

УДК 512.64+512.56

В. М. Бондаренко (Інститут математики НАН України),
В. А. Лісикевич (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

***P*-ВИЗНАЧАЛЬНІ ПОЛІНОМИ ДЛЯ НЕСЕРІЙНИХ ЧАСТКОВО ВПОРЯДКОВАНИХ МНОЖИН ШИРИНИ 2**

In this paper one describes *P*-defining polynomials of non-serial posets with respect to their comparable elements.

У цій роботі описано *P*-визначальні поліноми несерійних частково впорядкованих множин відносно їх порівняльних елементів.

Квадратичні форми виникають при розгляді багатьох задач теорії зображень. У 1972 р. П. Габріель [1] ввів цілочислову квадратичну форму для сагайдаків, назвавши її квадратичною формою Тітса, і показав, що сагайдак має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень тоді і лише тоді, коли його квадратична форма Тітса є додатною. Ця робота П. Габріеля стала початком нового напрямку в теорії зображень, який пов'язаний з вивченням квадратичних форм для різних об'єктів. У 1974 р. Ю. А. Дрозд [2] показав, що частково впорядкована множина має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень тоді і лише тоді, коли її форма Тітса (яка вводиться аналогічним чином) є слабо додатною (тобто додатною на множині векторів з невід'ємними координатами).

В теорії зображень частково впорядкованих множин важливу роль відіграють не лише слабо додатні, а й додатні форми Тітса (див. [3]). Всі частково впорядковані множини з додатною формою Тітса (що є аналогами графів Динкіна) описано в роботі [4].

У цій роботі вивчаються реберно-локальні деформації додатних квадратичних форм Тітса скінченних частково впорядкованих множин. Інший тип локальних деформацій (введених в [5] і названих в [6] поточково-локальними) вивчався раніше (див., окрім [5], роботи [7], [8]).

1. Основні поняття. Нехай

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_n) = \sum_{i=1}^n f_i z_i^2 + \sum_{i < j} f_{ij} z_i z_j \quad (1)$$

— квадратична форма над полем дійсних чисел \mathbb{R} . Її *реберно-локальною деформацією* називається квадратична форма вигляду

$$f^{(p,q)}(z, t) = \sum_{i=1}^n f_i z_i^2 + t f_{pq} z_p z_q + \sum_{(i,j) \neq (p,q)} f_{ij} z_i z_j, \quad (2)$$

де p і q ($p < q$) такі, що $f_{pq} \neq 0$, а t — параметр, що пробігає поле \mathbb{R} .

Квадратична форма (2) називається також *локальною деформацією квадратичної форми (1) відносно $z_p z_q$* .

Число $a \in \mathbb{R}$ називається *P*-граничним числом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$ або (p, q) -им *P*-граничним числом квадратичної форми $f(z)$, якщо $f(z, a)$ не є додатною квадратичною формою і в кожному околі числа a існує число c таке, що $f(z, c)$ є додатною квадратичною формою.

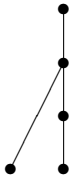
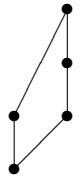
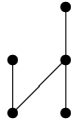
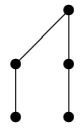
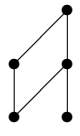
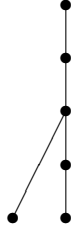
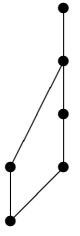
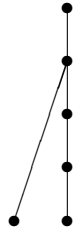
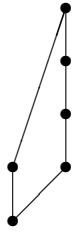
У випадку, коли квадратична форма $f(z)$ додатна, існує два (p, q) -их *P*-граничних числа. Поліном $\Delta_f^{(p,q)}(t) = (t - b_1)(t - b_2)$, де b_1 і b_2 — ці *P*-граничні числа, називається *P*-визначальним поліномом квадратичної форми $f(z)$ для $z_p z_q$ або *P*-визначальним (p, q) -поліномом квадратичної форми $f(z)$.

Усі ці поняття введено в роботі [6].

