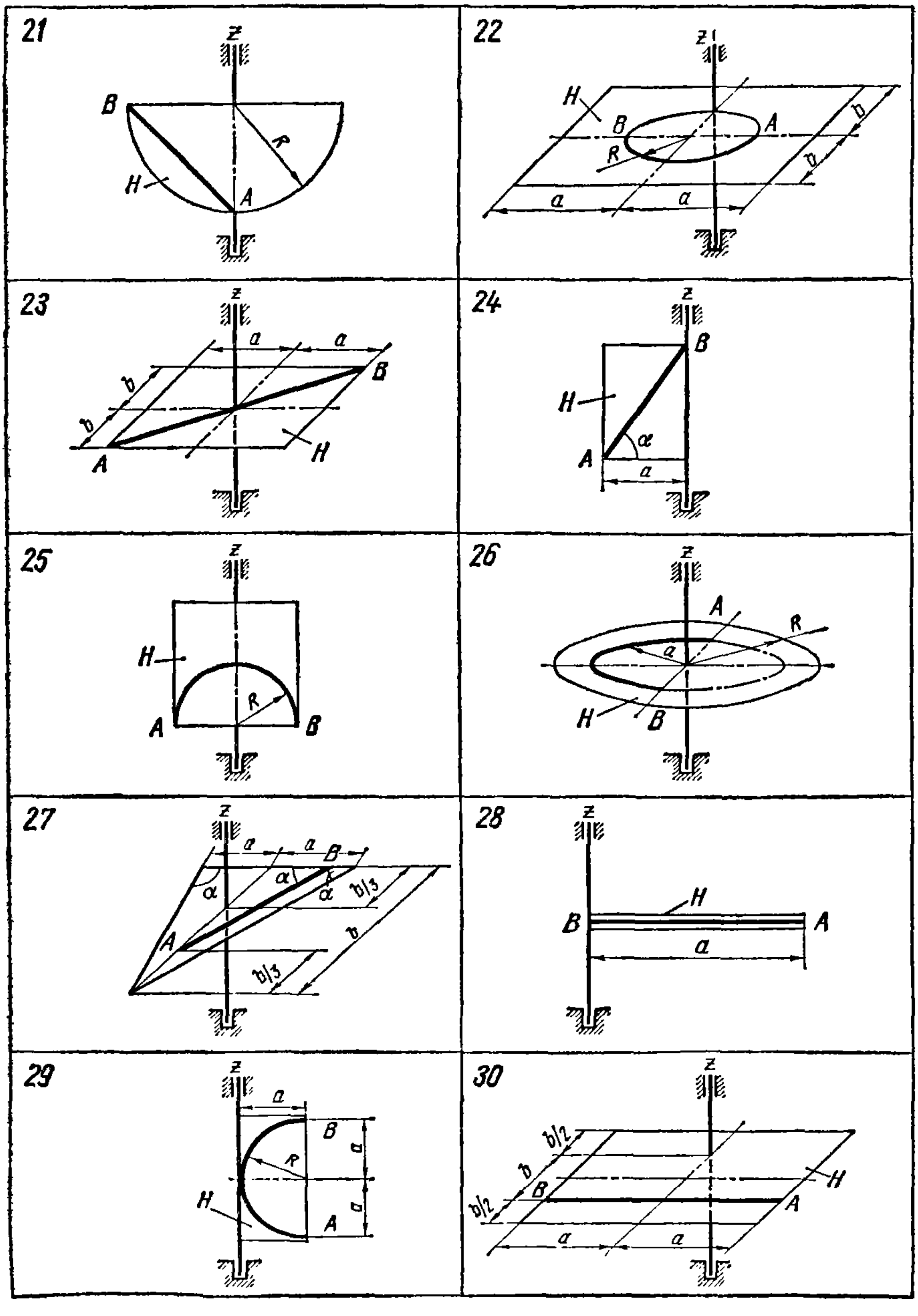


Рис. 1.2



21
z
B
R
H
A
22
z
H
B
A
R
b
b
a
a
23
z
a
a
b
b
B
A
H
24
z
B
H
α
A
a
25
z
H
R
A
B
26
z
A
R
α
H
B
27
z
a
a
B
α
α
α
b/3
A
b
b/3
28
z
H
B
A
a
29
z
a
B
R
a
a
H
A
30
z
b/2
b
H
B
A
b/2
a
a

Рис. 1.3

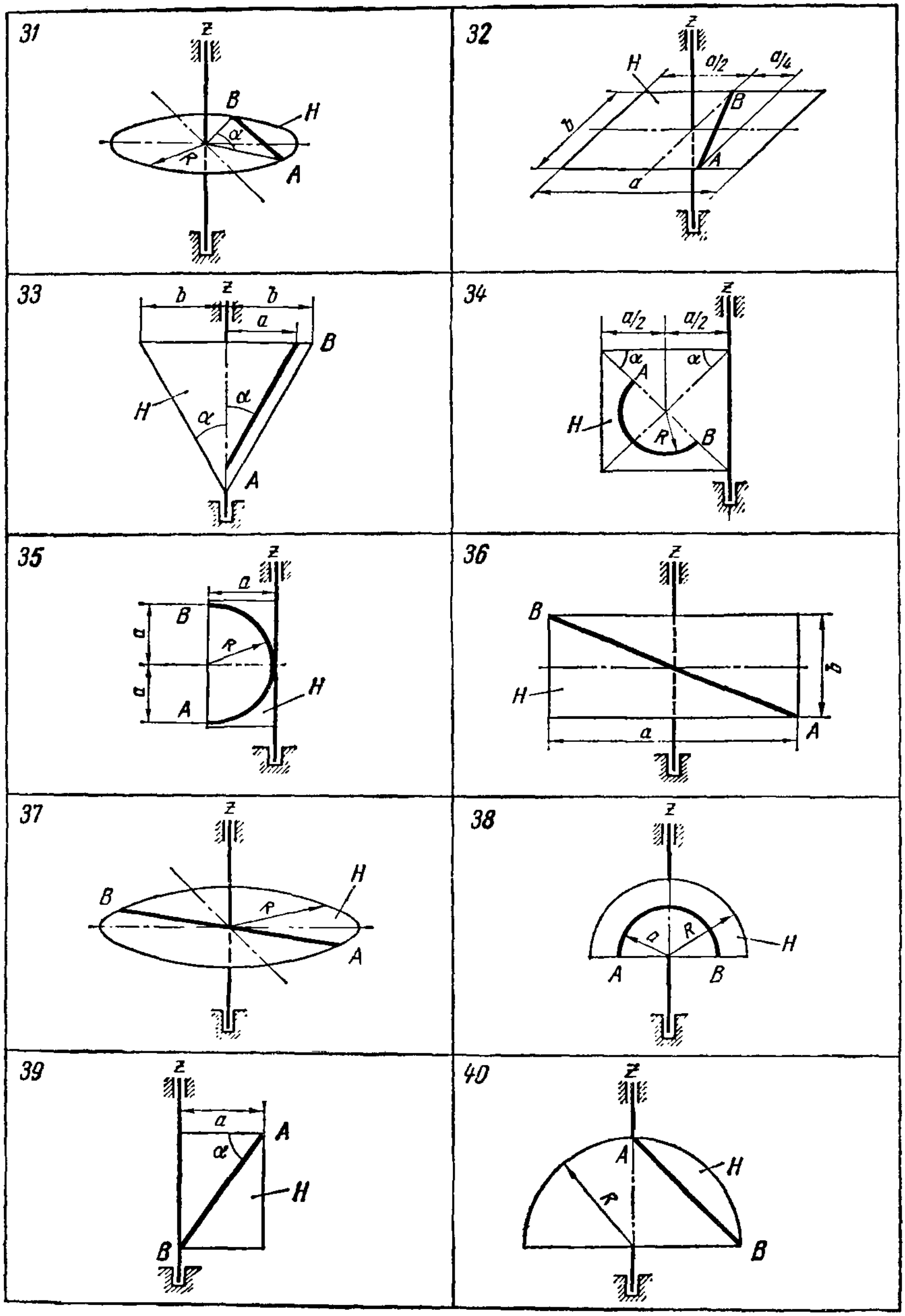

31
z
B
H
α
R
A
32
z
H
a/2
a/4
B
b
A
a
33
b
z
b
a
B
H
α
α
A
34
z
a/2
a/2
α
α
A
H
R
B
35
z
a
B
a
R
a
H
A
36
z
B
b
H
a
A
37
z
H
B
R
A
38
z
a
R
H
A
B
39
z
a
A
α
H
B
40
z
A
H
R
B

Рис. 1.4

Т а б л и ц я 1.1

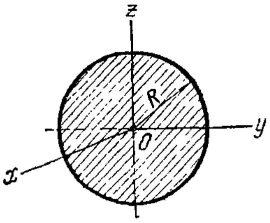
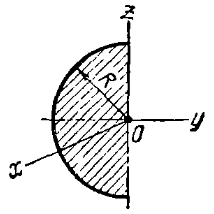
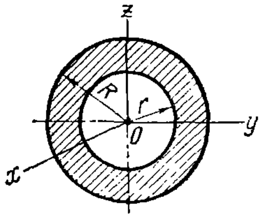
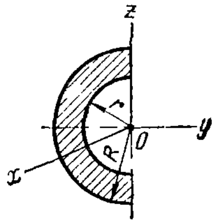
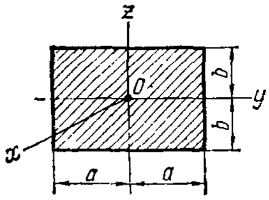
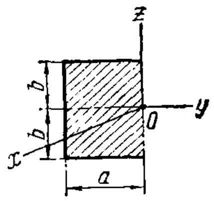
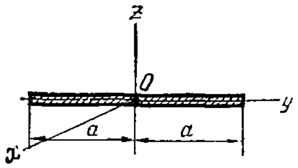
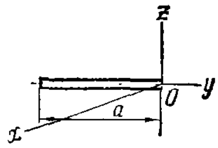
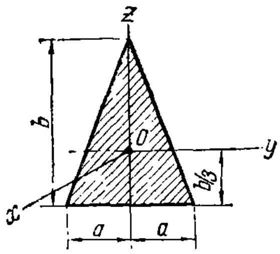
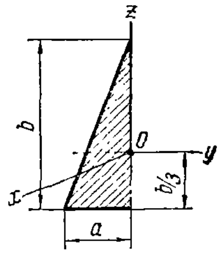
Номер варіанта (рис. 1.1-1.2)	m_1, *кг*	m_2, *кг*	ω_0, c^{-1}	*a*, *м*	*b*, *м*	*R*, *м*	α, *град*	*AO*, *м*	$M_z = f_1(t)$, *Нм*	τ, *с*	*T*, *с*	$OK = s = f_2(t-\tau)$, *м*
1	32	10	–1	1	1,5	1,2	–	$\pi R/6$	$-29,6t^2$	3	4	$(5\pi R/12)(t-\tau)$
2	200	60	–2	–	–	2	120	$\sqrt{3}/2$	101	5	6	$\sqrt{3}(t-\tau)^2$
3	120	40	0	2	–	–	–	0	$-120t$	4	6	$(\sqrt{2}/4)(t-\tau)^2$
4	16	5	–3	–	–	1	30	0,4	$21t$	2	6	$0,6\sqrt{t-\tau}$
5	66	10	1,5	2	1,5	–	–	0	$15\sqrt{t}$	4	6,5	$0,5(t-\tau)$
6	160	80	–1,25	1,5	–	2,5	–	$\pi a/6$	$-700t$	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$(5\pi a/18)(t-\tau)^2$
7	300	50	–2	1,6	1	0,8	–	0	968	1	2	$(\pi R/2)(t-\tau)^2$
8	80	20	0	1,2	–	2	–	$\pi a/2$	$240\sqrt{t}$	4	8	$(\pi a/4)\sqrt{t-\tau}$
9	20	5	5	1,2	–	0,4	45	$\pi R/4$	$-29,2t$	3	4	$(3\pi R/4)(t-\tau)^2$
10	100	40	2	2	$\sqrt{2}$	–	–	$\sqrt{2}/2$	$-90\sqrt{t}$	4	5	$(\sqrt{2}/4)(t-\tau)$
11	60	20	–1	2	–	–	15	0	$40t$	2	4	$0,4(t-\tau)^2$
12	40	10	–3	1	–	2	–	0	$50t^2$	3	5	$(\pi a/3)(t-\tau)$
13	24	4	4	1	–	–	–	0,5	$-27\sqrt{t}$	1	3	$0,3(t-\tau)$
14	40	10	2	–	–	1	–	0	$120t$	1	4	$0,5(t-\tau)$
15	120	50	–4	1	–	2	–	0	$330t^2$	2	3	$(\pi a/2)(t-\tau)^2$
16	60	10	–5	1	1,2	–	30	0,4	74	2	6	$0,3\sqrt{t-\tau}$
17	50	10	–2	–	–	1,6	30	0,6	$69t$	4	6	$0,6(t-\tau)$
18	120	50	3	2	3	0,8	–	$\pi R/2$	324	3	5	$(\pi R/8)(t-\tau)^2$
19	90	30	1	1,5	–	–	–	0	$-135t$	2	3	$(\pi a/4)(t-\tau)$
20	50	12	3	1	–	1,2	–	$\pi a/6$	$-14t^2$	3	5	$(\pi a/12)(t-\tau)^2$

Номер варіанта (рис. 1.3-1.4)	m_1, *кг*	m_2, *кг*	ω_0, c^{-1}	*a*, *м*	*b*, *м*	*R*, *м*	α, *град*	*AO*, *м*	$M_z = f_1(t)$, *Нм*	τ, *с*	*T*, *с*	$OK = s = f_2(t-\tau)$, *м*
21	40	10	–6	–	–	1	–	$\sqrt{2}/2$	$75\sqrt{t}$	1	3	$(\sqrt{2}/16)(t-\tau)^2$
22	150	50	–1	1,6	1,2	0,6	–	$\pi R/2$	163	4	5	$\pi R/2\sqrt{t-\tau}$
23	90	20	2	$\sqrt{2}$	1	–	–	$\sqrt{3}/2$	–210	2	3	$(\sqrt{3}/2)(t-\tau)$
24	50	12	–3	0,6	–	–	60	0,2	$27t^2$	2	6	$0,4\sqrt{t-\tau}$
25	36	8	–5	–	–	0,5	–	0	$20t$	2	4	$(\pi R/6)(t-\tau)^2$
26	150	40	–4	1,5	–	2	–	$\pi a/6$	$1170\sqrt{t}$	1	2	$(\pi a/2)(t-\tau)^2$
27	120	30	0	1	–	–	60	0	$-25t$	2	3	$(t-\tau)^2$
28	15	4	–2	0,6	–	–	–	0,1	$5,6t$	3	4	$0,4\sqrt{t-\tau}$
29	20	5	5	0,6	–	0,6	–	0	$-6,3\sqrt{t}$	4	5	$(5\pi R/6)(t-\tau)$
30	150	50	0	1,6	1,2	–	–	1,6	$652t$	2	4	$0,2(t-\tau)^2$
31	200	60	–2	–	–	2	120	$\sqrt{3}/2$	101	5	6	$\sqrt{3}(t-\tau)^2$
32	100	40	2	2	$\sqrt{2}$	–	–	$\sqrt{2}/2$	$-90\sqrt{t}$	4	5	$(\sqrt{2}/4)(t-\tau)$
33	60	10	–5	1	1,2	–	30	0,4	74	2	6	$0,3\sqrt{t-\tau}$
34	20	5	5	1,2	–	0,4	45	$\pi R/4$	$-29,2t$	3	4	$(3\pi R/4)(t-\tau)^2$
35	20	5	5	0,6	–	0,6	–	0	$-6,3\sqrt{t}$	4	5	$(5\pi R/6)(t-\tau)$
36	66	10	1,5	2	1,5	–	–	0	$15\sqrt{t}$	4	6,5	$0,5(t-\tau)$
37	40	10	2	–	–	1	–	0	$120t$	1	4	$0,5(t-\tau)$
38	40	10	–3	1	–	2	–	0	$50t^2$	3	5	$(\pi a/3)(t-\tau)$
39	50	12	–3	0,6	–	–	60	0,2	$27t^2$	2	6	$0,4\sqrt{t-\tau}$
40	40	10	–6	–	–	1	–	$\sqrt{2}/2$	$75\sqrt{t}$	1	3	$(\sqrt{2}/16)(t-\tau)^2$

Примітка. Знак мінус перед M_z і ω відповідає напрямку обертання годинникової стрілки, якщо дивитися з боку додатного напрямку осі *z*.

