

УДК 519.6

В. М. Білецький (Львівський нац. ун-т)

ОБЧИСЛЮВАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ УЗАГАЛЬНЕНОГО РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ

In this paper a computational schema is given for the method of generalized separation of variables in a general case. We also consider a problem discretization and a few possible ways to find terms of the method solution approximation series.

У роботі описано обчислювальну схему методу узагальненого розділення змінних для загального випадку, розглянуто дискретизацію задачі та деякі з можливих способів знаходження доданків наближеного розв'язку.

Вступ. Метод узагальненого розділення змінних запропоновано у [1, 2] для розв'язування багатовимірних інтегральних і матричних рівнянь та їх варіаційних аналогів. Також метод використовують для розв'язування обернених та оптимізаційних задач математичної фізики [3]. Метод узагальненого розділення змінних дозволяє зменшити розмірність багатовимірної задачі, а також досягнути компактності представлення розв'язку.

Ідея методу полягає у представленні розв'язку задачі $Au = f$ у вигляді суми доданків з розділеними змінними $u(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^d \phi_j^{(k)}(x_j)$, які обчислюють послідовно згідно умови мінімуму функціонала

$$J_f(\phi_1, \dots, \phi_d) = \|f - A(\phi_1 \otimes \dots \otimes \phi_d)\|^2 \rightarrow \min.$$

Тут функції u та f належать простору інтегровних з квадратом у деякій обмеженій області функцій, а оператор A , що діє у цьому просторі, є лінійним та неперервним.

У [4] розвинуто метод узагальненого розділення змінних та запропоновано його модифікацію, що мінімізує на кожному кроці норму відхилення розв'язку та його наближення.

Обчислювальна схема. Опишемо основну ідею та обчислювальну схему методу узагальненого розділення змінних. Нехай H_j , $j = 1, \dots, d$ — комплексні сепарабельні гільбертові простори, а $(\cdot, \cdot)_j$ — скалярний добуток у просторі H_j , $j = 1, \dots, d$, що породжує норму простору $\|\cdot\|_j$. Нехай H — тензорний добуток цих просторів $H = \bigotimes_{j=1}^d H_j$ з відповідною нормою $\|\cdot\|$, що породжена скалярним добутком (\cdot, \cdot) .

Зауваження 1. H також є комплексним сепарабельним гільбертовим простором, а для довільних $h_j^{(1)}, h_j^{(2)} \in H_j$, $j = 1, \dots, d$ виконується рівність

$$\left(h_1^{(1)} \otimes \dots \otimes h_d^{(1)}, h_1^{(2)} \otimes \dots \otimes h_d^{(2)} \right) = \prod_{j=1}^d \left(h_j^{(1)}, h_j^{(2)} \right)_j. \quad (1)$$

Розглянемо лінійне операторне рівняння

$$Au = f, \quad (2)$$

де $u, f \in H$, $A \in \mathfrak{L}(H)$ — лінійний неперервний оператор, для якого існує неперервний обернений оператор

$$\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(H). \quad (3)$$

Зауваження 2. За таких умов для оператора A існує спряжений оператор, що також є лінійним та неперервним $\exists A^* \in \mathfrak{L}(H)$ [5].

Зауваження 3. Рівняння (2) у просторі H має єдиний розв'язок.

Нехай G — множина всіх розкладних елементів простору H по просторах H_j , $j = 1, \dots, d$

$$G = \left\{ \bigotimes_{j=1}^d h_j : h_j \in H_j, j = 1, \dots, d \right\}, \quad (4)$$

а G_A — множина відображень елементів множини G оператором A

$$G_A = A(G) = \{Ag : g \in G\}. \quad (5)$$

Ідея методу узагальненого розділення змінних полягає у наближенні розв'язку лінійного операторного рівняння (2) сумою елементів множини G . За наближений розв'язок приймають часткову суму ряду

$$\sum_{j=1}^{\infty} g_j, \quad g_j \in G, \quad (6)$$

де k -ий доданок визначається згідно умови

$$\left\| f - A \left(\sum_{j=1}^{k-1} g_j + g_k \right) \right\| = \inf_{g \in G} \left\| f - A \left(\sum_{j=1}^{k-1} g_j + g \right) \right\|. \quad (7)$$

Доданки ряду (6) знаходять послідовно згідно умови (7), таким чином формулюючи послідовність наближених розв'язків.