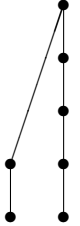
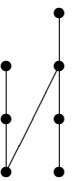
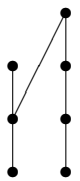
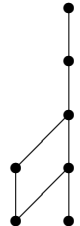
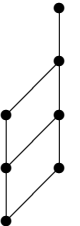
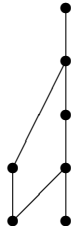
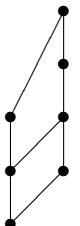
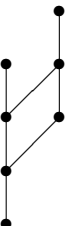
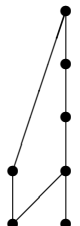
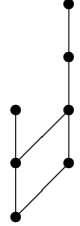
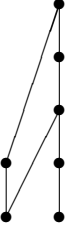
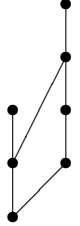
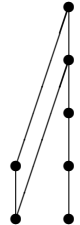
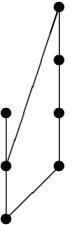
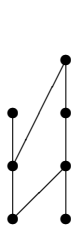
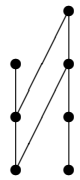
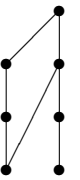
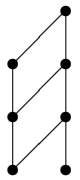
2. Несерійні частково впорядковані множини з додатною формою Тітса. Нехай S — скінченна частково впорядкована множина (що не містить елемента, позначеного символом 0). Її квадратичною формою Тітса називається цілочислова квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

В подальшому нам знадобиться список частково впорядкованих множин ширини 2 з додатною квадратичною формою Тітса у випадку, коли ці множини несерійні (множина S називається серійною, якщо для будь-якого $N > |S|$ існує частково впорядкована множина T_N порядку N з додатною формою Тітса, яка містить в собі множину S , і несерійною в іншому разі). Згідно [4] всі такі частково впорядковані множини вичерпуються (з точністю до ізоморфізму та дуальності) множинами, вказаними в наступній таблиці.

1 	2=1' 	3 
4 	5 	6 
7=6' 	8 	9=8' 

10 	11 	12
13 	14 	15=14'
16 	17=16' 	18
19=18' 	20 	21
22=21' 	23=21'' 	24
25=24' 	26 	27

<p>28</p> 	<p>29</p> 	<p>30</p> 
<p>31</p> 	<p>32=31'</p> 	<p>33</p> 
<p>34=33'</p> 	<p>35=33''</p> 	<p>36</p> 
<p>37=36'</p> 	<p>38</p> 	<p>39=38'</p> 
<p>40</p> 	<p>41=40'</p> 	<p>42</p> 
<p>43</p> 	<p>44</p> 	<p>45</p> 

Зробимо деякі пояснення до цієї таблиці.

Частково впорядковану множину, яка розміщена в таблиці за номером i , позначаємо через P_i . Її елементи нумеруються числами $1, 2, \dots, n_i$, де $n_i = |P_i|$, а відношення часткового порядку позначається через \preceq . При цьому точки множини P_i нумеруються наступним чином: спочатку нумеруються знизу вверх точки лівого вертикального ланцюга, а потім (також знизу вверх) правого.

Якщо в таблиці написано $i = j'$, то це означає, що P_i можна одержати з P_j заміною єдиної її максимальної точки на єдину мінімальну точку. Те ж саме стосується і випадку $i = j'' = (j)'$ (потрібно порівнювати P_i і $P_{j'}$).

Множину всіх частково впорядкованих множин із приведеної таблиці позначимо через \mathcal{P} , а частково впорядкованих множин без номерів $i = j'$ і $i = j''$ — через \mathcal{P}_0 .

3. Основний результат. Нехай S — скінченна частково впорядкована множина (що не містить елемента, позначеного символом 0). Її квадратичною формою Тітса називається цілочислова квадратична форма, яка задається наступною рівністю:

$$q_S(z) = z_0^2 + \sum_{i \in S} z_i^2 + \sum_{i < j, i, j \in S} z_i z_j - z_0 \sum_{i \in S} z_i.$$

Ми розглядаємо задачу про опис P -визначальних поліномів вигляду $\Delta_Q^{(p,q)}$, $p, q \in S$ ($p < q$), квадратичної форми Тітса $Q = q_S(z)$ для частково впорядкованої множини S ширини 2 у випадку, коли її форма $q_S(z)$ додатна, а сама вона несерійна. Всі такі множини вказані у вище приведеній таблиці.