Т а б л и ц я 1.2

Осьові моменти інерції однорідних пластинок

Тіло	J_x	J_y	J_z	Тіло
	$\dfrac{mR^2}{2}$	$\dfrac{mR^2}{4}$	$\dfrac{mR^2}{4}$	
	$\dfrac{m(R^2+r^2)}{2}$	$\dfrac{m(R^2+r^2)}{4}$	$\dfrac{m(R^2+r^2)}{4}$	
	$\dfrac{m(a^2+b^2)}{3}$	$\dfrac{mb^2}{3}$	$\dfrac{ma^2}{3}$	
	$\dfrac{ma^2}{3}$	0	$\dfrac{ma^2}{3}$	
	$\dfrac{m(3a^2+b^2)}{18}$	$\dfrac{mb^2}{18}$	$\dfrac{ma^2}{6}$	

Приклад виконання завдання (рис. 1.5)

Дано: $m_1 = 200\,кг$; $m_2 = 80\,кг$, $M_z = 592t\ Нм$, $\omega_0 = -2\,c^{-1}$, $AO = 0{,}8\,м$, $R = 2{,}4\,м$, $a = 1{,}2\,м$, $\tau = 4\,c$, $T = 6\,c$, $OK = 0{,}5(t-\tau)^2\ м$.

Визначити ω_τ і ω_T, вважаючи тіло *H* однорідної круглою пластинкою.

Р о з в ' я з а н н я

До розв'язання задачі застосуємо теорему про зміну кінетичного моменту механічної системи, яка виражається рівнянням:

$$dK_z/dt = \sum_i M_{iz}^{ex},$$

де K_z – кінетичний момент системи, що складається в даному випадку з тіла *H* і точки *K*, відносно осі *z*; $\sum_i M_{iz}^{ex} = M_z^{ex}$ – головний момент зовнішніх сил, прикладених до системи, відносно осі *z*.

На систему за час від $t = 0$ до $t = \tau$ діють такі сили: вага $\vec{P}_1$ тіла *H*, вага $\vec{P}_2$ точки *K*, пара сил з моментом M_z і реакції підп'ятника і підшипника (рис. 1.5, *а*).

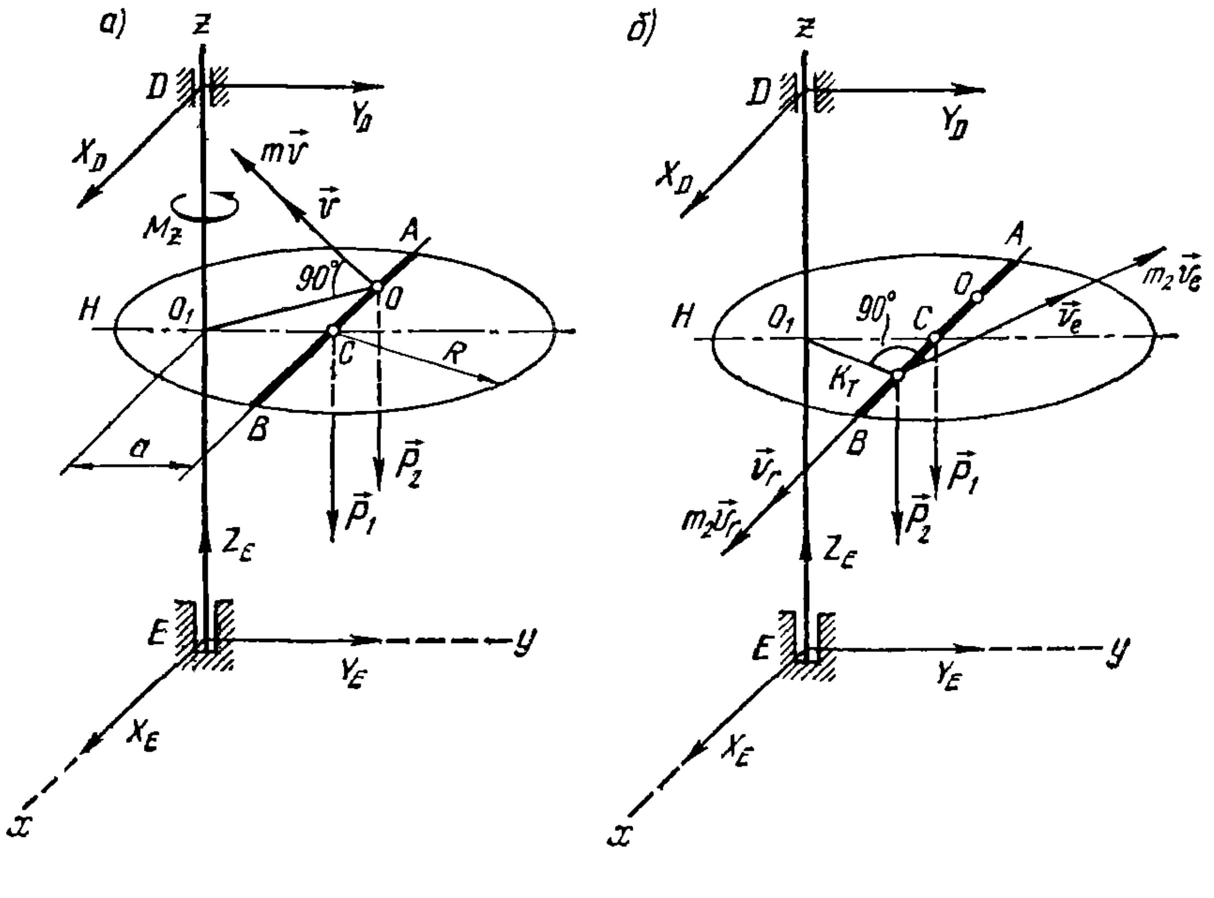


Рис. 1.5

Припускаючи, що обертання тіла *H* відбувається проти руху годинникової стрілки, знайдемо значення кінетичного моменту системи, який складається з кінетичного моменту тіла $J_z\omega$ і моменту кількості руху точки *K*, яка знаходиться в точці *O* тіла *H* і має швидкість $v = \omega \cdot O_1O$:

$$m_2 v \cdot O_1O = m_2\omega \cdot O_1O^2.$$

Таким чином,

$$K_z = J_z\omega + m_2\omega \cdot O_1O^2 = \left(J_z + m_2 \cdot O_1O^2\right)\omega.$$

Головний момент зовнішніх сил рівний обертальному моменту M_z, так як інші сили моменту відносно осі *z* не створюють.

Рівняння, яке виражає теорему про зміну кінетичного моменту, матиме вигляд

$$\frac{d\left[\left(J_z + m_2 \cdot O_1O^2\right)\omega\right]}{dt} = M_z, \tag{1.1}$$

де $M_z = ct$ ($c = 592\ Нм/с$).

Відокремимо в рівнянні (1.1) змінні і зінтегруємо ліву і праву частини рівняння:

$$\left(J_z + m_2 \cdot O_1O^2\right)\int_{\omega_0}^{\omega_\tau} d\omega = \int_0^\tau ct\ dt.$$

Тоді

$$\left(J_z + m_2 \cdot O_1O^2\right)\left(\omega_\tau - \omega_0\right) = c\tau^2/2. \tag{1.2}$$

Знайдемо числові значення величин, які входять в рівняння (1.2).

Момент інерції тіла *H* відносно осі *z* знайдемо, використовуючи теорему Гюйгенса-Штейнера про залежність між моментами інерції відносно паралельних осей:

$$J_z = J_{Cz} + m_1a^2,$$

де J_{Cz} – момент інерції тіла *H* – однорідної круглої пластинки відносно вертикальної осі, що проходить через центр мас *C* тіла паралельно осі *z*:

$$J_{Cz} = m_1R^2/2.$$

Тоді

$$J_z = m_1R^2/2 + m_1a^2,$$

тобто

$$J_z = 200 \cdot 2{,}4^2/2 + 200 \cdot 1{,}2^2 = 864\ кг \cdot м^2.$$

Із рисунка (рис. 1.5, *а*)

$$O_1O^2 = OC^2 + O_1C^2 = 1{,}6^2 + 1{,}2^2 = 4\ м^2,$$

тому

$$J_z + m_2 \cdot O_1O^2 = 864 + 80 \cdot 4 = 1184\ кг \cdot м^2.$$

Таким чином, з рівняння (1.2)

$$1184[\omega_\tau - (-2)] = (592 \cdot 4^2)/2$$

маємо

$$\omega_\tau = 2\ c^{-1}.$$

На протязі відрізку часу від $t = \tau$ до $t = T$ на систему діють сили $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$, реакції підп'ятника і підшипника (рис. 1.5, *б*). Оскільки обертаючий момент M_z знімається, тобто $\sum\limits_i \left(M_i^{ex}\right)_z = 0$, то

$$dK_z/dt = 0, \quad K_z = const.$$

Визначимо значення кінетичних моментів $K_{z\tau}$ при $t = \tau$ і K_{zT} при $t = T$ і прирівняємо ці значення.

Для $t = \tau$

$$K_{z\tau} = \left(J_z + m_2 \cdot O_1O^2\right)\omega_\tau = 1184 \cdot 2 = 2368\ кг \cdot м^2/с.$$

При $t > \tau$ швидкість точки *K* складається з відносної швидкості $\vec{v}_r$ по відношенню до тіла *H* і переносної швидкості $\vec{v}_e$ в русі разом з тілом *H*. Тому для $t = T$ покажемо (рис. 1.5, *б*) два вектора кількості руху точки: $m_2\vec{v}_r$ і $m_2\vec{v}_e$.

Для $t = T$

$$K_{zT} = J_z\omega_T + m_2\omega_\tau \cdot O_1K_T^2 - m_2v_r \cdot O_1C.$$

Знайдемо

$$O_1K_T^2 = O_1C^2 + CK_T^2,$$

де

$$CK_T = OK_T - OC, \quad OK_T = s(t = T) = 0{,}5(T - \tau)^2 = 0{,}5(6-4)^2 = 2\ м,$$

тобто

$$CK_T = 2 - 1{,}6 = 0{,}4\ м, \quad O_1K_T^2 = 1{,}2^2 + 0{,}4^2 = 1{,}6\ м^2.$$

Відносна швидкість

$$v_r = ds/dt = 2 \cdot 0{,}5(t - \tau)$$

при $t = T$

$$v_r = 2 \cdot 0{,}5(6-4) = 2\ м/с.$$

Тому

$$K_{zT} = 864\omega_T + 80\omega_T \cdot 1{,}6 - 80 \cdot 2 \cdot 1{,}2 = 992\omega_T - 192.$$

Прирівнюючи $K_{z\tau}$ і K_{zT}

$$2368 = 992\omega_T - 192,$$

знаходимо $\omega_T = 2{,}59\ c^{-1}$.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМИ ПРО ЗМІНУ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ ДО ВИВЧЕННЯ РУХУ МЕХАНІЧНОЇ СИСТЕМИ

Завдання для лабораторної роботи №10

Механічна система під дією сил тяжіння починає рухатися зі стану спокою; початкове положення системи показано на рис. 2.1-2.4. З огляду на тертя ковзання тіла *1* (варіанти 1-3, 5, 6, 8-12, 17-23, 28-30) і опір коченню тіла *3*, що котиться без ковзання (варіанти 2, 4, 6-9, 11, 13-15, 20, 21, 24, 27, 29), нехтуючи іншими силами опору і масами ниток, які вважаються нерозтяжними, визначити швидкість тіла *1* у той момент, коли пройдений ним шлях стане рівним s.

У завданні прийнято наступні позначення: m_1, m_2, m_3, m_4 – маси тіл *1, 2, 3, 4*; R_2, r_2, R_3, r_3 – радіуси великих і малих кіл; i_{2x}, $i_{3\xi}$ – радіуси інерції тіл *2* і *3* щодо горизонтальних осей, які проходять через їхні центри мас; α, β – кути нахилу площин до горизонту; f – коефіцієнт тертя ковзання; δ – коефіцієнт тертя кочення.

Необхідні для розв'язання дані приведені в табл. 2.1. Блоки і катки, для яких радіуси інерції в таблиці не зазначені, вважати суцільними однорідними циліндрами.

Похилі ділянки ниток паралельні відповідним похилим площинам.

Таблиця 2.1

Номер варіанта (рис. 2.1-2.2)	m_2, *кг*	m_3, *кг*	m_4, *кг*	R_2, *см*	R_3, *см*	i_{2x}, *см*	$i_{3\xi}$, *см*	α, *град*	β, *град*	f	δ, *см*	s, *м*
1	$4m$	$1/5m$	$4/3m$	–	–	–	–	60	–	0,10	–	2
2	$1/2m$	$1/3m$	–	–	30	–	20	30	45	0,22	0,20	2
3	m	$1/10m$	m	–	–	–	–	45	–	0,10	–	2
4	$2m$	$40m$	m	20	40	18	–	–	–	–	0,30	$0{,}1\pi$
5	$2m$	m	–	20	15	18	–	60	–	0,12	–	$0{,}28\pi$
6	$3m$	m	–	–	28	–	–	30	45	0,10	0,28	1,5
7	$2m$	$2m$	–	16	25	14	–	30	–	–	0,20	2
8	$1/2m$	$1/3m$	–	–	30	–	–	30	45	0,15	0,20	1,75
9	$2m$	$9m$	–	–	30	–	20	30	–	0,12	0,25	1,5
10	$1/4m$	$1/4m$	$1/5m$	–	–	–	–	60	–	0,10	–	3
11	$1/2m$	$1/4m$	–	–	30	–	25	30	45	0,17	0,20	2,5

Номер варіанта (рис. 2.1-2.2)	m_2, *кг*	m_3, *кг*	m_4, *кг*	R_2, *см*	R_3, *см*	i_{2x}, *см*	$i_{3\xi}$, *см*	α, *град*	β, *град*	f	δ, *см*	s, *м*
12	$1/2m$	$1/5m$	m	30	–	20	–	30	–	0,20	–	2,5
13	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	–	30	–	–	0,24	2
14	$1/2m$	$5m$	$4m$	–	25	–	–	–	–	–	0,20	2
15	$1/2m$	$4m$	$1/2m$	20	15	18	–	60	–	–	0,25	1,5
16	$1/10m$	$1/20m$	$1/10m$	10	12	–	–	–	–	–	–	$0{,}05\pi$
17	$1/4m$	$1/5m$	$1/10m$	20	–	15	–	60	–	0,10	–	$0{,}16\pi$
18	$3m$	m	–	35	15	32	–	60	–	0,15	–	$0{,}2\pi$
19	$1/3m$	$1/10m$	m	24	–	20	–	60	–	0,15	–	1,5
20	$2m$	$20m$	–	20	15	16	–	30	–	0,10	0,20	$0{,}2\pi$
21	m	$2m$	–	20	20	16	–	30	45	0,20	0,32	1,2
22	$1/2m$	$1/4m$	–	20	10	–	–	60	–	0,17	–	$0{,}1\pi$
23	m	$1/10m$	$4/5m$	20	–	18	–	30	–	0,10	–	1
24	$3m$	$20m$	–	20	30	18	–	–	–	–	0,60	$0{,}08\pi$
25	$1/3m$	$1/4m$	–	16	20	–	–	–	–	–	–	$0{,}04\pi$
26	$1/2m$	m	$1/3m$	30	–	20	–	–	–	–	–	$0{,}6\pi$
27	m	$6m$	$1/2m$	20	20	16	–	30	–	–	0,20	2
28	$2m$	$3m$	–	20	–	14	–	60	–	0,10	–	$0{,}1\pi$
29	$1/4m$	$1/8m$	–	20	35	–	–	15	30	0,20	0,20	2,4
30	$1/2m$	$3/10m$	$3/2m$	26	20	20	18	30	–	0,12	–	2
31	$2m$	$35m$	m	20	40	18	–	–	–	–	0,30	$0{,}1\pi$
32	$2m$	$5m$	$2m$	30	20	26	–	30	–	–	0,24	2
33	$1/2m$	$4m$	$1/2m$	20	15	18	–	60	–	–	0,25	1,5
34	$2m$	m	–	20	15	18	–	60	–	0,12	–	$0{,}28\pi$
35	$1/4m$	$1/5m$	$1/10m$	16	–	15	–	60	–	0,10	–	$0{,}16\pi$
36	$2m$	$2m$	–	16	25	14	–	30	–	–	0,20	2
37	$3m$	$20m$	–	20	30	18	–	–	–	–	0,60	$0{,}08\pi$
38	m	$6m$	$1/2m$	20	20	16	–	30	–	–	0,20	2
39	$1/2m$	$3/10m$	$3/2m$	26	20	20	18	30	–	0,12	–	2
40	$2m$	$20m$	–	20	15	16	–	30	–	0,10	0,20	$0{,}2\pi$

Примітка. У всіх варіантах $m_1 = m$ *кг*. У варіантах 4, 20, 24, 31, 37, 40 масами ланок *AB*, *BC* і повзуна *B* знехтувати; у варіантах 5, 16, 18, 22, 25, 34 масою водила знехтувати; у варіанті 14 маси кожного з чотирьох коліс возика однакові; у варіантах 17 і 26 шатун *3* розглядати як тонкий однорідний стержень; у варіанті 26 маси і моменти інерції блоків *2* і *5* однакові.