Питання існування елемента g_k у просторі H розглянемо нижче, а поки що припустимо, що такий елемент існує завжди.

Означення 1. k -им наближенням розв'язку рівняння (2) називається сума перших k доданків ряду (6)

$$u_k = \sum_{j=1}^k g_j, \quad u_0 = 0_H, \quad (8)$$

де 0_H — нуль простору H .

Означення 2. k -им уточненням наближеного розв'язку рівняння (2) називається k -ий доданок ряду (6)

$$g_k = u_k - u_{k-1}. \quad (9)$$

Зауваження 4. Після побудови k -го наближення розв'язку, віднявши від правої частини рівняння (2) елемент Au_k , ми отримуємо таке ж рівняння як і (2), але з іншою правою частиною — $f - Au_k$.

Означення 3. Для рівняння (2) k -им залишковим рівнянням називається рівняння $Au = f - Au_k$.

Нехай f_k — права частина k -го залишкового рівняння

$$f_k = f - Au_k = f - A \left(\sum_{j=1}^k g_j \right), \quad f_0 = f. \quad (10)$$

Припущення 1. Для k -го залишкового рівняння Ag_{k+1} є елементом найкращого наближення його правої частини f_k на множині G_A

$$\|f_k - Ag_{k+1}\| = \inf_{g \in G_A} \|f_k - g\|.$$

Доведення. Випливає з означення множини G_A (5) та умови вибору елемента g_{k+1} (7).

Дамо формальне визначення обчислювальної схеми методу узагальненого розділення змінних таким чином:

Крок 1. Приймаємо $k = 0$ та $u_0 = 0_H$ — початкове наближення розв'язку рівняння (2).

Крок 2. Збільшуємо k на одиницю та знаходимо k -те уточнення наближеного розв'язку g_k згідно умови (7).

Крок 3. Обчислюємо k -те наближення розв'язку рівняння (2) $u_k = u_{k-1} + g_k$.

Крок 4. Якщо виконується критерій зупинки методу, то переходимо до кроку 5, інакше переходимо до кроку 2.

Крок 5. Приймаємо за наближений розв'язок рівняння (2) k -те наближення його розв'язку u_k та закінчуємо роботу методу.

Можливі способи знаходження уточнень наближеного розв'язку g_k розглянемо нижче.

Зауваження 5. Критерієм зупинки може бути достатньо мале відносне значення правої частини залишкового рівняння

$$\frac{\|f_k\|}{\|f\|} = \frac{\|f - Au_k\|}{\|f\|} < \epsilon, \quad (11)$$

чи достатньо мале відносне уточнення наближеного розв'язку

$$\frac{\|g_k\|}{\|u_{k-1}\|} = \frac{\|u_k - u_{k-1}\|}{\|u_{k-1}\|} < \epsilon. \quad (12)$$

У роботі [6] доведено збіжність послідовності наближених розв'язків методу узагальненого розділення змінних до точного розв'язку рівняння (2), а також існування елемента множини (4), що задовольняє умові (7).

Дискретизація задачі. На практиці для використання методу узагальненого розділення змінних для відшукування наближеного розв'язку нескінченновимірному рівняння (2) останнє повинно бути заміненим деяким скінченновимірним аналогом

$$A_n u_n = f_n. \quad (13)$$

Тут $u_n, f_n \in H^{(n)}$, $A_n \in \mathcal{L}(H^{(n)})$, де $H^{(n)}$ — n -вимірний лінійний простір.

Зауваження 6. Простір $H^{(n)}$ є скінченновимірним наближенням простору H , простір $\mathfrak{L}(H^{(n)})$ — скінченновимірним наближенням простору $\mathfrak{L}(H)$, а елементи u_n , f_n та A_n — відображеннями елементів u , f та A відповідно з нескінченновимірних просторів у їх скінченновимірні наближення.

Виберемо у просторі $H^{(n)}$ ортонормований базис $\{e_j, j = 1, \dots, n\}$. Тоді елементи u_n та f_n можуть бути представлені векторами, що містять по n координат, а оператор A_n — матрицею розміру $n \times n$.

Зауваження 7. Розв'язання задачі (13) еквівалентне розв'язанню системи n лінійних алгебричних рівнянь, що має n невідомих.