Оскільки квадратична форма Тітса є цілочисловою, то її P -визначальні поліноми мають раціональні коефіцієнти. Відповідний цілочисловий поліном зі взаємно простими коефіцієнтами (в сукупності) і додатнім коефіцієнтом при старшому члені (який отримується із P -визначального полінома множенням його на деяке ціле число m) називається цілочисловим P -визначальним поліномом; зауважимо, що m завжди від'ємне (відносно всіх цих означень і тверджень див. [6]).

У випадку $p, q \in S$ замість “(цілочисловий) P -визначальний поліном квадратичної форми Тітса $q_S(z)$ для $z_p z_q$ ” будемо говорити “(цілочисловий) P -визначальний поліном частково впорядкованої множини S для p і q ”. Всі P -визначальні поліноми частково впорядкованої множини S будемо записувати у вигляді симетричної матриці з нульовими елементами на головній діагоналі, в якій на місці (p, q) і (q, p) стоїть P -визначальний поліном для p і q , якщо $p < q$, і елемент 0, якщо p і q непорівняльні. Таку матрицю називатимемо матрицею P -визначальних поліномів для S і позначатимемо через $DP(S)$. Відповідну їй матрицю з цілочисловими поліномами будемо називати цілочисловою матрицею P -визначальних поліномів для S і позначатимемо через $ZDP(S)$.

Очевидно, що якщо існує бієктивне відображення між частково впорядкованими множинами S і T , яке зберігає порівняльність елементів, то матриці $DP(S)$ і $DP(T)$, а значить і матриці $ZDP(S)$ і $ZDP(T)$, однакові з точністю до (однієї і тієї) перестановки рядків та стовпців. Оскільки таке відображення існує для дуальних частково впорядкованих множин, а також для пар множин $P_i, P_{j'}$ і $P_i, P_{j''}$ (див. п. 2), то для опису всіх P -визначальних поліномів несе-

рійних частково впорядкованих множин з додатною формою Тітса достатньо розглянути частково впорядковані множини із \mathcal{P}_0 (також див. п. 2).

Теорема 1. *Цілочислові матриці *P*-визначальних поліномів $ZDP(P_i)$ для частково впорядкованих множин $P_i \in \mathcal{P}_0$ мають наступний вигляд:*

1)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 5t^2 - 4t - 4 & 5t^2 - 4t - 4 \\ 0 & 0 & 5t^2 - 12t + 4 & 4t^2 - 4t - 3 & 4t^2 - 4t - 3 \\ 0 & 5t^2 - 12t + 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 3 & 4t^2 - 4t - 3 \\ 5t^2 - 4t - 4 & 4t^2 - 4t - 3 & 4t^2 - 4t - 3 & 0 & 5t^2 - 12t + 4 \\ 5t^2 - 4t - 4 & 4t^2 - 4t - 3 & 4t^2 - 4t - 3 & 5t^2 - 12t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix} 0 & 5t^2 - 4t - 4 & 0 & 5t^2 - 4t - 4 & 5t^2 - 4t - 4 \\ 5t^2 - 4t - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 3 & 4t^2 - 4t - 3 \\ 5t^2 - 4t - 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 3 & 0 & 5t^2 - 12t + 4 \\ 5t^2 - 4t - 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 3 & 5t^2 - 12t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{pmatrix} 0 & 5t^2 - 12t + 4 & 0 & 0 & 5t^2 - 4t - 4 \\ 5t^2 - 12t + 4 & 0 & 0 & 0 & 5t^2 - 4t - 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5t^2 - 12t + 4 & 5t^2 - 4t - 4 \\ 0 & 0 & 5t^2 - 12t + 4 & 0 & 5t^2 - 4t - 4 \\ 5t^2 - 4t - 4 & 5t^2 - 4t - 4 & 5t^2 - 4t - 4 & 5t^2 - 4t - 4 & 0 \end{pmatrix}$$