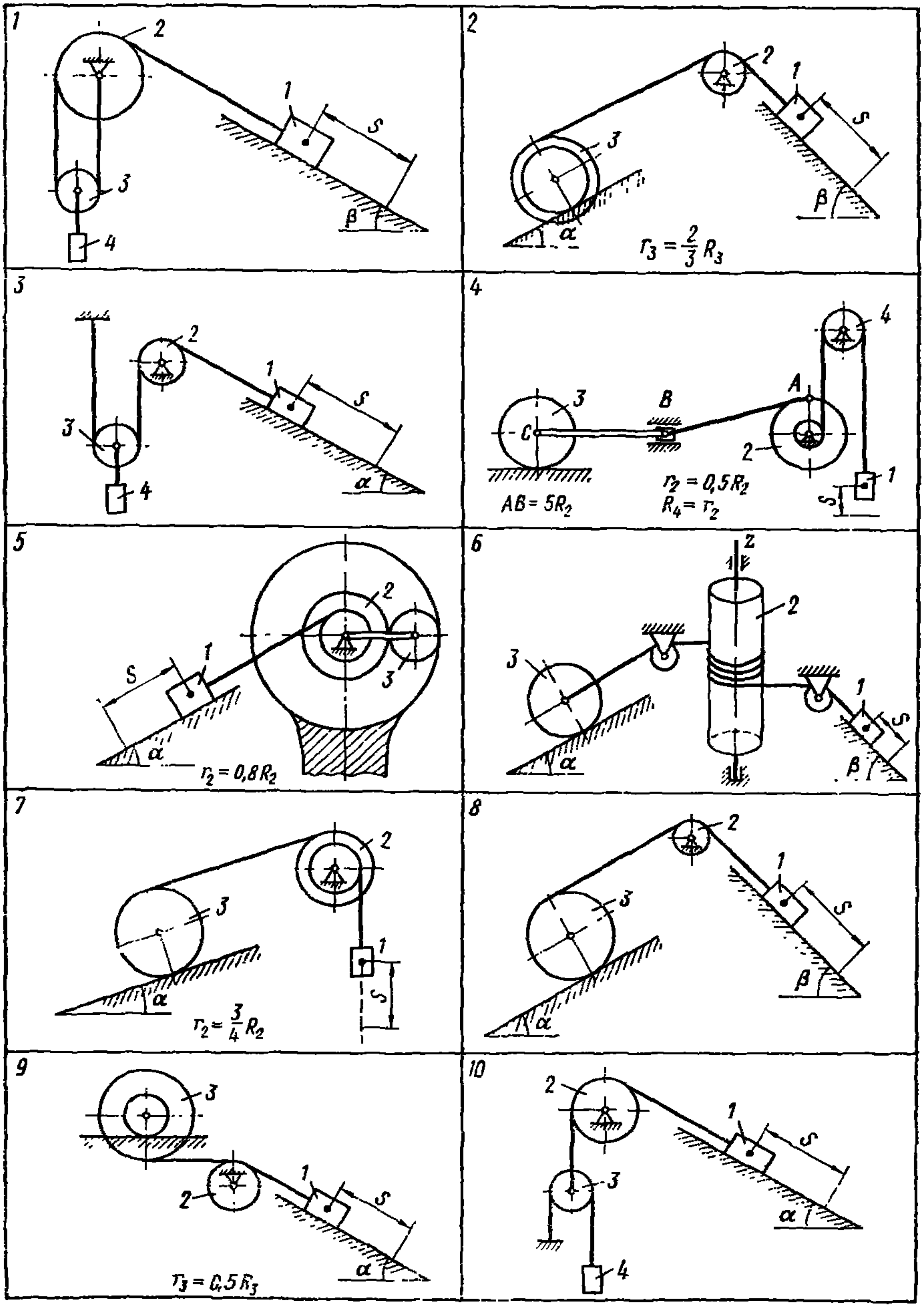

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
$r_3 = \frac{2}{3} R_3$
$AB = 5R_2$
$r_2 = 0,5R_2$
$R_4 = r_2$
$r_2 = 0,8R_2$
$r_2 = \frac{3}{4} R_2$
$r_3 = 0,5R_3$

Рис. 2.1

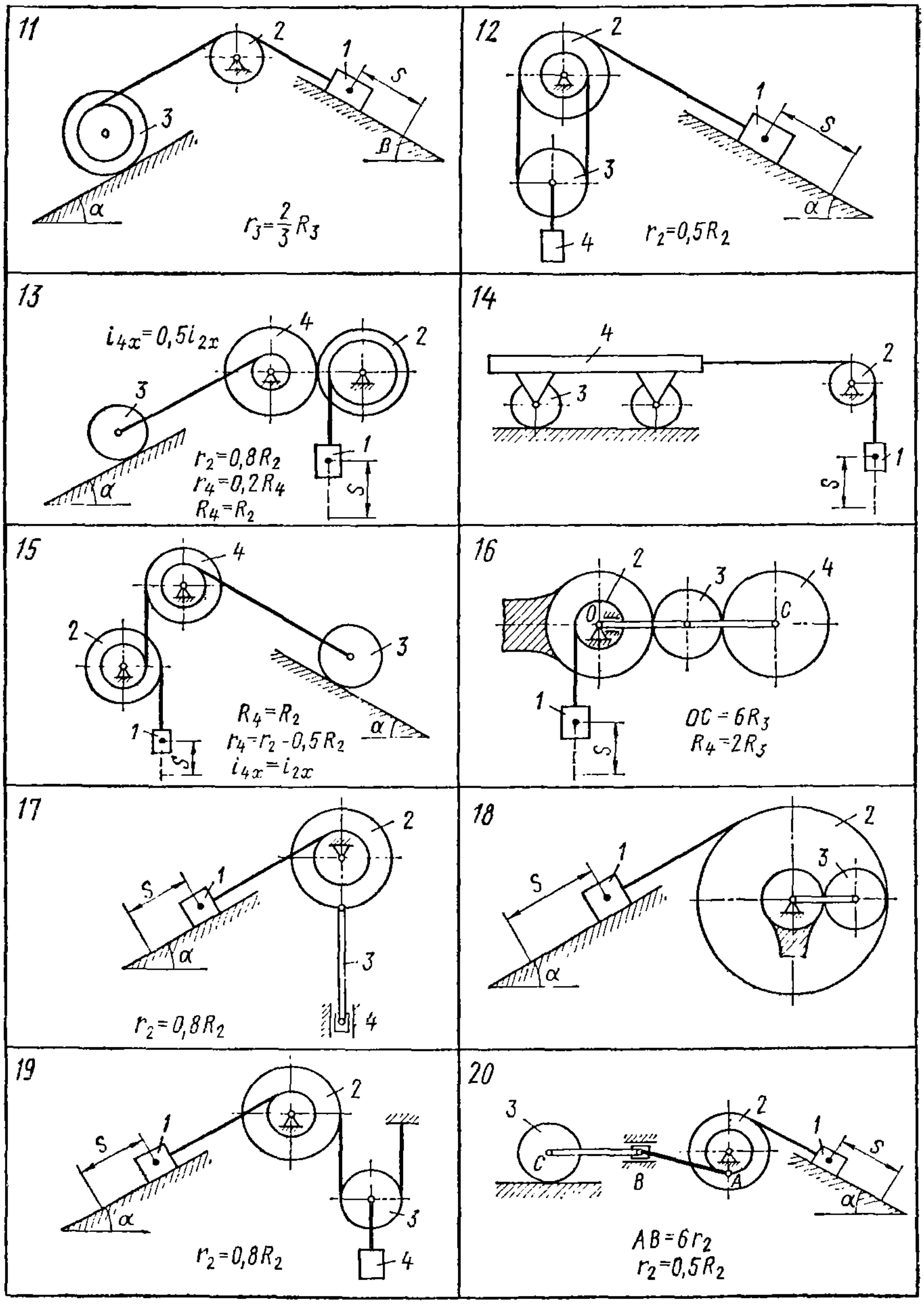

11
2
1
S
3
β
α
$r_3 = \frac{2}{3} R_3$
12
2
1
S
3
α
4
$r_2 = 0{,}5 R_2$
13
$i_{4x} = 0{,}5 i_{2x}$
4
2
3
1
$r_2 = 0{,}8 R_2$
$r_4 = 0{,}2 R_4$
$R_4 = R_2$
S
α
14
4
2
3
1
S
15
4
2
3
1
S
α
$R_4 = R_2$
$r_4 = r_2 - 0{,}5 R_2$
$i_{4x} = i_{2x}$
16
2
3
4
O
C
1
S
$OC = 6R_3$
$R_4 = 2R_3$
17
2
S
1
α
3
4
$r_2 = 0{,}8 R_2$
18
2
1
3
S
α
19
2
S
1
α
3
4
$r_2 = 0{,}8 R_2$
20
3
2
1
C
B
A
S
α
$AB = 6r_2$
$r_2 = 0{,}5 R_2$

Рис. 2.2

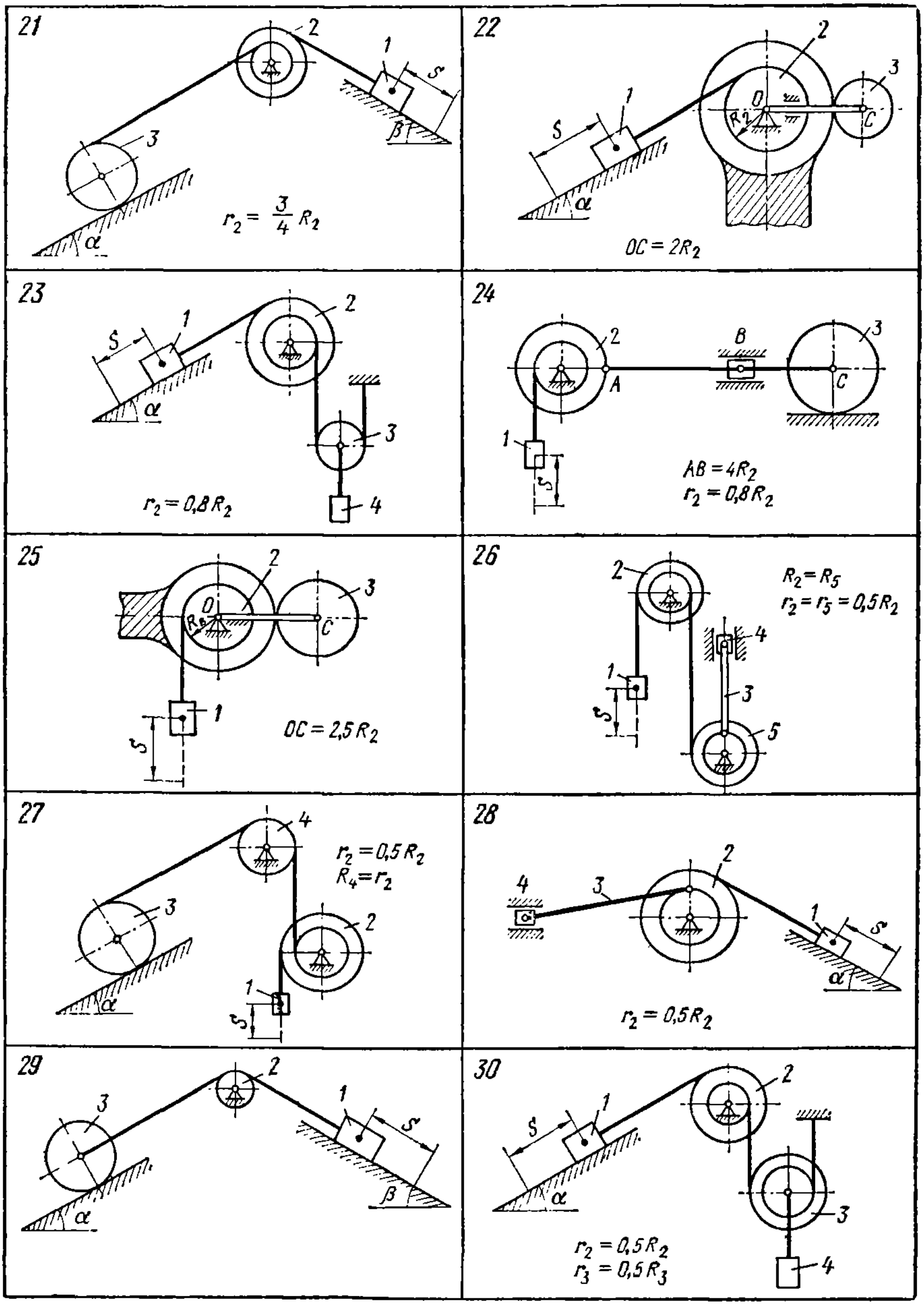

21
$r_2 = \frac{3}{4} R_2$
22
$OC = 2R_2$
23
$r_2 = 0{,}8 R_2$
24
$AB = 4R_2$
$r_2 = 0{,}8 R_2$
25
$OC = 2{,}5 R_2$
26
$R_2 = R_5$
$r_2 = r_5 = 0{,}5 R_2$
27
$r_2 = 0{,}5 R_2$
$R_4 = r_2$
28
$r_2 = 0{,}5 R_2$
29
30
$r_2 = 0{,}5 R_2$
$r_3 = 0{,}5 R_3$