Оскільки простір H має специфічну структуру, тобто є тензорним добутком нескінченновимірних просторів $H_j, j = 1, \dots, d$, то ми можемо наблизити ці простори деякими скінченновимірними лінійними просторами $H_j^{(n_j)}$ ($\dim H_j^{(n_j)} = n_j$), $j = 1, \dots, d$ відповідно, а за наближення простору H прийняти тензорний добуток таких просторів

$$H^{(n)} = \bigotimes_{j=1}^d H_j^{(n_j)}. \quad (14)$$

Зауваження 8. Розмірність простору $H^{(n)}$ рівна добутку розмірностей просторів $H_j^{(n_j)}$ $j = 1, \dots, d$ $n = \dim H^{(n)} = \prod_{j=1}^d \dim H_j^{(n_j)} = \prod_{j=1}^d n_j$.

Виберемо у просторах $H_j^{(n_j)}$, $j = 1, \dots, d$ ортонормовані базиси

$$\left\{ e_j^{(k_j)} : k_j = 1, \dots, n_j \right\}, \quad j = 1, \dots, d.$$

Тоді за ортонормований базис простору $H^{(n)}$ можна прийняти множину тензорних добутків відповідних елементів цих базисів

$$\left\{ \bigotimes_{j=1}^d e_j^{(k_j)} : k_j = 1, \dots, n_j, \quad j = 1, \dots, d \right\}.$$

Зауваження 9. Якщо $n > 0$, то для рівняння (13) можна сформулювати та довести скінченновимірні аналоги усіх тверджень, що стосуються нескінченновимірного рівняння (2).

Аналогічно до нескінченновимірного випадку розглянемо множину розкладних елементів

$$G^{(n)} = \left\{ \bigotimes_{j=1}^d h_j : h_j \in H_j^{(n_j)}, \quad j = 1, \dots, d \right\}.$$

За наближений розв'язок рівняння (13) приймають часткову суму ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k, \quad g_k \in G^{(n)}. \quad (15)$$

Для представлення кожного доданку ряду (15) замість всіх n координат g_k як елемента простору $H^{(n)}$ достатньо зберігати координати відповідних елементів просторів $H_j^{(n_j)}$, $j = 1, \dots, d$.

Зауваження 10. Чисельне представлення довільного елемента простору $H^{(n)}$ вимагає збереження інформації розміру

$$\mathcal{O} \left(\prod_{j=1}^d n_j \right), \quad (16)$$

поряд з тим як для представлення довільного елемента множини G достатнім є збереження інформації розміру

$$\mathcal{O} \left(\sum_{j=1}^d n_j \right). \quad (17)$$

Легко бачити, що з одночасним збільшенням розмірностей всіх просторів $H_j^{(n_j)}$, $j = 1, \dots, d$ величина (16) зростає експоненціально, а величина (17) — лінійно.

Отже, за умови відносно невеликої кількості доданків наближеного розв'язку, метод узагальненого розділення змінних дає компактне представлення наближеного розв'язку рівняння (13) та дозволяє суттєво зменшити затрати обчислювальних ресурсів.

Методи знаходження доданків розв'язку. Розглянемо деякі з можливих способів знаходження уточнень наближеного розв'язку рівняння (2). Як було показано вище існує принаймні один такий елемент з множини вибору уточнень G , що задовольняє умові вибору (7). Задача знаходження уточнення наближеного розв'язку згідно цієї умови є еквівалентною задачі мінімізації такого функціонала

$$J_f(h_1, \dots, h_d) = \left\| f - A \left(\bigotimes_{j=1}^d h_j \right) \right\|^2, \quad h_j \in H_j, \quad j = 1, \dots, d. \quad (18)$$

Зауваження 11. Задача мінімізації функціонала (18) є, взагалі кажучи, нелінійною.

Для мінімізації функціонала (18) можна використати будь-які методи мінімізації нелінійних функціоналів.

Зауваження 12. При фіксованих всіх параметрах функціонала (18), окрім деякого одного h_j , $1 \leq j \leq d$, цей функціонал є функціоналом одного параметру $h_j \in H_j$, а отже задача його мінімізації є лінійною.