5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 5t^2 - 8t & 0 & 4t^2 - 4t - 3 & 5t^2 - 8t \\ 5t^2 - 8t & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 3 \\ 4t^2 - 4t - 3 & 0 & 5t^2 - 8t & 0 & 5t^2 - 8t \\ 5t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 3 & 4t^2 - 4t - 3 & 5t^2 - 8t & 0 \end{pmatrix}$$

6)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6t^2 - 6t - 2 & 6t^2 - 6t - 2 & 6t^2 - 6t - 2 \\ 0 & 0 & 6t^2 - 16t + 8 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 0 & 6t^2 - 16t + 8 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 10t + 4 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

8)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 6t^2 - 4t - 4 & 6t^2 - 4t - 4 \\ 0 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 6t^2 - 4t - 4 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 6t^2 - 16t + 8 \\ 6t^2 - 4t - 4 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 6t^2 - 16t + 8 & 0 \end{pmatrix}$$

10)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2 - 4t - 4 & 0 & 6t^2 - 6t - 2 & 6t^2 - 6t - 2 & 6t^2 - 6t - 2 \\ 6t^2 - 4t - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 10t + 4 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

11)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2 - 6t - 2 & 0 & 0 & 6t^2 - 4t - 4 & 6t^2 - 4t - 4 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 0 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 6t^2 - 4t - 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 6t^2 - 16t + 8 \\ 6t^2 - 4t - 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 6t^2 - 16t + 8 & 0 \end{pmatrix}$$

12)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2 - 6t - 2 & 6t^2 - 6t - 2 & 0 & 6t^2 - 4t - 4 & 6t^2 - 4t - 4 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 6t^2 - 4t - 4 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 6t^2 - 16t + 8 \\ 6t^2 - 4t - 4 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 6t^2 - 16t + 8 & 0 \end{pmatrix}$$

13)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 0 & 6t^2 - 6t - 2 \\ 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 0 & 6t^2 - 6t - 2 \\ 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 0 & 0 & 6t^2 - 6t - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6t^2 - 16t + 8 & 6t^2 - 4t - 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6t^2 - 16t + 8 & 0 & 6t^2 - 4t - 4 \\ 6t^2 - 6t - 2 & 6t^2 - 6t - 2 & 6t^2 - 6t - 2 & 6t^2 - 4t - 4 & 6t^2 - 4t - 4 & 0 \end{pmatrix}$$

14)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2 - 12t + 4 & 0 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 6t \\ 6t^2 - 12t + 4 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 6t^2 - 12t + 4 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 4t^2 - 6t & 0 & 6t^2 - 12t + 4 & 0 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 6t \\ 4t^2 - 6t & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 6t & 0 & 4t^2 - 10t + 4 \\ 4t^2 - 6t & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 10t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

16)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2 - 8t & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 6t^2 - 12t + 4 \\ 6t^2 - 8t & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 6t \\ 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 4t^2 - 6t & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 6t \\ 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 4t^2 - 6t \\ 6t^2 - 12t + 4 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 6t & 0 \end{pmatrix}$$

18)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2 - 12t + 4 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 6t^2 - 8t \\ 6t^2 - 12t + 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 4t - 2 \\ 0 & 0 & 4t^2 - 10t + 4 & 0 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 4t - 2 \\ 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 6t & 0 & 6t^2 - 12t + 4 \\ 6t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 4t - 2 & 6t^2 - 12t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

20)

$$\begin{pmatrix} 0 & 6t^2 - 12t + 4 & 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 6t^2 - 8t \\ 6t^2 - 12t + 4 & 0 & 4t^2 - 6t & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 \\ 4t^2 - 4t - 2 & 4t^2 - 6t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 6t & 4t^2 - 4t - 2 \\ 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 0 & 4t^2 - 6t & 0 & 6t^2 - 12t + 4 \\ 6t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 2 & 0 & 4t^2 - 4t - 2 & 6t^2 - 12t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

21)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t \\ 0 & 0 & 7t^2 - 20t + 12 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 7t^2 - 20t + 12 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 7t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 \\ 7t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 \\ 7t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 \\ 7t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

24)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7t^2 - 4t - 4 & 7t^2 - 4t - 4 \\ 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 7t^2 - 4t - 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 7t^2 - 20t + 12 \\ 7t^2 - 4t - 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 20t + 12 & 0 \end{pmatrix}$$