Рис. 2.3

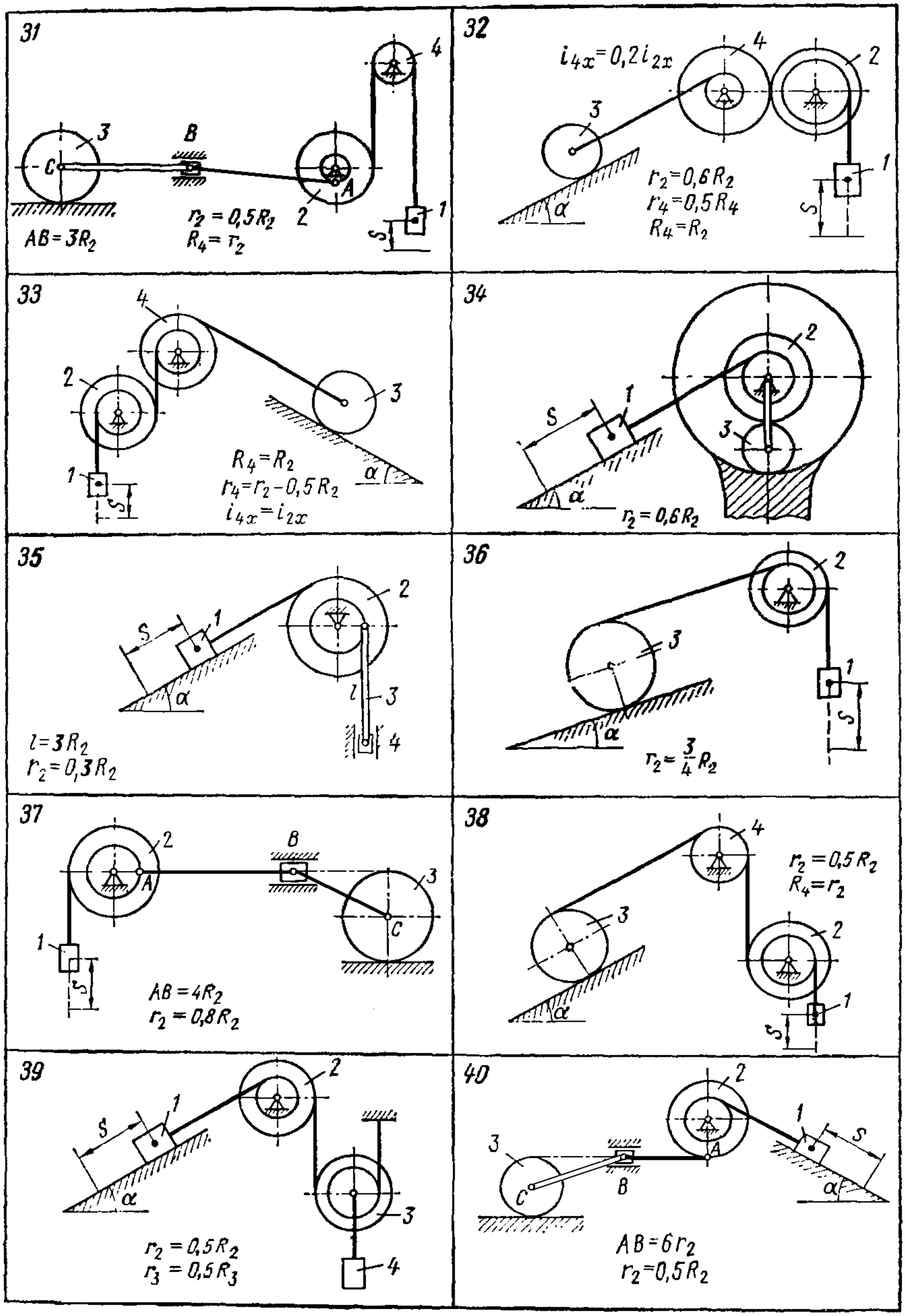

31
AB = 3R2
r2 = 0,5R2
R4 = r2
32
i4x = 0,2 i2x
r2 = 0,6 R2
r4 = 0,5 R4
R4 = R2
33
R4 = R2
r4 = r2 − 0,5 R2
i4x = i2x
34
r2 = 0,6R2
35
l = 3R2
r2 = 0,3R2
36
r2 = 3/4 R2
37
AB = 4R2
r2 = 0,8R2
38
r2 = 0,5 R2
R4 = r2
39
r2 = 0,5R2
r3 = 0,5R3
40
AB = 6r2
r2 = 0,5R2

Рис. 2.4

Приклад виконання завдання

Дано: m_1 – маса вантажу *1*, $m_2 = 2m_1$, $m_3 = m_1$, $m_4 = 0{,}5m_1$, $m_5 = 20m_1$, $R_2 = R_3 = 12$ *см*, $r_2 = 0{,}5R_2$, $r_3 = 0{,}75R_3$, $R_5 = 20$ *см*, $AB = l = 4R_3$, $i_{2\xi} = 8$ *см*, $i_{3x} = 10$ *см*, $\alpha = 30^\circ$, $f = 0{,}1$, $\delta = 0{,}2$ *см*, $s = 0{,}06\pi$ *м*. Опір коченню тіла *2* не враховувати. Шатун *4* вважати тонким однорідним стрижнем; каток *5* – однорідний суцільний циліндр. Масами ланки BC_5 і повзуна *B* знехтувати. На рис. 2.5, *а* показано механічну систему в початковому положенні.

Знайти v_1 – швидкість вантажу *1* у кінцевому положенні.

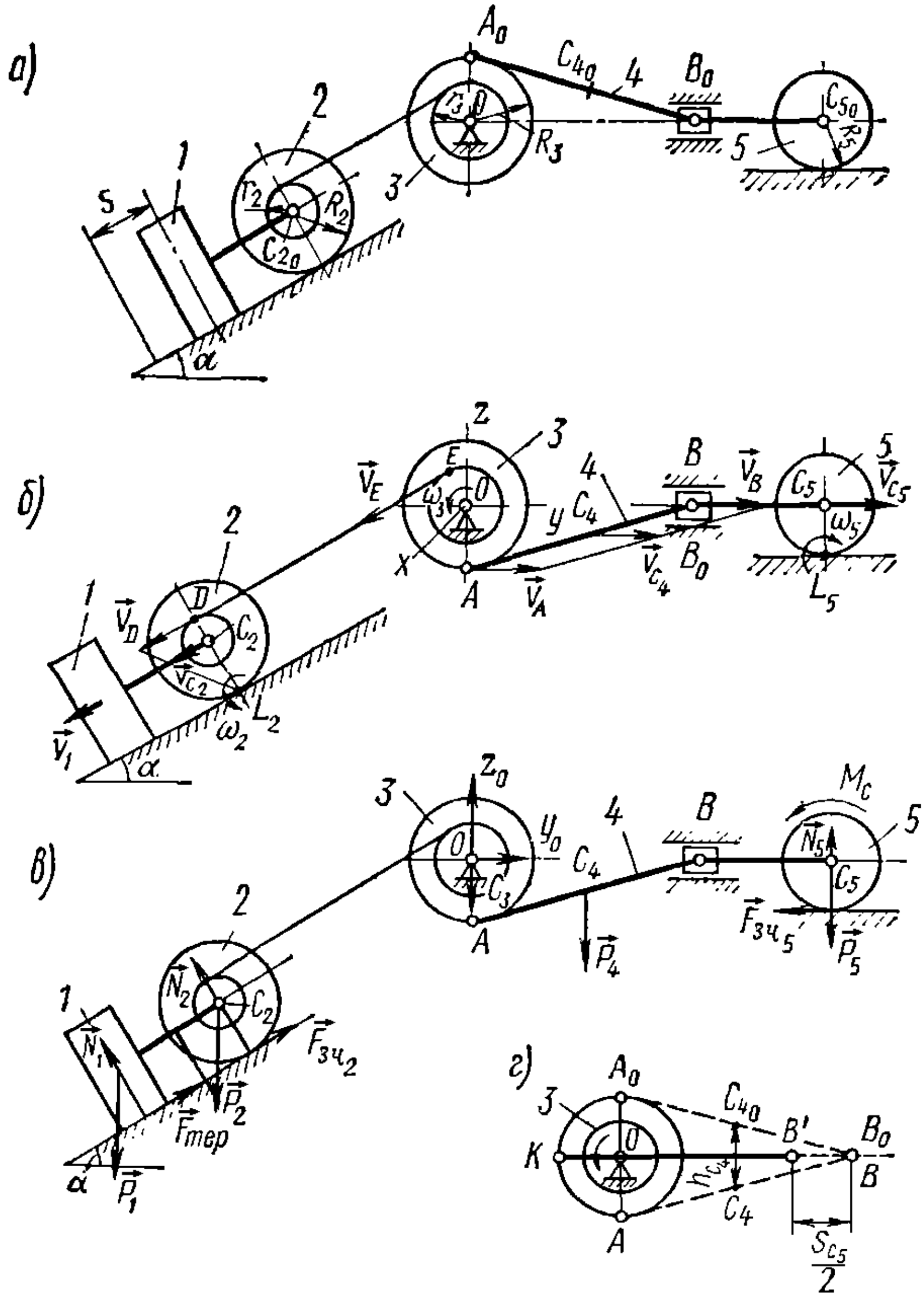


Рис. 2.5

Р о з в ' я з а н н я

Застосуємо теорему про зміну кінетичної енергії системи:

$$T - T_0 = \sum_i A_i^{ex} + \sum_i A_i^{in}, \tag{2.1}$$

де T_0 і T – кінетична енергія системи в початковому і кінцевому положеннях; $\sum_i A_i^{ex}$ – сума робіт зовнішніх сил, прикладених до системи; $\sum_i A_i^{in}$ – сума робіт внутрішніх сил системи.

Для розглянутих систем, що складаються з абсолютно твердих тіл, з'єднаних нерозтяжними нитками і стержнями,

$$\sum_i A_i^{in} = 0.$$

Оскільки в початковому положенні система знаходиться в стані спокою, то $T_0 = 0$.

Отже, рівняння (2.1) набуває вигляду:

$$T = \sum_i A_i^{ex}. \tag{2.2}$$

Кінетична енергія розглянутої системи T в кінцевому її положенні (рис. 2.5, *б*) дорівнює сумі кінетичних енергій тіл *1*, *2*, *3*, *4*, *5*:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5. \tag{2.3}$$

Кінетична енергія вантажу *1*, що рухається поступально,

$$T_1 = m_1 v_1^2 / 2. \tag{2.4}$$

Кінетична енергія катка *2*, що здійснює плоский рух,

$$T_2 = m_2 v_{C2}^2 / 2 + J_{2\xi} \omega_2^2 / 2. \tag{2.5}$$

де v_{C2} – швидкість центра мас C_2 катка *2*

$$v_{C2} = v_1, \tag{2.6}$$

$J_{2\xi}$ – момент інерції катка *2* відносно його поздовжньої центральної осі $C_2\xi$

$$J_{2\xi} = m_2 i_{2\xi}^2, \tag{2.7}$$

ω_2 – кутова швидкість катка *2*.

Так як каток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей катка знаходиться в точці L_2. Тому

$$\omega_2 = v_{C2} / C_2 L_2 = v_1 / R_2. \tag{2.8}$$

Підставляючи (2.6)-(2.8) у формулу (2.5), одержуємо

$$T_2 = \frac{m_2 v_1^2}{2} + \frac{m_2 i_{2\xi}^2 v_1^2}{2R_2^2} = \frac{1}{2} m_2 \left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) v_1^2. \tag{2.9}$$

Кінетична енергія барабанів *3*, що обертаються навколо нерухомої осі *Ox*,

$$T_3 = J_{3x}\omega_3^2/2, \tag{2.10}$$

де J_{3x} – момент інерції барабанів *3* відносно їхньої спільної осі *Ox*:

$$J_{3x} = m_3 i_{3x}^2, \tag{2.11}$$

ω_3 – кутова швидкість барабанів *3*:

$$\omega_3 = v_E/r_3. \tag{2.12}$$

Швидкість точки *E* барабана дорівнює швидкості точки *D* катка, яку можна знайти зі співвідношення:

$$v_D/v_{C2} = (r_2 + R_2)/R_2;$$

а оскільки

$$v_{C2} = v_1, \quad R_2 = 2r_2, \text{ то } v_D/v_1 = 3/2.$$

Отже,

$$v_E = v_D = (3/2)v_1. \tag{2.13}$$

Підставляючи (2.13) в (2.12), отримуємо

$$\omega_3 = (3/2)\cdot v_1/r_3. \tag{2.14}$$

Після підстановки (2.11) і (2.14) в (2.10) вираз для кінетичної енергії барабанів *3* набуває вигляду:

$$T_3 = \frac{m_3 i_{3\xi}^2}{2}\left(\frac{3v_1}{2r_3}\right)^2$$

або

$$T_3 = \frac{9}{8}m_3\frac{i_{3\xi}^2 v_1^2}{r_3^2}. \tag{2.15}$$

Кінетична енергія шатуна *4*, що здійснює плоский рух

$$T_4 = \frac{1}{2}m_4 v_{C4}^2 + \frac{1}{2}J_{4\xi}\omega_4^2,$$

де v_{C4} – швидкість центра мас C_4 шатуна *4*, $J_{4\xi}$ – момент інерції шатуна відносно центральної осі $C_4\xi$, ω_4 – кутова швидкість шатуна *4*.

Для визначення швидкості v_{C4} і кутової швидкості ω_4 знайдемо кінцеве положення шатуна *4*.

Коли вантаж 1 пройде шлях $s = 0{,}06\pi$ *м*, барабан *3* повернеться на кут φ_3. Цей кут φ_3 можна визначити за допомогою формули (2.14); замінюючи в ній $\omega_3 = d\varphi_3/dt$, $v_1 = ds/dt$, одержуємо

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{3}{2r_3}\cdot\frac{ds}{dt} \quad \text{або} \quad d\varphi_3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{ds}{r_3};$$

після інтегрування (при нульових початкових умовах)

$$\varphi_3 = (3/2)\cdot s/r_3 .$$

З отриманого видно, що лінійні і кутові переміщення знаходяться в такій же залежності, як відповідні лінійні і кутові швидкості.

Обчислимо кут

$$\varphi_3 = 3\cdot 0,06\pi/(2\cdot 0,09) = \pi .$$

Це значить, що барабан *3* повернеться на 180°, при цьому шатун *4* з початкового положення A_0B_0 перейде в кінцеве положення *AB* (рис. 2.5, *б*).

Так як швидкості точок *A* і *B* шатуна в цей момент паралельні, то миттєвий центр швидкостей шатуна знаходиться на нескінченності.

Отже, кутова швидкість шатуна в цей момент $\omega_4 = 0$, а швидкості всіх його точок рівні між собою.

Таким чином, кінетична енергія шатуна

$$T_4 = m_4 v_{C4}^2/2, \tag{2.16}$$

де

$$v_{C4} = v_A . \tag{2.17}$$

Обертальна швидкість точки *A* тіла *3* $v_A = \omega_3 R_3$

або з врахуванням (2.14)

$$v_A = (3/2)\, R_3 v_1/r_3 .$$

Оскільки $r_3 = (3/4)R_3$, одержимо $v_A = 2v_1$.

Згідно (2.17)

$$v_{C4} = v_A .$$

Отже,

$$v_{C4} = 2v_1. \tag{2.19}$$

Після підстановки (2.19) в (2.16) вираз кінетичної енергії шатуна *4* набуває вигляду:

$$T_4 = (1/2)m_4(2v_1)^2 = 2m_4 v_1^2. \tag{2.20}$$

Кінетична енергія катка *5*, що здійснює плоский рух:

$$T_5 = m_5 v_{C5}^2/2 + J_{5\xi}\omega_5^2/2,$$

де v_{C5} – швидкість центра мас C_5 катка *5*; $J_{5\xi}$ – момент інерції катка 5 (однорідного суцільного циліндра) відносно його центральної поздовжньої осі $C_5\xi$, $J_{5\xi} = m_5 R_5^2/2$; ω_5 – кутова швидкість катка 5.

Оскільки каток котиться без ковзання, то миттєвий центр швидкостей знаходиться в точці L_5. Тому

$$\omega_5 = v_{C5}/R_5 .$$

Отже,

$$T_5 = \frac{m_5 v_{C5}^2}{2} + \frac{m_5 R_5^2 v_{C5}^2}{2\cdot 2R_5^2} = \frac{3}{4} m_5 v_{C5}^2.$$

Оскільки ланка BC_5 здійснює поступальний рух, то $v_{C5} = v_B$, але $v_B = v_{C4} = 2v_1$. Отже, $v_{C5} = 2v_1$.