Розглянемо випадок дискретизованої задачі, тобто рівняння (13). Така задача є тісно пов'язаною із задачами наближення багатовимірних тензорів тензорними добутками одновимірних векторів [7]. Дійсно, ми можемо представити елементи u_n та f_n рівняння (13) d -вимірними тензорами розміру $n_1 \times \dots \times n_d$, а оператор A_n — $(2d)$ -вимірним тензором розміру $n_1 \times \dots \times n_d \times n_1 \times \dots \times n_d$.

Тоді задача знаходження уточнення наближеного розв'язку рівняння (13) є еквівалентною задачі мінімізації функції, що залежить від d одновимірних векторів $x_j \in H_j^{(n_j)}$, $j = 1, \dots, d$

$$J_f^{(n)}(x_1, \dots, x_d) = \|f_n - A_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_d)\|^2. \quad (19)$$

Тут $x_j = (x_j^{(1)}, \dots, x_j^{(n_j)})$ — одновимірний вектор координат елемента простору $H_j^{(n_j)}$, $j = 1, \dots, d$.

Зауваження 13. *Норма d -вимірному тензора розміру $n_1 \times \dots \times n_d$ може бути, наприклад, середньоквадратичною*

$$\|t\| = \sqrt{\sum_{\substack{1 \leq k_j \leq n_j \\ 1 \leq j \leq d}} |t_{k_1, \dots, k_d}|^2}, \quad t \in H^{(n)}.$$

Зауваження 14. *Функція (19) є поліномом степеня $2d$, що залежить від m змінних $x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n_1)}, \dots, x_d^{(1)}, \dots, x_d^{(n_d)}$. Тут $m = \sum_{j=1}^d n_j$.*

Зауваження 15. *Функція (19) при фіксованих всіх її параметрах окрім деякого одного $x_j \in H_j^{(n_j)}$, $1 \leq j \leq d$ є поліномом n_j змінних другого степеня, а задача його мінімізації відповідно зводиться до системи n_j лінійних алгебричних рівнянь з n_j невідомими.*

Лінійна задача мінімізації функціоналу чи функції, порівняно з нелінійною, є на порядок простішою. Тому, для знаходження уточнення наближеного розв'язку рівняння (2), врахувавши зауваження 12 та 15, ми можемо використати метод послідовних найменших квадратів, який на даний час користується значною популярністю.

Метод послідовних найменших квадратів. Ідея методу послідовних найменших квадратів, що також відомий як ALS метод (*Alternating Least Squares*), полягає у виборі деякого початкового наближення та циклічно-послідовній мінімізації функціонала (18) при фіксованих всіх його параметрах, окрім деякого одного h_j , $j = 1, \dots, d$. Дамо формальне визначення *методу послідовних найменших квадратів* таким чином:

Крок 1. Приймаємо $k = 0$ та вибираємо елементи $h_j^{(0)}$, $j = 1, \dots, d$ — початкове наближення розв'язку задачі мінімізації функціонала (18).

Крок 2. Збільшуємо k на одиницю.

Крок 3. Послідовно для всіх $j = 1, \dots, d$ розв'язуємо задачу мінімізації функціонала (18) при фіксованих всіх його параметрах окрім h_j

$$J_f \left(h_1^{(k)}, \dots, h_{j-1}^{(k)}, h_j, h_{j+1}^{(k-1)}, \dots, h_d^{(k-1)} \right) \rightarrow \min.$$

Приймаємо $h_j^{(k)}$ рівним розв'язку цієї задачі. Тут $h_j^{(k)}$ — k -те наближення елемента h_j .

Крок 4. Якщо виконується критерій зупинки методу, то переходимо до кроку 5, інакше переходимо до кроку 2.

Крок 5. Приймаємо за наближений розв'язок задачі мінімізації функціонала (18) k -ті наближення елементів h_j , $j = 1, \dots, d$.