26)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 4t - 4 & 0 & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t \\ 7t^2 - 4t - 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 7t^2 - 8t & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 \\ 7t^2 - 8t & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 \\ 7t^2 - 8t & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 \\ 7t^2 - 8t & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

27)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 8t & 0 & 0 & 0 & 7t^2 - 4t - 4 & 7t^2 - 4t - 4 \\ 7t^2 - 8t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 7t^2 - 4t - 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 7t^2 - 20t + 12 \\ 7t^2 - 4t - 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 20t + 12 & 0 \end{pmatrix}$$

28)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 20t + 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7t^2 - 4t - 4 \\ 7t^2 - 20t + 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7t^2 - 4t - 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 7t^2 - 8t \\ 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 7t^2 - 8t \\ 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 7t^2 - 8t \\ 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 7t^2 - 8t \\ 7t^2 - 4t - 4 & 7t^2 - 4t - 4 & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 0 \end{pmatrix}$$

29)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 0 & 0 & 7t^2 - 4t - 4 & 7t^2 - 4t - 4 \\ 7t^2 - 8t & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7t^2 - 8t & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 7t^2 - 4t - 4 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 7t^2 - 20t + 12 \\ 7t^2 - 4t - 4 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 20t + 12 & 0 \end{pmatrix}$$

30)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 20t + 12 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 0 & 0 & 7t^2 - 4t - 4 \\ 7t^2 - 20t + 12 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 0 & 0 & 7t^2 - 4t - 4 \\ 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 7t^2 - 8t \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 7t^2 - 8t \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 7t^2 - 8t \\ 7t^2 - 4t - 4 & 7t^2 - 4t - 4 & 0 & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 7t^2 - 8t & 0 \end{pmatrix}$$

31)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 16t + 8 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 7t^2 - 16t + 8 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7t^2 - 16t + 8 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 7t^2 - 16t + 8 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 3t^2 - 4t & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 4t & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 \\ 3t^2 - 4t & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 \\ 3t^2 - 4t & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

33)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 12t + 4 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 8t + 3 \\ 7t^2 - 12t + 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 8t + 3 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 3t^2 - 4t & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 3t^2 - 4t & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 0 & 3t^2 - 8t + 4 \\ 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 8t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

36)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 8t & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 16t + 8 \\ 7t^2 - 8t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 8t + 3 \\ 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 3t^2 - 4t & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 4t \\ 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 4t \\ 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 4t \\ 7t^2 - 16t + 8 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 8t + 3 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 0 \end{pmatrix}$$

38)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 12t + 4 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 12t + 4 \\ 7t^2 - 12t + 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 4t^2 - 8t + 3 \\ 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 \\ 7t^2 - 12t + 4 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 8t + 3 & 0 \end{pmatrix}$$

40)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 16t + 8 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 8t \\ 7t^2 - 16t + 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 4t - 1 \\ 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 0 & 7t^2 - 16t + 8 \\ 7t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 16t + 8 & 0 \end{pmatrix}$$

42)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 12t + 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 12t + 4 \\ 7t^2 - 12t + 4 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t \\ 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 4t^2 - 8t + 3 \\ 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 \\ 7t^2 - 12t + 4 & 3t^2 - 4t & 0 & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 8t + 3 & 0 \end{pmatrix}$$

43)

$$\begin{pmatrix} 0 & 7t^2 - 16t + 8 & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 8t \\ 7t^2 - 16t + 8 & 0 & 3t^2 - 4t & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 4t^2 - 4t - 1 & 3t^2 - 4t & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 4t - 1 \\ 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 0 & 7t^2 - 16t + 8 \\ 7t^2 - 8t & 4t^2 - 4t - 1 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 16t + 8 & 0 \end{pmatrix}$$

44)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t & 7t^2 - 12t + 4 \\ 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 4t^2 - 8t + 3 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 8t + 4 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 4t - 1 \\ 3t^2 - 4t & 0 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 7t^2 - 12t + 4 \\ 7t^2 - 12t + 4 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 4t^2 - 4t - 1 & 7t^2 - 12t + 4 & 0 \end{pmatrix}$$

45)

$$\begin{pmatrix} 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 3t^2 - 4t & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 8t + 3 \\ 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 3t^2 - 4t & 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3t^2 - 4t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t \\ 3t^2 - 4t & 0 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 & 3t^2 - 4t \\ 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 0 & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 8t + 3 & 0 & 4t^2 - 8t + 3 \\ 4t^2 - 8t + 3 & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 3t^2 - 4t & 4t^2 - 8t + 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Доведення теореми 1. Укажемо схему доведення теореми.