Тому вираз для кінетичної енергії катка *5* набуває вигляду:

$$T_5 = (3/4)m_5(2v_1)^2 = 3m_5v_1^2. \qquad (2.21)$$

Кінетична енергія всієї механічної системи визначається за формулою (2.3) з врахуванням (2.4), (2.9), (2.15), (2.20), (2.21):

$$T = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{1}{2}m_2\left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right)v_1^2 + \frac{9}{8}m_3\frac{i_{3x}^2}{r_3^2}v_1^2 + 2m_4v_1^2 + 3m_5v_1^2.$$

Підставляючи сюди задані значення мас, одержуємо

$$T = \frac{m_1v_1^2}{2}\left[1 + 2\left(1 + \frac{i_{2\xi}^2}{R_2^2}\right) + \frac{9}{4}\frac{i_{4C}^2}{r_3^2} + 2 + 120\right]$$

або

$$T = 129 \cdot m_1v_1^2/2. \qquad (2.22)$$

Знайдемо суму робіт всіх прикладених до системи зовнішніх сил при її переміщенні (рис. 2.5, *в*).

Робота сили тяжіння $\vec{P}_1$:

$$A_{P1} = P_1h_1 = m_1gs\sin\alpha. \qquad (2.23)$$

Робота сили тертя ковзання $\vec{F}_{тер}$:

$$A_{тер} = -F_{тер}s,\; F_{тер} = fN_1 = fm_1g\cos\alpha,$$

$$A_{тер} = -fm_1gs\cos\alpha. \qquad (2.24)$$

Робота сили тяжіння $\vec{P}_2$:

$$A_{P2} = P_2h_{C2} = m_2gs\sin\alpha. \qquad (2.25)$$

Робота сил зчеплення $\vec{F}_{зч2}$, $\vec{F}_{зч5}$ катків *2* і *5* дорівнює нулю, тому що ці сили прикладені в миттєвих центрах швидкостей цих катків.

Робота сили тяжіння $\vec{P}_4$:

$$A_{P4} = P_4h_{C4},$$

де h_{C4} – вертикальне переміщення центра мас C_4 шатуна *4* з початкового положення в його кінцеве положення (рис. 2.5, *г*):

$$h_{C4} = R_3,$$

$$A_{P4} = m_4gR_3. \qquad (2.26)$$

Робота пари сил опору коченню катка *5*:

$$A_{M_C} = -M_C\varphi_5, \qquad (2.27)$$

де $M_C = \delta N_5 = \delta P_5$ – момент пари сил опору коченню катка *5*; φ_5 – кут повороту катка *5*. Оскільки каток *5* котиться без ковзання, то кут його повороту:

$$\varphi_5 = s_{C5}/R_5, \qquad (2.28)$$

де s_{C5} – переміщення центра мас C_5 катка 5.

У даному прикладі роботу пари сил опору обчислимо як суму робіт цієї пари при коченні катка 5 вліво при повороті тіла 3 на кут $\pi/2$ і коченні вправо, коли тіло 3 повернеться ще на кут $\pi/2$.

Переміщення центра мас C_5 катка 5 дорівнює переміщенню повзуна *B* вліво і вправо:

$$s_{C5} = 2(B_0B'). \qquad (2.29)$$

Визначимо переміщення B_0B' при повороті тіла 3 на кут $\pi/2$. За початок відліку координати точки *B* виберемо нерухому точку *K* площини (мал. 2.5, *г*). При цьому повороті тіла 3 шатун з положення A_0B_0 перейде в положення KB'. Тоді

$$B_0B' = KB_0 - KB',$$

де

$$KB_0 = KO + OB_0 = R_3 + \sqrt{\left(A_0B_0\right)^2 - \left(A_0O\right)^2} = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2},\ \ KB' = l = 4R_3.$$

Отже,

$$B_0B' = R_3 + \sqrt{l^2 - R_3^2} - l = R_3 + \sqrt{\left(4R_3\right)^2 - R_3^2} - 4R_3 = 0{,}88R_3. \qquad (2.30)$$

Підставляючи (2.30) в (2.29), а потім у (2.28), знаходимо повний кут повороту катка 5:

$$\varphi_5 = 1{,}76\,R_3/R_5. \qquad (2.31)$$

Робота пари сил опору коченню згідно (2.27):

$$A_{M_c} = -\delta m_5 g \cdot 1{,}76 R_3/R_5. \qquad (2.32)$$

Сума робіт зовнішніх сил визначиться додаванням робіт, що обчислюються за формулами (2.23)-(2.26) і (2.32):

$$\sum A_i^{ex} = m_1 gs\cdot\sin\alpha - fm_1 gs\cdot\cos\alpha + m_2 gs\cdot\sin\alpha + m_4 gR_3 - \delta m_5 g\cdot 1{,}76\,R_3/R_5.$$

Підставляючи задані значення мас, одержуємо

$$\sum A_i^{ex} = m_1 gs\left(\sin\alpha - f\cos\alpha + 2\sin\alpha + \frac{R_3}{2s} - \frac{\delta\cdot 20\cdot 1{,}76R_3}{R_5 s}\right)$$

або

$$\sum A_i^{ex} = 1{,}51 m_1 gs. \qquad (2.33)$$

Відповідно до теореми (2.2) дорівняємо значення *T* і $\sum A_i^{ex}$, які знаходяться за формулами (2.22) і (2.33):

$$129\cdot m_1 v_1^2/2 = 1{,}51 m_1 gs,$$

звідки

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\cdot 1{,}51 gs}{129}} = \sqrt{\frac{3{,}02}{129}\cdot 9{,}81\cdot 0{,}06\pi} = 0{,}2\ \text{м/с}.$$

РОЗДІЛ 3. ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛОСКОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

Завдання для лабораторної роботи №11

Визначити максимальну величину сталої сили F, під дією якої колесо масою m котиться без ковзання.

Знайти також для цього випадку рівняння руху центра мас колеса C, якщо в початковий момент часу його координата $x_{C0} = 0$ і швидкість $v_{C0} = 0$.

Варіанти завдання показані на рис. 3.1-3.4, а необхідні для розв'язання дані приведені в табл. 3.1.

У завданні прийнято наступні позначення: i_C – радіус інерції колеса відносно центральної осі, перпендикулярної до його площини; R і r – радіуси великого і малого кіл; $f_{зч}$ – коефіцієнт зчеплення (коефіцієнт тертя спокою); δ – коефіцієнт тертя кочення.

Т а б л и ц я 3.1

Номер варіанта (рис. 3.1-3.2)	m, *кг*	i_C, *см*	R, *см*	r, *см*	α, *град*	β, *град*	$f_{зч}$	δ, *см*
1	300	50	80	40	20	–	0,35	1,0
2	200	40	60	30	–	–	0,20	0,8
3	180	50	60	20	30	–	0,10	0
4	220	30	70	25	30	30	0,20	0
5	240	40	60	15	–	–	0,10	1,0
6	200	–	50	–	15	–	0,20	0,5
7	200	45	60	25	30	15	0,25	0
8	150	40	70	25	15	–	0,50	0
9	250	–	–	–	–	30	0,15	0
10	150	40	50	15	20	–	0,30	0,7
11	200	30	50	20	30	–	0,20	0,6
12	220	–	–	–	30	30	0,25	0
13	140	–	–	–	–	30	0,10	0
14	300	–	–	–	30	–	0,15	0

Номер варіанта (рис. 3.2-3.4)	m, *кг*	i_C, *см*	R, *см*	r, *см*	α, *град*	β, *град*	$f_{зч}$	δ, *см*
15	180	20	50	20	–	15	0,15	0
16	180	30	50	35	–	–	0,15	0,9
17	160	50	60	20	15	20	0,30	0
18	260	–	50	–	–	–	0,10	1,0
19	200	50	60	20	–	20	0,10	0
20	250	40	50	30	20	–	0,25	0
21	200	–	40	–	30	–	0,25	1,2
22	150	30	50	20	–	–	0,25	1,2
23	200	30	60	30	30	15	0,40	0
24	240	30	70	30	15	–	0,15	0
25	100	–	–	–	–	60	0,10	0
26	150	–	–	–	30	15	0,15	0
27	120	–	30	–	–	–	0,40	1,5
28	150	30	60	25	15	–	0,30	0,8
29	200	–	–	–	–	20	0,30	0
30	160	–	40	–	20	–	0,20	0,7
31	150	40	70	25	15	–	0,50	0
32	200	30	50	20	30	–	0,20	0,6
33	180	30	50	35	–	–	0,15	0,9
34	250	–	–	–	–	30	0,15	0
35	200	30	60	30	30	15	0,40	0
36	160	–	40	–	20	–	0,20	0,7
37	250	40	50	30	20	–	0,25	0
38	180	50	60	20	30	–	0,10	0
39	160	50	60	20	15	20	0,30	0
40	150	–	–	–	30	15	0,15	0

Примітка. Колеса, для яких радіуси інерції не зазначені, вважати суцільними однорідними дисками.

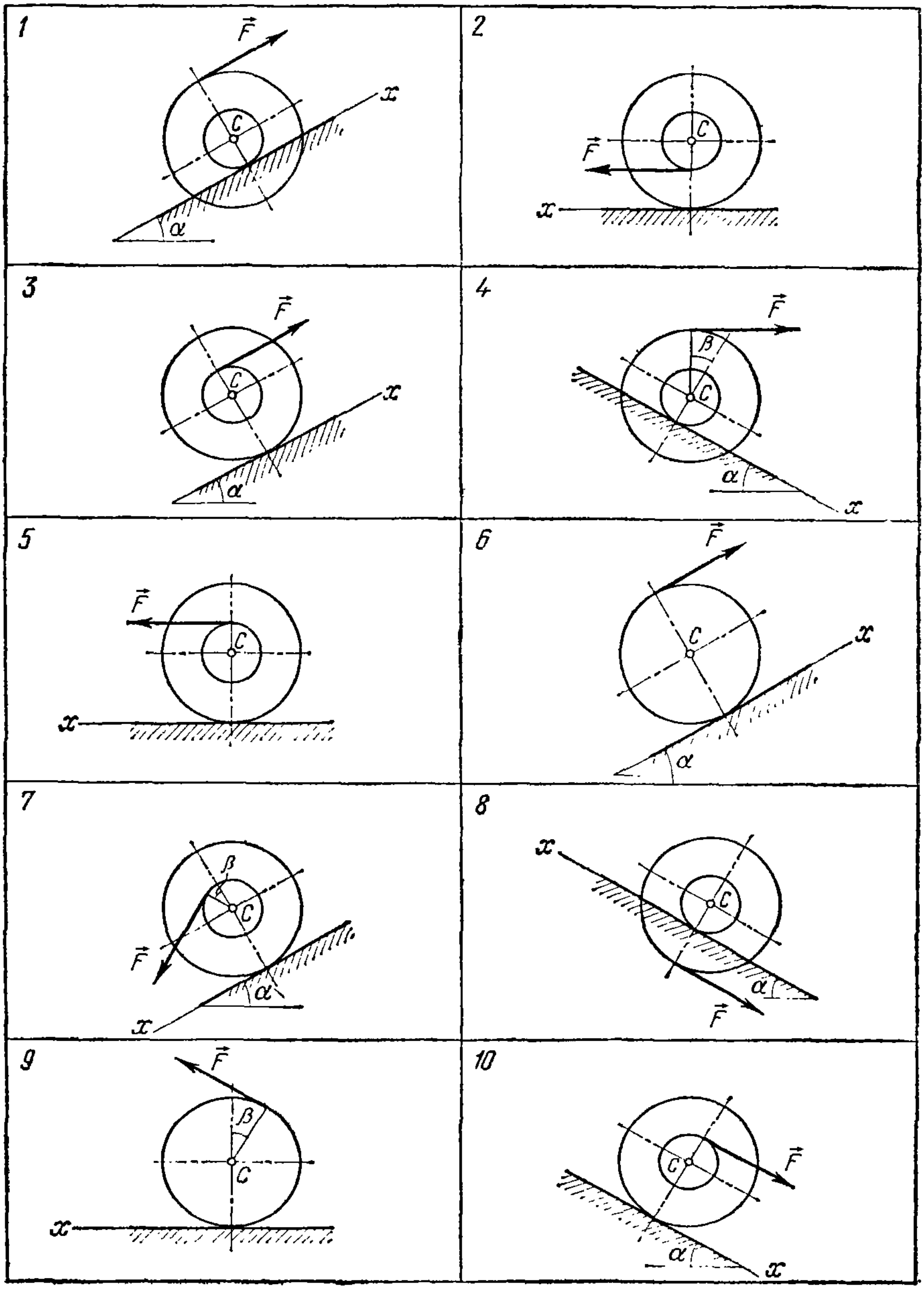
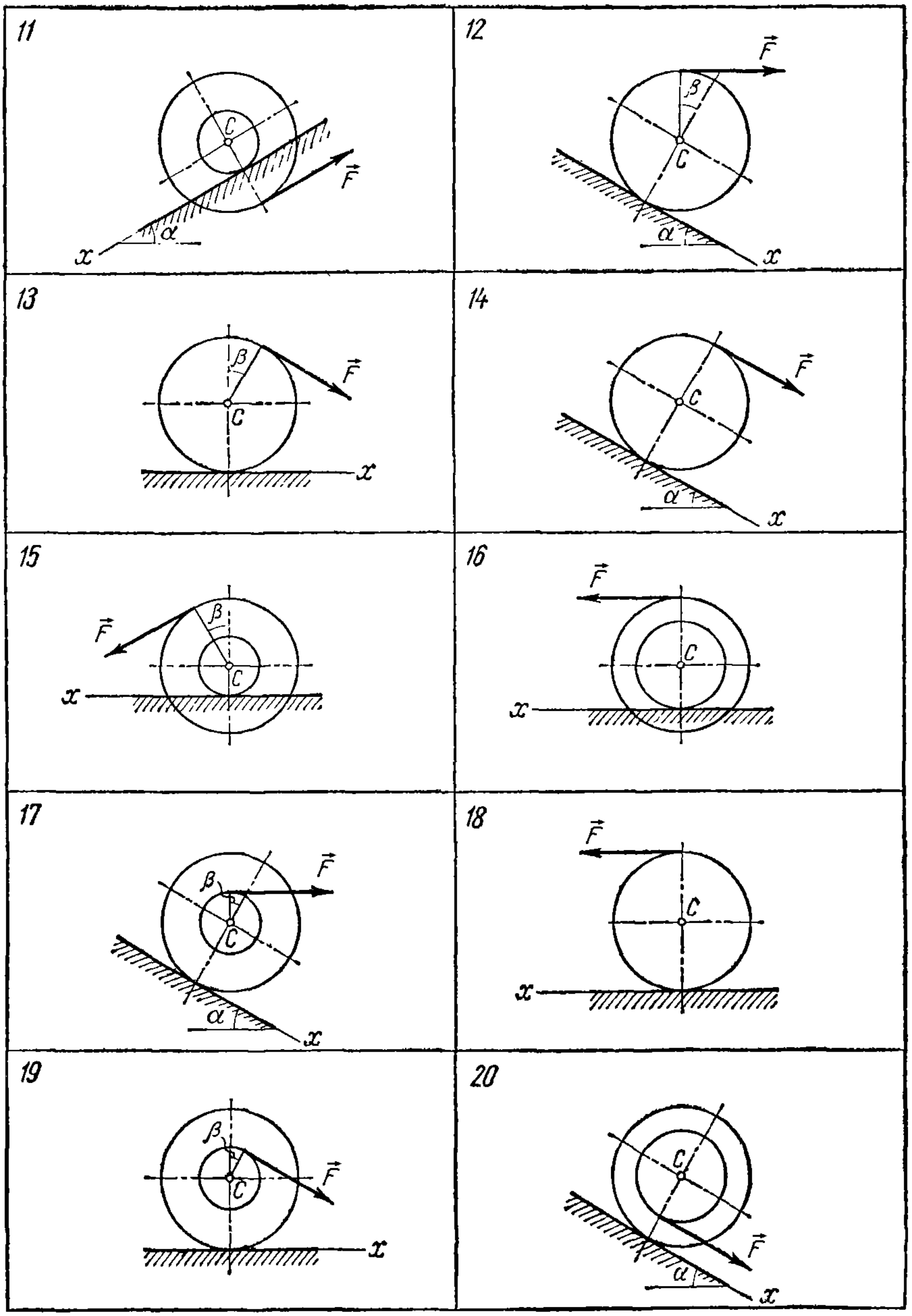