Зауваження 16. *Критерієм зупинки методу може бути достатньо мале відносне значення функціонала (18)*

$$\frac{J_f \left(h_1^{(k)}, \dots, h_d^{(k)} \right)}{J_f \left(h_1^{(0)}, \dots, h_d^{(0)} \right)} < \epsilon, \quad (20)$$

чи достатньо мала відносна зміна наближеного розв'язку задачі мінімізації функціонала (18)

$$\frac{\left\| h_1^{(k)} \otimes \dots \otimes h_d^{(k)} - h_1^{(k-1)} \otimes \dots \otimes h_d^{(k-1)} \right\|}{\left\| h_1^{(k-1)} \otimes \dots \otimes h_d^{(k-1)} \right\|} < \epsilon. \quad (21)$$

Розглянемо числову послідовність

$$\left\{ J_f \left(h_1^{(k)}, \dots, h_d^{(k)} \right) \right\}_{k=0}^{\infty}. \quad (22)$$

Припущення 2. Числова послідовність (22) значень функціонала (18) є монотонно незростаючою

$$\forall k \geq 1 \quad J_f \left(h_1^{(k)}, \dots, h_d^{(k)} \right) \leq J_f \left(h_1^{(k-1)}, \dots, h_d^{(k-1)} \right).$$

Доведення. Випливає з визначень k -тих наближень елементів h_j , $j = 1, \dots, d$.

Припущення 3. Числова послідовність (22) є збіжною до деякого невід'ємного числа

$$\exists L \geq 0 : \lim_{k \rightarrow \infty} J_f \left(h_1^{(k)}, \dots, h_d^{(k)} \right) = L.$$

Доведення. Легко бачити, що послідовність (22) є обмеженою знизу нулем, а отже, врахувавши твердження 2, і збіжною до деякого невід'ємного числа L .

Зауваження 17. Послідовність (22), взагалі кажучи, не збігається до нижньої межі функціонала (18).

Зауваження 18. Метод послідовних найменших квадратів є простим для розуміння та зручним для використання, проте немає гарантії його збіжності до розв'язку задачі мінімізації функціонала (18). Також результат методу може сильно залежати від початкового наближення $\{h_j^{(0)}\}$.

У роботах [7–9], що присвячені питанню декомпозиції багатовимірних тензорів тензорними добутками одновимірних векторів, широко використовують числовий ALS метод [10, 11]. Деякі прийоми підвищення ефективності методу описані у [12], а питання вибору початкового наближення методу розглянуто у [13]. Також існує ряд альтернативних методів, що використовують таку ж основну ідею як і ALS метод. Зокрема, у роботі [14] здійснено порівняння ALS методу та таких його конкурентів:

- DTLD (direct trilinear decomposition);
- ATLD (alternating trilinear decomposition);
- SWATLD (self-weighted alternating trilinear decomposition);
- PALS (pseudo alternating least squares);
- ACOVER (alternating coupled vectors resolution);
- ASD (alternating slice-wise diagonalization);
- ACOMAR (alternating coupled matrices resolution).

Згідно висновків роботи, жоден з методів не є кращим ALS методу в плані точності знайденого наближеного розв'язку задачі (збіжності до точного розв'язку).

Метод нелінійних найменших квадратів. Значно вища точність наближених розв'язків може бути досягнута з використанням нелінійних методів найменших квадратів, що також відомі як NLS методи (*Nonlinear Least Squares*). Ця група градієнтних методів мінімізує нелінійну функцію (19) безпосередньо. Відомими представниками цього класу є, наприклад, метод Гауса-Ньютона [15,16], dGN метод (damped Gauss-Newton) [17,18] та PMF методи [19]. Опишемо загальну схему методів нелінійних найменших квадратів для мінімізації нелінійної функції багатьох змінних (19).

Крок 1. Приймаємо $k = 0$ та вибираємо $x^{(0)}$ — початкове наближення розв'язку задачі мінімізації функції. Тут $x^{(0)}$ — вектор змінних функції (19).

Крок 2. Збільшуємо k на одиницю.

Крок 3. Обчислюємо наступне наближення розв'язку задачі $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \phi(x^{(k-1)})$, де відображення ϕ , визначене на основі функції $J_f^{(n)}$, залежить від конкретного методу.

Крок 4. Якщо виконується критерій зупинки методу, то переходимо до кроку 5, інакше переходимо до кроку 2.

Крок 5. Приймаємо за наближений розв'язок задачі мінімізації функції (19) вектор $x^{(k)}$.

Зауваження 19. Для NLS методів можна використовувати такі ж критерії зупинки як і для описаного вище методу послідовних найменших квадратів.

Зауваження 20. Нелінійні методи найменших квадратів узагальнюють та розвивають метод Ньютона. На кожному кроці на основі градієнту та матриці Гессе цільової функції обчислюють оптимальний напрямок спадання її значення та величину наступного кроку.