Нехай $P_i \in \mathcal{P}_0$ і $n = |P_i|$. Помножена на 2 матриця квадратичної форми $q_{P_i}^{(p,q)}(z, t)$ — це симетрична матриця розміру $(n + 1) \times (n + 1)$ вигляду

$$M_i^{(p,q)}(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \\ -1 & 2 & * & \dots & * & * \\ -1 & * & 2 & \dots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & * & * & \dots & 2 & * \\ -1 & * & * & \dots & * & 2 \end{pmatrix}$$

(перший рядок і стовпець відповідають змінній z_0 , тобто мають номер 0); тут на місцях (p, q) і (q, p) стоїть параметр t , а на решті місць (s, k) , $s \neq k$, $s, k \neq 0$, стоїть 1 або 0 в залежності від того, порівняльні s і k чи ні. Оскільки P_i — частково впорядкована множина з додатною формою Тітса, то за критерієм Сільвестра всі симетричні мінори матриці $M_i^{(p,q)}(1)$ (тобто її головні мінори,

а також головні мінори будь-якої матриці, яка отримана з матриці $M_i^{(p,q)}(1)$ однаковою перестановкою рядків та стовпців) є додатними. Переставимо (однаковим чином) рядки і стовці матриці $M_i^{(p,q)}(t)$ так, щоб p -ий і q -ий рядки стали відповідно n -им і $n + 1$ -им (а значить аналогічна умова буде виконуватися і для стовпців). Тоді всі головні мінори нової матриці, не рахуючи мінора (найбільшого) порядку $n + 1$, будуть додатними. Значить (знову за критерієм Сільвестра) P -визначальний поліном (частково впорядкованої множини P_i) для p і q дорівнює, з точністю до постійного множника (який є від'ємним), визначнику матриці $M_i^{(p,q)}(t)$ (більш детально див. в [6]).

Для безпосереднього обчислення визначників використовується відповідна компютерна програма.

Список використаної літератури

1. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen, I // *Manus. Math.* – 1972. – **6**, N 1. – P. 71-103.
2. *Дрозд Ю. А.* Преобразования Кокстера и представления частично упорядоченных множеств // *Функц. анализ и его прил.* – 1974. – **8**. – С. 34-42.
3. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* Частично упорядоченные множества инъективно-конечного типа // *Науковий вісник Ужгородського університету (серія: математика і інформатика)*. – 2005. – **9**. – С. 15-25.
4. *Бондаренко В. М., Степочкина М. В.* (Min, max)-эквивалентность частично упорядоченных множеств и квадратичная форма Титса // *Проблеми аналізу і алгебри: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. – 2005. – **2**, N3. – С. 18-58.
5. *Bondarenko V. M., Pereguda Yu. M.* On P -numbers of quadratic forms // *Геометрія, топологія та їх застосування: Зб. праць Ін-ту математики НАН України*. – 2009. – **6**, N2. – С. 474-477.
6. *Bondarenko V. M.* On types of local deformations of quadratic forms // *Algebra Discrete Math.* – 2014. – **18**, №2. – pp. 11-18.
7. *Бондаренко В. М., Перегуда Ю. М.* Опис P -чисел для узловых точек частично упорядоченных множеств с заданной формой Титса // *Науковий вісник Ужгородського ун-ту (серія: математика і інформатика)*. – 2010. – вип 21. – С. 35-39.
8. *Бондаренко В. М., Бондаренко В. В., Перегуда Ю. Н.* Локальные деформации положительно определенных квадратичных форм // *Укр. мат. журнал*. – 2012. – №7. – С. 892-907.

Одержано 10.11.2015