1
F
x
C
α
2
C
F
x
3
F
C
x
α
4
F
β
C
α
x
5
F
C
x
6
F
C
x
α
7
β
C
F
α
x
8
x
C
α
F
9
F
β
C
x
10
C
F
α
x

Рис. 3.1



11
C
F
α
x
12
F
β
C
α
x
13
β
F
C
x
14
C
F
α
x
15
F
β
C
x
16
F
C
x
17
β
F
C
α
x
18
F
C
x
19
β
F
C
x
20
C
F
α
x

Рис. 3.2

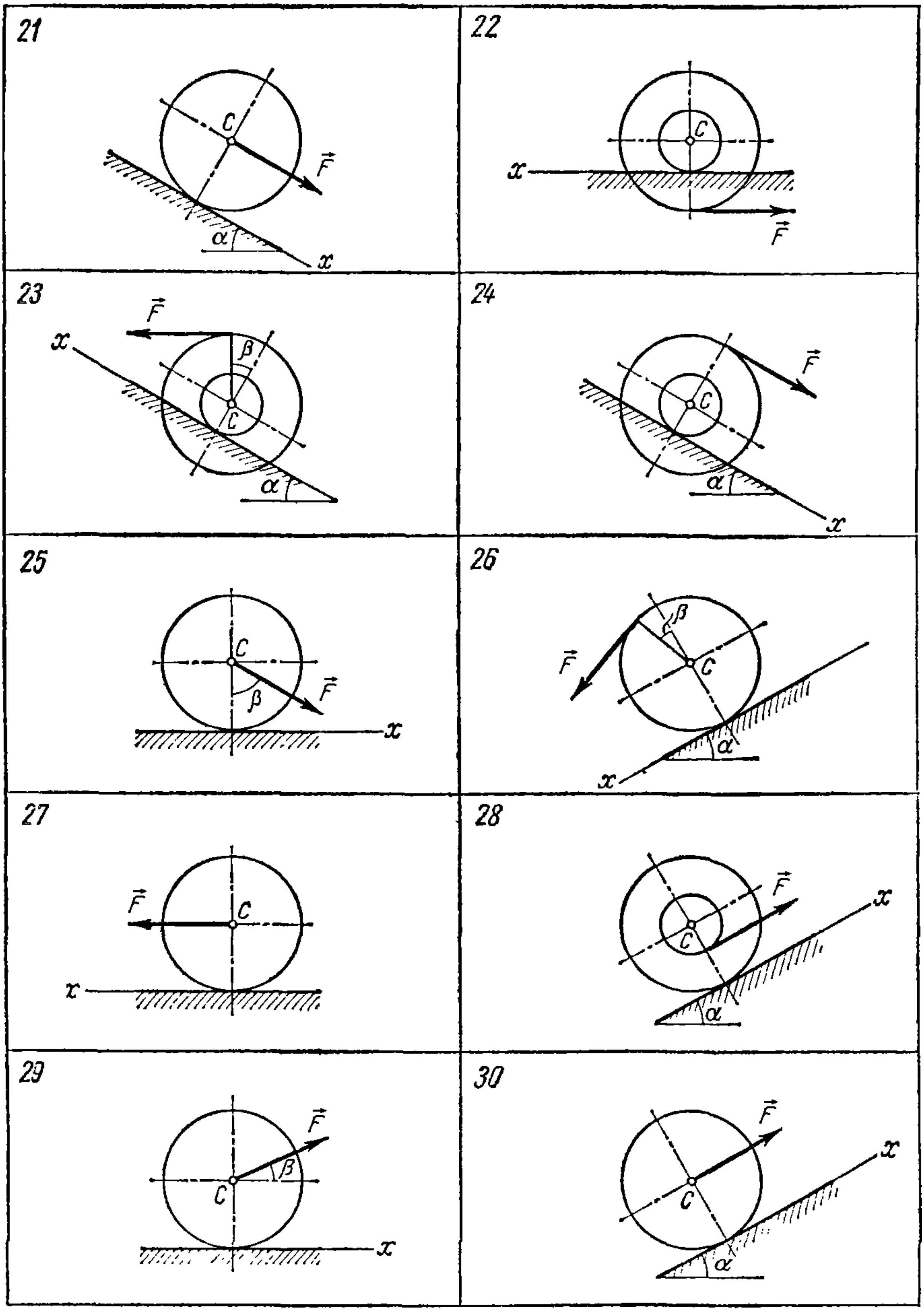

21
C
F
α
x
22
C
x
F
23
F
x
β
C
α
24
F
C
α
x
25
C
F
β
x
26
β
F
C
α
x
27
F
C
x
28
F
x
C
α
29
F
β
C
x
30
F
x
C
α

Рис. 3.3

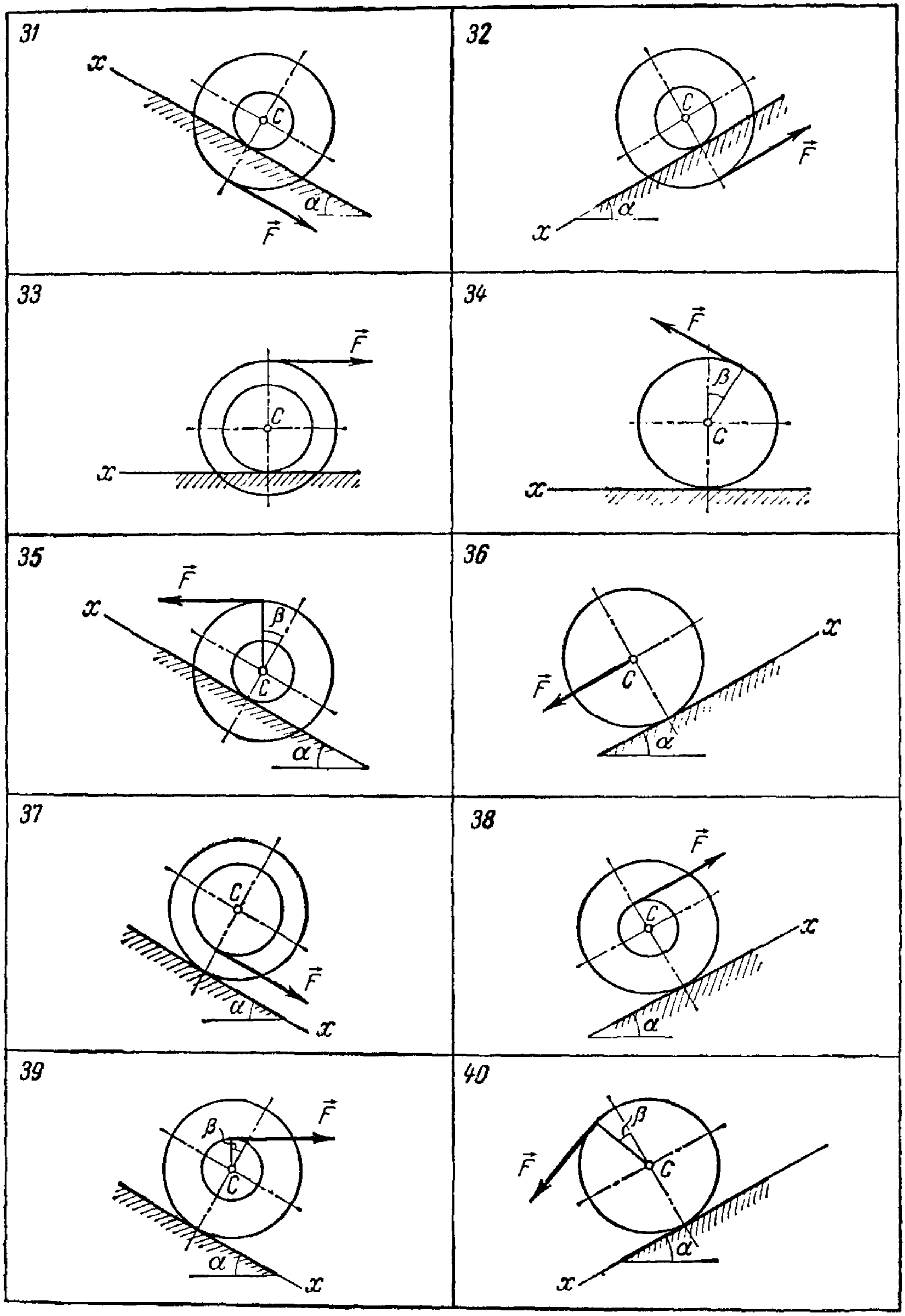


Рис. 3.4

Приклад виконання завдання

Дано (рис. 3.5, *а*): $m = 200кг$; $R = 60см$; $r = 10см$; $i_C = 50см$; $\alpha = 15^\circ$; $\beta = 30^\circ$; $f_{зч} = 0{,}10$; $\delta = 0$.

Р о з в ' я з а н н я

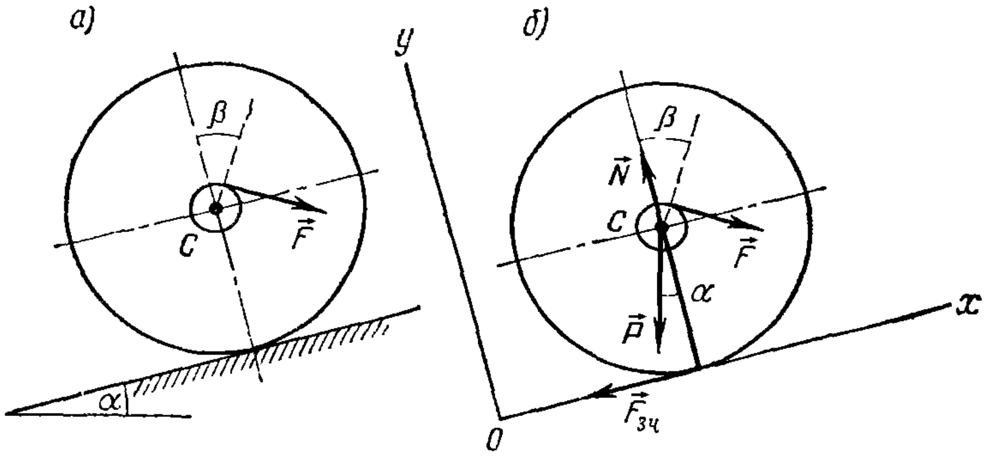


Рис. 3.5

На колесо діють сили: вага колеса $\vec{P}$, нормальна реакція опори $\vec{N}$, сила $\vec{F}$ і сила зчеплення $\vec{F}_{зч}$ (рис. 3.5, *б*) (у випадку, якщо $\delta \neq 0$, необхідно показати момент пари сил опору коченню).

Відповідно до напрямку сили $\vec{F}$ обертання колеса відбувається за годинниковою стрілкою, тобто колесо котиться вгору по похилій площині. Припустимо, що силу $\vec{F}_{зч}$ напрямлена так, як показано на рисунку. Справжній напрямок цієї сили встановлюється в процесі розв'язання задачі. Осі координат вибираємо так, щоб вісь *x* була напрямлена в бік руху колеса (рис. 3.5).

Диференціальні рівняння плоского руху колеса:

$$m\ddot{x}_C = \sum_i F_{ix}^{ex};\ \ m\ddot{y}_C = \sum_i F_{iy}^{ex};\ \ J_C\ddot{\varphi} = \sum_i M_{iCz}^{ex}$$

або в даному випадку

$$m\ddot{x}_C = F\cos\beta - P\sin\alpha - F_{зч}, \qquad (3.1)$$

$$m\ddot{y}_C = N - F\sin\beta - P\cos\alpha, \qquad (3.2)$$

$$J_C\ddot{\varphi} = Fr + F_{зч}R. \qquad (3.3)$$

Знак у моменту сили в рівнянні (3.3) вибираємо додатним, якщо момент сприяє обертанню колеса, і від'ємним – у протилежному випадку.

З рівняння (3.2) випливає, що, оскільки $y = R = const,\ \ddot{y}_C = 0,$ то

$$N = F\sin\beta + P\cos\alpha.$$

При коченні колеса без ковзання кутова швидкість $\omega = v_C/R$ або $\dot{\varphi} = \dot{x}_C/R$, звідки $\ddot{\varphi} = \ddot{x}_C/R$.

Таким чином, рівняння (3.3) набуває наступного вигляду:

$$mi_C^2 \cdot \ddot{x}_C / R = Fr + F_{зч} R. \qquad (3.3')$$

Для виключення $\ddot{x}_C$ поділимо рівняння (3.1) на (3.3′):

$$\frac{R}{i_C^2} = \frac{F\cos\beta - P\sin\alpha - F_{зч}}{Fr + F_{зч}R} \Rightarrow F = \frac{F_{зч}(R^2 + i_C^2) + Pi_C^2 \sin\alpha}{i_C^2 \cos\beta - Rr}. \qquad (3.4)$$

Зауважимо, що вираз (3.4) дає можливість судити про правильність обраного напрямку сили зчеплення. Наближення сили F до свого граничного значення (шуканої величини) супроводжується, звичайно, зростанням сили зчеплення. Тому у виразі (3.4), зведеному до вигляду

$$F = aF_{зч} + b,$$

коефіцієнт a повинний бути додатним. У протилежному випадку варто змінити напрямок $\vec{F}_{зч}$ на зворотний і внести відповідні зміни в диференціальні рівняння (3.1)-(3.3).

Максимальне значення сили зчеплення:

$$F_{зч}^{\max} = f_{зч} N = f_{зч}(F\sin\beta + P\cos\alpha).$$

Підставляючи максимальне значення $F_{зч}$ в рівняння (3.4) і розв’язуючи його відносно F, знайдемо максимальне значення цієї сили, при дії якої колесо котиться без ковзання:

$$F = \frac{P\left[\left(R^2 + i_C^2\right) f_{зч} \cos\alpha + i_C^2 \sin\alpha\right]}{i_C^2 \cos\beta - Rr - \left(R^2 + i_C^2\right) f_{зч} \sin\beta},$$

$$F = \frac{200\left[\left(0,6^2 + 0,5^2\right)\cdot 0,1\cdot 0,966 + 0,5^2 \cdot 0,259\right]\cdot 9,81}{0,5^2 \cdot 0,866 - 0,6\cdot 0,1 - \left(0,6^2 + 0,5^2\right)\cdot 0,1\cdot 0,5} = 196\cdot 9,81 = 1920\ H.$$

Сила зчеплення

$$F_{зч}^{\max} = f_{зч}(F\sin\beta + P\cos\alpha) = 0,1(200\cdot 0,966 + 196\cdot 0,5)\cdot 9,81 =$$
$$= 29\cdot 9,81 = 284H.$$

Диференціальне рівняння руху центра колеса

$$m\ddot{x}_C = F\cos\beta - P\sin\alpha - F_{зч}^{\max}$$

або

$$200\ddot{x}_C = 1920\cdot 0,866 - 200\cdot 9,81\cdot 0,259 - 284,$$

звідки

$$\ddot{x}_C = 4,4\ м/c^2.$$

Двічі інтегруючи це диференціальне рівняння, знаходимо:

$$\dot{x}_C = 4,4t + C_1; \qquad x_C = 2,2t^2 + C_1 t + C_2.$$

Маючи на увазі, що при $t = 0$ $x_{C0} = 0$ і $\dot{x}_{C0} = 0$, визначаємо: $C_1 = 0$ і $C_2 = 0$.

Отже, рівняння руху центра колеса

$$\ddot{x}_C = 2,2t^2\ (м).$$

РОЗДІЛ 4. ЗАСТОСУВАННЯ ПРИНЦИПУ Д’АЛАМБЕРА ДО ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЙ В’ЯЗЕЙ

Завдання для лабораторної роботи №12

Визначити реакції зовнішніх в’язей механічної системи:

а) у довільний момент часу – для варіантів 4, 5, 10, 12-18, 21-30 (рис. 4.1-4.4);

б) у момент часу $t = t_1$ – для варіантів 1, 8, 9, 11, 20 при нульових початкових умовах;

в) у той момент часу, коли кут повороту $\varphi = \varphi_1$ – для варіантів 2, 3, 6, 7;

г) у положенні, вказаному на рисунку для варіантів 15 і 19.