Зауваження 21. Нелінійні методи найменших квадратів дають кращі результати у порівнянні з ALS методами, проте також не гарантують знаходження глобального мінімуму функції (19). Окрім цього нелінійні методи використовують більше обчислювальних ресурсів. Числові результати свідчать [12, 18], що у порівнянні з лінійними методами нелінійні є значно повільнішими та використовують більший об'єм пам'яті.

Метод мінімізації полінома багатьох змінних вищого степеня. У роботах [20, 21] описані розвинення та модифікації матричного методу Стеттера-Меллера (*Stetter-Möller matrix method*) [22, 23], що дозволяє знаходити глобальний мінімум полінома багатьох змінних вищого степеня. Запропоновані підходи зводять задачу мінімізації полінома до узагальненої задачі на власні значення. Для кожної компоненти зв'язності множини точок, де досягається глобальний мінімум, метод знаходить принаймні одну точку, що їй належить. Умови застосовності не передбачають жодних обмежень на вигляд полінома, що мінімізується. Отже, такі методи можуть бути застосовані для знаходження глобального мінімуму функції (19).

Нехай p — довільний поліном m змінних степеня $2d$

$$p(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}[x_1, \dots, x_m], \quad (23)$$

де $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]$ — простір поліномів m змінних над полем дійсних чисел. Розглянемо поліном

$$p_\lambda(x_1, \dots, x_m) = p(x_1, \dots, x_m) + \lambda \left(x_1^{2(d+1)} + \dots + x_m^{2(d+1)} \right), \quad \lambda > 0. \quad (24)$$

Такий поліном називається домінантним. Інформація про глобальний мінімум полінома (23) може бути отримана з p_λ при $\lambda \rightarrow 0$ [20].

Глобальний мінімум полінома можна знайти з необхідних умов досягнення мінімуму першого порядку, обчисливши значення полінома у підозрілих на екстремум точках. Для домінантного полінома p_λ (при фіксованому $\lambda > 0$) такий підхід приводить до системи поліноміальних рівнянь у базисі Грьобнера (*Gröbner basis*) [24, 25], що має скінченну кількість розв'язків. Тому ми можемо використати матричний метод Стеттера-Меллера.

Спочатку метод будує матриці $(A_{x_1}, \dots, A_{x_m})$. Власні значення цих матриць, що відповідають спільному власному вектору, формують підозрілу на екстремум точку полінома p_λ . Тут матриця A_{x_k} ($k = 1, \dots, m$) представляє оператор множення на x_k у факторпросторі $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_m]/I$, де I — ідеал, що сформований частковими похідними першого порядку полінома p_λ .

Для довільного полінома $r(x_1, \dots, x_m)$ матриця $A_r = r(A_{x_1}, \dots, A_{x_m})$ складається зі значень полінома r в підозрілих на екстремум точках p_λ .

Недолік цього підходу полягає у тому, що розмір матриці A_r є рівним $(2d + 1)^m$ та зростає дуже швидко зі збільшенням m . Проте сучасні ітераційні методи розв'язування узагальнених задач на власні значення, що базуються на методах Якобі-Давідсона чи Арнольді (*Jacobi-Davidson or Arnoldi methods*) [26, 27], не вимагають побудови матриці A_r . Тому мають місце різноманітні оптимізації запропонованого підходу [20, 21].

Зауваження 22. *Метод мінімізації полінома багатьох змінних вищого степеня на відміну від методів найменших квадратів гарантує відшукання точки глобального мінімуму, проте його використання вимагає значних обчислювальних затрат. Тому на практиці зазвичай надають перевагу підходам, які вимагають значно менше обчислювальних ресурсів, однак не завжди знаходять глобальний мінімум функції.*

Список використаної літератури

1. Баляш Ю. Г., Войтович Н. Н. Приближенное вариационно-итерационное разделение переменных в многомерных задачах // Волны и дифракция-85: IX Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. — 1985. — С. 122-124.
2. Баляш Ю. Г., Войтович Н. Н. Вариационно-итерационный метод решения многомерных интегральных уравнений // Интегральные уравнения в прикладном моделировании: Тез. докл. XX республ. конф. - Киев: Ин-т электродинамики АН УССР, 1986. — Ч. 2. — С. 23.
3. Bulatsyk O., Katsenelenbaum B. Z., Topolyuk Y. P., Voitovich N. N. Phase Optimization Problems. — Wiley, 2010. — 312 с.
4. Войтович М. М., Ярошко С. А. Вариційно-ітераційний метод узагальненого розділення змінних для розв'язання багатовимірних інтегральних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1997. — 40, № 4. — С. 122-126.
5. Треногин В. А. Функциональный анализ: Учебник. — М.: Физматгиз, 2002. — 488 с.