На схемах (рис. 4.1-4.4) площина $xOy\,(xAy)$ горизонтальна, площина $yOz\,(yAz)$ вертикальна. Необхідні для розв’язання дані наведено в табл. 4.1, у якій ω – кутова швидкість, φ_0 і ω_0 – значення кута повороту і кутової швидкості в початковий момент часу.

Т а б л и ц я 4.1

Номер варіанта (рис. 4.1-4.2)	m_1, *кг*	m_2, *кг*	l, *см*	R, *см*	M, *Нм*	ω, c^{-1}	t_1, *с*	φ_1, *град*	φ_0, *град*	ω_0, c^{-1}	Примітка
1	20	–	60	–	10	–	10	–	0	0	Обертання йде в горизонтальній площині
2	25	–	50	–	–	–	–	60	0	0	
3	40	–	80	–	–	–	–	60	0	6,3	
4	20	–	80	–	–	–	–	–	–	–	
5	30	14,4	60	–	–	6	–	–	–	–	
6	40	–	–	30	–	–	–	30	0	0	
7	20	–	–	25	–	–	–	60	0	5,5	
8	50	–	–	30	4,0	–	5	–	0	0	
9	20	30	50	10	$20-0{,}1t$	–	200	–	–	0	При $t = t_1$ координати центрів мас шківів C_1 і C_2, $x_{C1} = 0$, $y_{C1} = -0{,}1$ *см*; $z_{C1} = a + b$, $x_{C2} = 0{,}1$ *см*; $y_{C2} = 0$, $z_{C2} = a$
10	20	5	25	–	–	–	–	–	–	–	
11	25	40	30	–	$5-0{,}1t$	–	50	–	–	0	При $t = t_1$ вісь стержня *1* паралельна y, а вісь стержня *2* паралельна осі x, $l_1 = 25$ *см*, $l_2 = 40$ *см*

Номер варіанта (рис. 4.2-4.4)	m_1, *кг*	m_2, *кг*	l, *см*	R, *см*	M, *Нм*	ω, c^{-1}	t_1, *с*	φ_1, *град*	φ_0, *град*	ω_0, c^{-1}	Примітка
12	30	–	40	–	–	10	–	–	–	–	
13	25	25	40	–	–	15	–	–	–	–	
14	20	20	40	–	–	–	–	–	–	–	
15	20	45	20	–	–	8	–	–	–	–	
16	80	20	–	10	65	–	–	–	–	–	
17	100	10	150	–	160	–	–	–	–	–	Радіус інерції ротора *2* двигуна *3* i_x = 10 *см*
18	30	–	40	–	–	12	–	–	–	–	
19	40	–	60	–	–	9	–	–	–	–	
20	40	–	–	30	3,0	–	4	–	0	2,0	
21	80	10	120	15	124	–	–	–	–	–	Радіус інерції ротора *2* двигуна *3* i_x = 12 *см*
22	100	40	–	20	216	–	–	–	–	–	
23	30	–	60	–	–	9	–	–	–	–	
24	60	20	50	–	–	–	–	–	–	–	
25	50	70	–	20	–	–	–	–	–	–	Радіус інерції шківа *3* i_x = 18 *см*
26	80	200	150	25	–	–	–	–	–	–	Радіус інерції шківа *3* i_x = 22 *см*
27	100	150	120	20	–	–	–	–	–	–	Радіус інерції шківа *3* i_x = 15 *см*
28	80	40	–	–	–	–	–	–	–	–	F = 1300 *Н*
29	20	20	42	–	–	–	–	–	–	–	
30	50	–	60	–	–	12	–	–	–	–	
31	40	14,4	70	–	–	8	–	–	–	–	
32	60	–	–	40	5	–	5	–	0	0	
33	50	–	–	20	–	–	–	40	0	0	
34	35	25	50	–	–	25	–	–	–	–	
35	50	–	70	–	–	10	–	–	–	–	
36	90	50	–	10	200	–	–	–	–	–	
37	100	20	110	25	140	–	–	–	–	–	Радіус інерції ротора *2* двигуна *3* i_x = 10 *см*
38	40	–	30	–	–	15	–	–	–	–	
39	60	–	50	–	–	10	–	–	–	–	
40	90	50	–	–	–	–	–	–	–	–	F = 1200 *Н*

Примітки. 1. Тіла, що входять до складу механічної системи, для яких не вказано радіус інерції, розглядати як тонкі однорідні стержні (варіанти 1-5, 10, 11-15, 18, 19, 23, 24, 29, 30) або суцільні однорідні диски (варіанти 6-9, 16, 20, 22, 28); в варіанті 10 тіло *2* розглядати як матеріальну точку.

2. На схемах 1, 8, 9, 11, 16, 17, 20-22 вказано зовнішні моменти *M*.

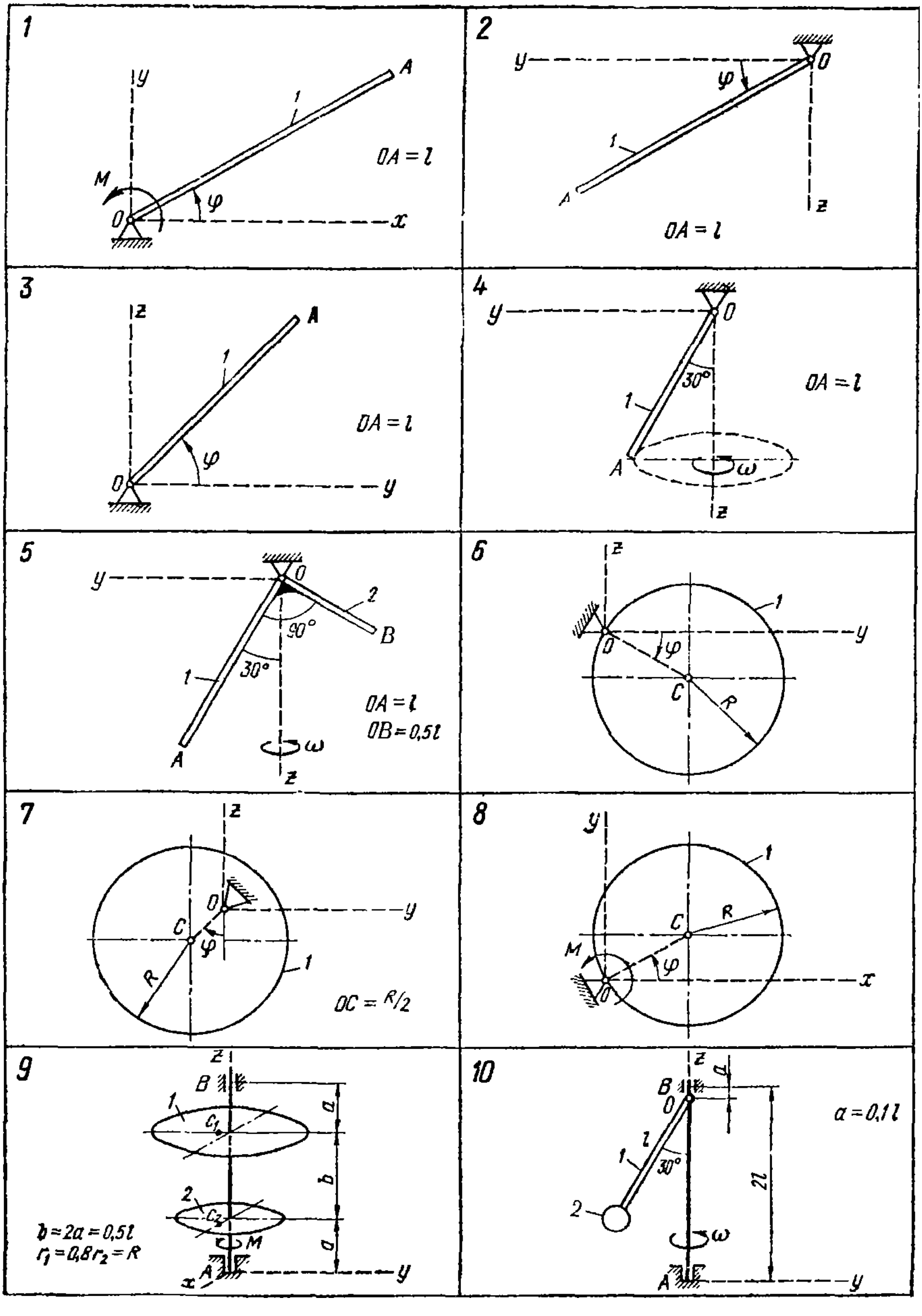

1
OA = l
2
OA = l
3
OA = l
4
OA = l
30°
5
90°
30°
OA = l
OB = 0,5l
6
7
OC = R/2
8
9
b = 2a = 0,5l
r1 = 0,8r2 = R
10
a = 0,1l
2l

Рис. 4.1

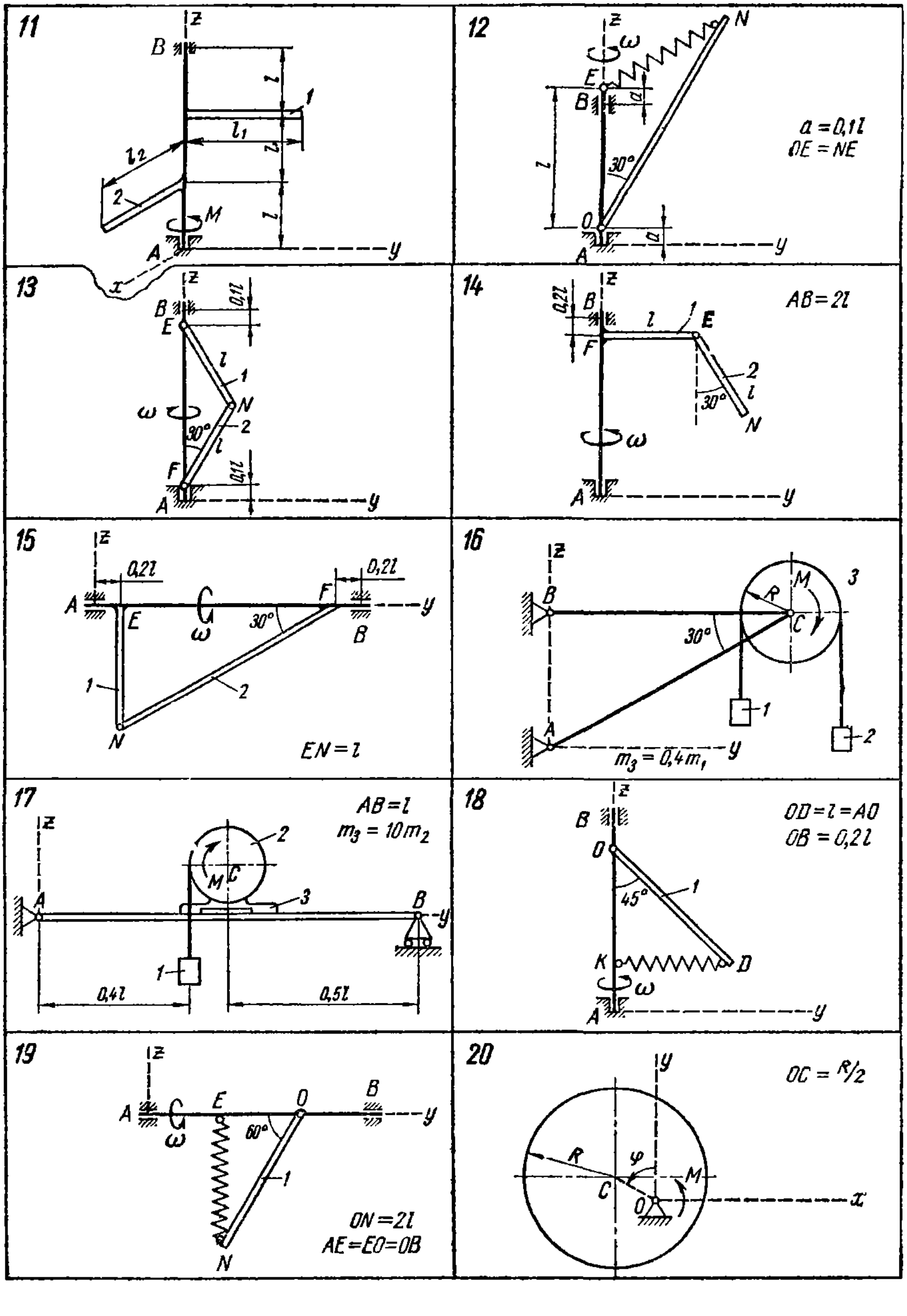

11
12
a = 0,1l
OE = NE
13
14
AB = 2l
15
EN = l
16
m₃ = 0,4m₁
17
AB = l
m₃ = 10m₂
0,4l
0,5l
18
OD = l = AO
OB = 0,2l
19
ON = 2l
AE = EO = OB
20
OC = R/2

Рис. 4.2

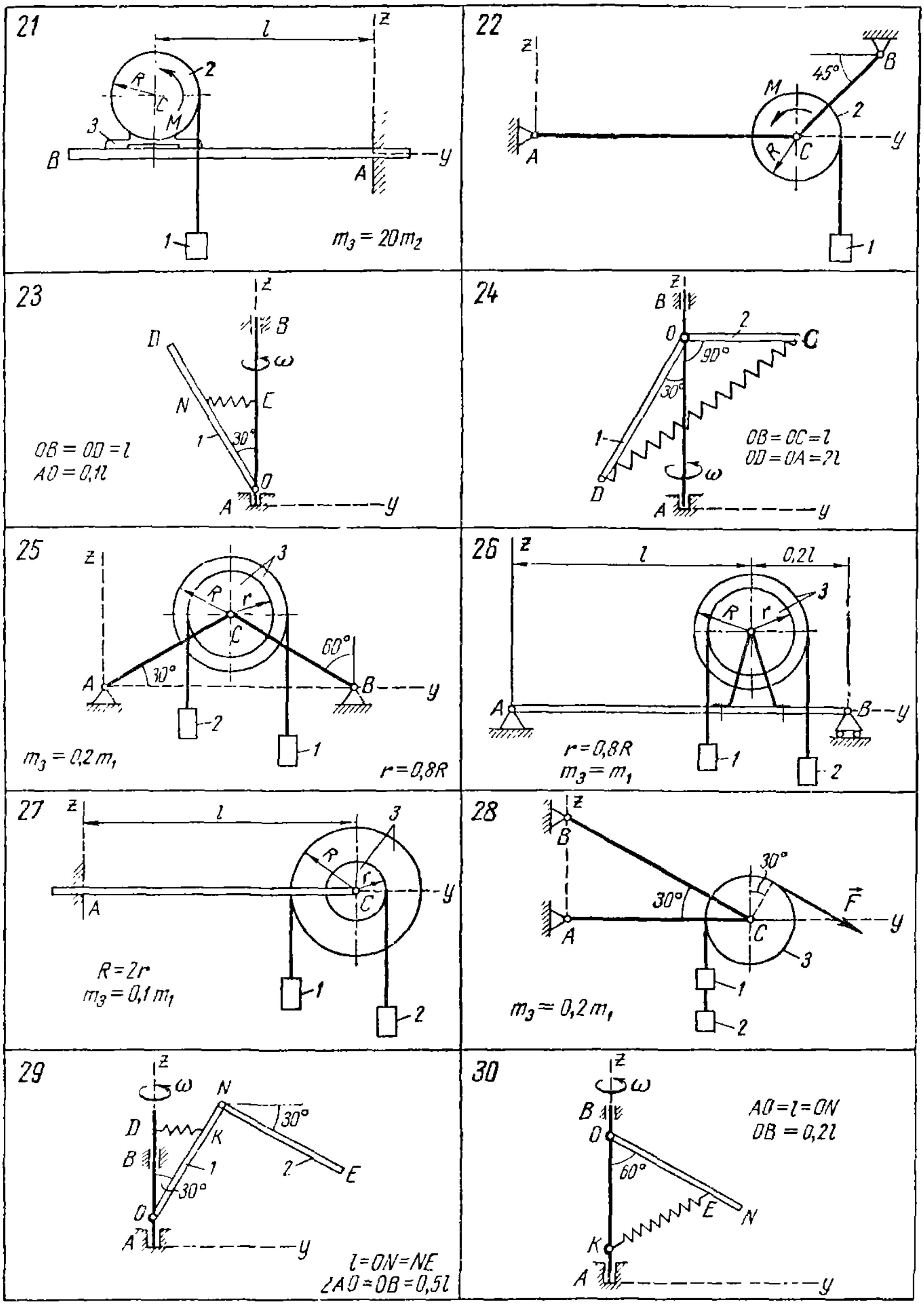

21
l
z
R
C
2
M
3
B
A
y
1
$m_3 = 20m_2$
22
z
B
45°
M
2
A
R
C
y
1
23
z
B
D
ω
N
C
1
30°
OB = OD = l
AO = 0,1l
O
A
y
24
z
B
O
2
C
90°
30°
1
OB = OC = l
OD = OA = 2l
ω
D
A
y
25
z
3
R
r
C
60°
A
30°
B
y
2
1
$m_3 = 0,2\,m_1$
r = 0,8R
26
z
l
0,2l
R
r
3
A
B
y
r = 0,8R
$m_3 = m_1$
1
2
27
z
l
3
R
r
A
C
y
R = 2r
$m_3 = 0,1\,m_1$
1
2
28
z
B
30°
30°
F
A
C
y
3
1
2
$m_3 = 0,2\,m_1$
29
z
ω
N
30°
D
K
B
1
2
E
30°
O
A
y
l = ON = NE
AO = OB = 0,5l
30
z
ω
B
AO = l = ON
OB = 0,2l
O
60°
E
N
K
A
y