6. *Biletskyy V.* An iterative method of generalized separation of variables for solving linear operator equations // *Journal of Numerical and Applied Mathematics.*– 2010.– 1(100)– P. 2-9.
7. *Kolda T. G., Bader B. W.* Tensor Decompositions and Applications // *SIAM Review.*– 2009.– 3(51)– P. 455-500.
8. *Acar E., Dunlavy D. M., Kolda T. G.* A Scalable Optimization Approach for Fitting Canonical Tensor Decompositions // *Journal of Chemometrics.*– 2011.– 2(25)– P. 67-86.
9. *Zhang T., Golub G. H.* Rank-one approximation to high order tensors // *Siam Journal on Matrix Analysis and Applications.*– 2001.– 23– P. 534-550.
10. *Carroll J., Chang J.-J.* Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an N-way generalization of “Eckart-Young” decomposition // *Psychometrika.*– 1970.– 35– P. 283-319.
11. *Harshman R.* Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an “explanatory” multi-modal factor analysis // *UCLA Working Papers in Phonetics.*– 1970.– 16– P. 1-84.
12. *Tomasi G.* Practical and computational aspects in chemometric data analysis. PhD thesis. – Samfundslitteratur Grafik, 2006. – 286 p.
13. *Smilde A., Bro R., Geladi P.* Multi-way analysis: Applications in the chemical sciences. – Wiley, 2004. – 381 p.
14. *Faber N. M., Bro R., Hopke P. K.* Recent developments in CANDECOMP/PARAFAC algorithms: A critical review // *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems.*– 2003.– 1(65)– P. 119-137.
15. *Björck A.* Numerical Methods for Least Squares Problems. – SIAM, 1996. – 408 p.
16. *Nocedal J., Wright S. J.* Numerical optimization. – Springer, 1999. – 636 p.
17. *Tomasi G., Bro R.* PARAFAC and missing values // *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems.*– 2005.– 2(75)– P. 163-180.
18. *Tomasi G., Bro R.* A comparison of algorithms for fitting the PARAFAC model // *Computational Statistics & Data Analysis.*– 2006.– 6(50)– P. 1700-1734.
19. *Paatero P.* A weighted non-negative least squares algorithm for three-way PARAFAC factor analysis // *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems.*– 1997.– 2(38)– P. 223-242.
20. *Hanzon B., Jibeteau D.* Global minimization of a multivariate polynomial using matrix methods // *Journal of Global optimization.*– 2003.– 1(27)– P. 1-23.
21. *Bleylevens I., Peeters R., Hanzon B.* An nD-systems approach to global polynomial optimization with an application to H_2 model order reduction // *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on.*– 2005.– P. 5107-5112.
22. *Stetter H. J.* Matrix eigenproblems are at the heart of polynomial system solving // *ACM SIGSAM Bulletin.*– 1996.– 4(30)– P. 22-25.
23. *Möller H. M., Stetter H. J.* Multivariate polynomial equations with multiple zeros solved by matrix eigenproblems // *Numerische Mathematik.*– 1995.– 3(70)– P. 311-329.
24. *Cox D. A., Little J. B., O’Shea D.* Ideals, varieties, and algorithms: an introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. – Springer, 1992. – 513 p.
25. *Аржанцев И. В.* Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений. – МЦНМО, 2003. – 68 с.
26. *Sleijpen G. L. G., Van der Vorst H. A.* A Jacobi–Davidson iteration method for linear eigenvalue problems // *SIAM Review.*– 2000.– 2(42)– P. 267-293.
27. *Fokkema D. R., Sleijpen G. L. G., Van der Vorst H. A.* Jacobi–Davidson Style QR and QZ Algorithms for the Reduction of Matrix Pencils // *SIAM Journal on Scientific Computing.*– 1998.– 1(20)– P. 94-125.

Одержано 11.11.2015