Рис. 4.3

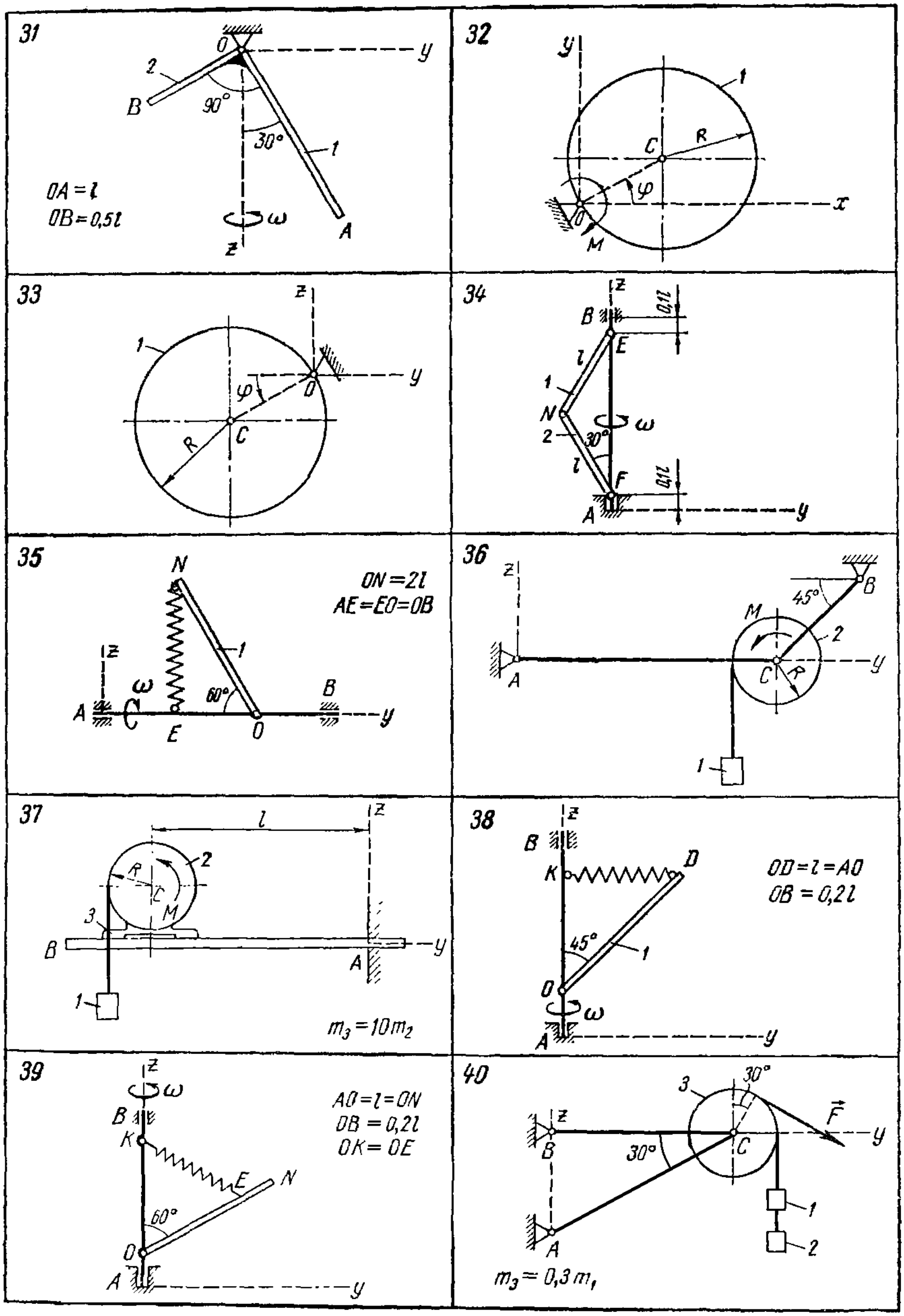

31
OA = l
OB = 0,5l
32
33
34
35
ON = 2l
AE = EO = OB
36
37
m3 = 10m2
38
OD = l = AO
OB = 0,2l
39
AO = l = ON
OB = 0,2l
OK = OE
40
m3 = 0,3 m1

Рис. 4.4

Приклад виконання завдання

Дано: $m_1 = 3$ *кг*; $m_2 = 2$ *кг*; $m_3 = 5$ *кг*; $l_1 = 30$ *см*; $l_2 = 20$ *см*; $\alpha = 30°$; $\omega = 120\ c^{-1} = const$. Схема системи і необхідні розміри наведено на рис. 4.5,*а*.

Знайти реакції підп'ятника *A*, підшипника *B*, а також пружини DN. Поперечними розмірами стержнів *1, 2* і *3* та масою пружини знехтувати.

Р о з в ' я з а н н я

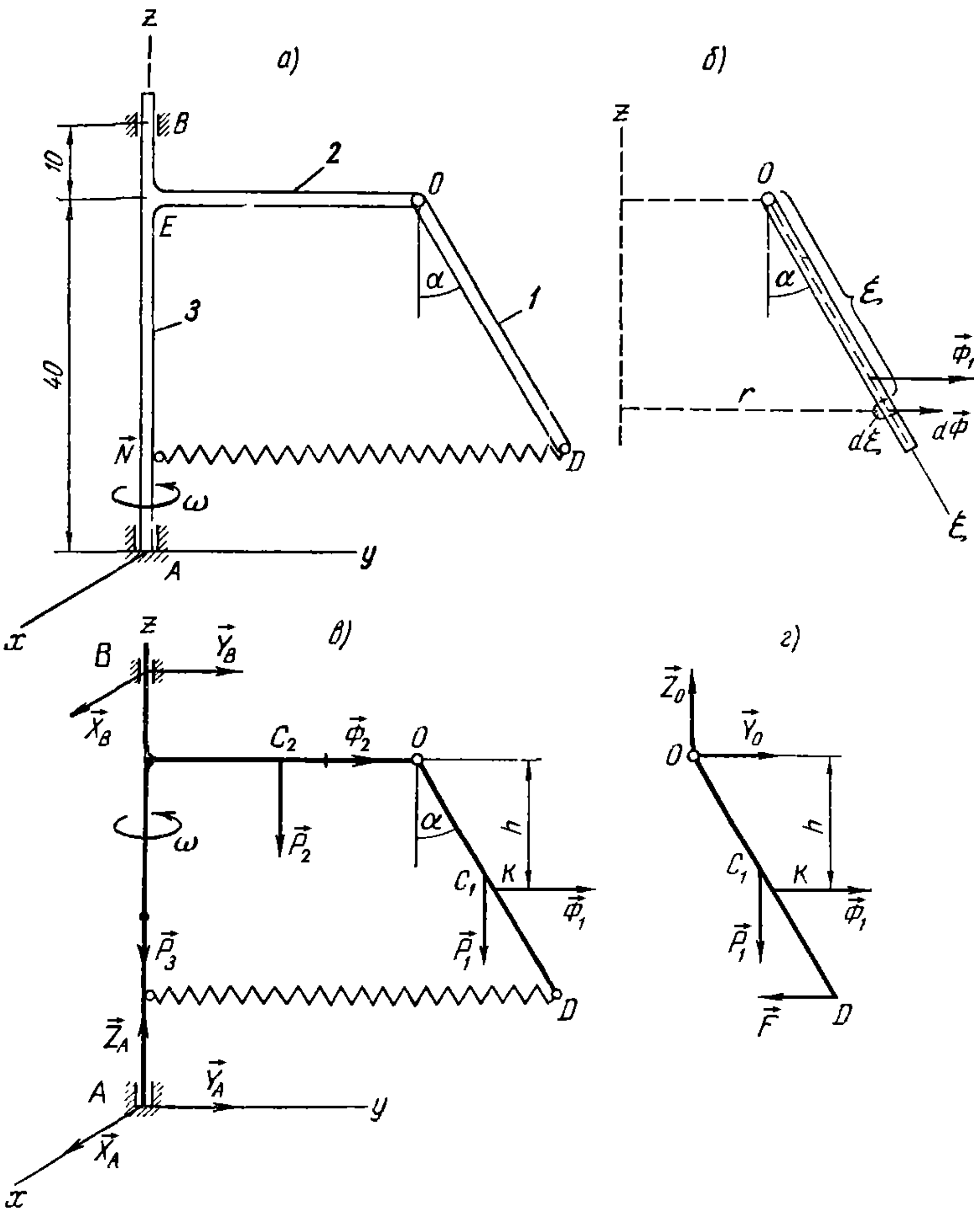


Рис. 4.5

Для визначення реакції в'язей скористаємося принципом Даламбера. Оскільки $\omega = const$, розглянемо тільки відцентрові сили інерції частинок кожного стержня. Відомо, що головний вектор сил інерції точок тіла при обертальному русі визначається за формулою

$$\vec{\Phi} = -m\vec{w}_C,$$

де m – маса тіла, а $\vec{w}_C$ – прискорення центра мас тіла.

Рівнодійна сил інерції точок тіла дорівнює їхньому головному вектору. Тому для стержнів *1* і *2*

$$\Phi_1 = m_1 w_{C1} = m_1\omega^2\left(0{,}5 l_1 \sin\alpha + l_2\right);$$

$$\Phi_2 = m_2 w_{C2} = m_2\omega^2 \cdot 0{,}5 l_2.$$

Для визначення реакцій опор необхідно знати точку прикладання сили $\vec{\Phi}_1$ (лінія дії сили $\vec{\Phi}_2$ збігається з віссю стержня *2* і тому визначена). Оскільки сума моментів паралельних сил інерції точок стержня відносно точки O дорівнює моменту рівнодійної цих сил, то

$$\Phi_1 h = \int_0^{l_1} \xi\cos\alpha\; d\Phi,$$

де h – плече сили $\vec{\Phi}_1$ відносно точки O; $d\Phi$ – сила інерції елемента стержня довжиною $d\xi$, ξ – координата елемента стержня (мал. 4.5, *б*).

Використовуючи значення сили $\vec{\Phi}_1$ і з огляду на те, що

$$d\Phi = \left(l_2 + \xi\sin\alpha\right)\omega^2\gamma\; d\xi,$$

де γ – маса ділянки стержня одиничної довжини, одержуємо

$$m_1\omega^2\left(0{,}5 l_1\sin\alpha + l_2\right)h = \int_0^{l_1}\left(l_2 + \xi\sin\alpha\right)\omega^2\gamma\xi\cos\alpha\; d\xi,$$

звідки після інтегрування

$$h = \frac{l_1\left(l_2 + 2/3\cdot l_1\sin\alpha\right)\cos\alpha}{l_1\sin\alpha + 2l_2} = \frac{30\left(20 + 2/3\cdot 30\cdot 0{,}5\right)}{30\cdot 0{,}5 + 2\cdot 20}\cos\alpha = 16{,}4\cos\alpha.$$

Показуємо складові реакцій підп’ятника $\vec{X}_A,\ \vec{Y}_A,\ \vec{Z}_A$ і підшипника $\vec{X}_B,\ \vec{Y}_B$ сили тяжіння стержнів $\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3$ і сили інерції $\vec{\Phi}_1,\ \vec{\Phi}_2$ (мал. 4.5, *б*). Ці сили повинні задовольняти рівняння, що випливають із принципу Даламбера

$$\sum M_{ix} = 0;\ -Y_B\cdot 50 - \Phi_2\cdot 40 - P_2\cdot 10 - P_1\cdot 27{,}5 -$$
$$-\Phi_1\left(40 - 16{,}4\cos\alpha\right) = 0 \Rightarrow Y_B = -8{,}47\ кН;$$
$$\sum Y_i = 0;\ Y_A + Y_B + \Phi_1 + \Phi_2 = 0 \Rightarrow Y_A = -6{,}28\ кН;$$
$$\sum Z_i = 0;\ Z_A - P_1 - P_2 - P_3 = 0 \Rightarrow Z_A = 0{,}098\ кН.$$

Оскільки розглянуті сили розташовані в площині yAz, то $X_B = X_A = 0$.

Для визначення реакції пружини DN складемо рівняння $\sum M_{iO} = 0$, розглядаючи сили, прикладені до стержня *1* (мал. 4.5, *г*)

$$-P_1\cdot\left(l_1/2\right)\cdot\sin\alpha + \Phi_1 h - F l_1\cos\alpha = 0,$$

звідки $F = 6{,}47\ кН.$

ЛІТЕРАТУРА

1. *Бондаренко А.А., Дубінін, О.О., Переяславцев О.М.* Збірник завдань розрахунково-графічних робіт з теоретичної механіки. – Вінниця: Нова книга, 2004. – 288 с.
2. *Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Д.* Курс теоретической механики: в 2 Т. – М.: Наука, 1998. – 736 с.
3. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики. – М.: Наука, 1972, т.1. – 362 с., т.2. – 412 с.
4. *Кільчевський М.О.* Курс теоретичної механіки, т.1. – К.: Вища школа, 1972. – 376 с.; т.2. – М.: Наука, 1977. – 544 с.
5. *Лойцянский Л.Г., Лурье А.И.* Курс теоретической механіки, т.1. – М.: Наука, 1982. – 352 с.; т.2. – М.: Наука, 1983. – 640 с.
6. *Мещерский И.В.* Сборник задач по теоретической механике. – М.: Наука, 1981. – 480 с.
7. *Павловський М.А.* Теоретична механіка. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
8. *Путята Т.В., Фрадлін Б.Н.* Методика розв’язання задач з теоретичної механіки. – К.: Радянська школа, 1962. – 366 с.
9. *Рейтій О.К.* Теоретична механіка (методичний посібник з лабораторних робіт). Частина І. Кінематика. – Ужгород: Видавництво УжНУ „Говерла”, 2006. – 64 с.
10. *Старжинский В.М.* Теоретическая механика. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
11. *Тарг С.М.* Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986. – 486 с.
12. *Яблонский. А.А. и др.* Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике. – М.: Высшая школа, 1972. – 432 с.

Підписано до друку 24.11.07. Формат 60х84/16. Умовн. друк. арк.
Облік.-вид. арк. Друк офсетний. Зам. № Наклад 200 прим.

Видавництво УжНУ «Говерла»
м. Ужгород, вул. Капітульна, 18.

*Свідоцтво про внесення до державного реєстру видавців, виготовників і розповсюджувачів видавничої продукції – **Серія Зт №32***