УДК 519.21

М. М. Капустей (Ужгородський нац. ун-т)

ОЦІНКА БЛИЗЬКОСТІ ФУНКЦІЙ РОЗПОДІЛУ ДВОХ СУМ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН В ТЕРМІНАХ ОДНІЄЇ ФОРМИ ПСЕВДОМОМЕНТІВ

The paper contains estimates of approximation of convergence of sums distributed random variables in the term of pseudomoments.

Робота містить оцінки близькості розподілів сум випадкових величин в термінах псевдомоментів.

Основні результати. У даній роботі продовжуються дослідження, що аналогічні [1–4], по застосуванню різного вигляду псевдомоментів до оцінки близькості розподілів двох сум випадкових величин.

Нехай $\xi_1, \xi_2, \ldots$ та $\eta_1, \eta_2, \ldots$ – дві послідовності випадкових величин з функціями розподілу відповідно $F_k(x)$ і $G_k(x)$, характеристичними функціями $f_k(t)$ і $g_k(t)$, $\Phi_n(x)$ і $Q_n(x)$ – відповідно функції розподілу випадкових величин

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{n} \eta_k, \quad H_k(x) = F_k(x) - G_k(x), \quad \rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - Q_n(x)| .$$

Нехай виконуються умови: існує число $\alpha \in (0; 2]$ і стала $\lambda > 0$ такі, що

$$|g_k(t)| \le e^{-\lambda |t|^{\alpha}}; \tag{1}$$

$$\mu_{kj} = \int_{-\infty}^{\infty} x^j dH_k(x) = 0 \ (k = 1, 2, \ldots; j = 1, m), \tag{2}$$

де $m = 1$ при $\alpha \le 1$ і $m = 2$ при $1 < \alpha \le 2$.

Позначимо для довільного $y > 0$

$$\kappa_{k0}^{(1)}(y) = \int_{|x| \le y} \max\left(1, |x|^{\alpha}\right) \left| H_k\left(x \lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| dx,$$

$$\kappa_{k0}^{(2)}(y) = \int_{|x| > y} \max\left(1, |x|^{m-1}\right) \left| H_k\left(x \lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) \right| dx,$$

$$\kappa_0^{(1)}(y) = \max_{1 \le k \le n} \kappa_{k0}^{(1)}(y), \ \kappa_0^{(2)}(y) = \max_{1 \le k \le n} \kappa_{k0}^{(2)}(y), \ \kappa_0(y) = \max\left\{\kappa_0^{(1)}(y); \kappa_0^{(2)}(y)\right\}.$$

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* (1) *і* (2). *Тоді для всіх* $n \ge 1$ *справедлива нерівність*

$$\rho_n \le C \inf_{y > 0} \left\{ \frac{\kappa_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \kappa_0^{(2)}(y) + \frac{(\kappa_0(y))^{\frac{n}{n+1}}}{n^{\frac{1}{\alpha}}} \right\} \tag{3}$$

де C *– стала, що залежить тільки від* α.

Допоміжні леми.

Лема 1. *Нехай виконуються умови* (2), $\omega_k(t) = |f_k(t) - g_k(t)|$, *тоді для будь-яких дійсних* t *і* $y > 0$

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\kappa_{k0}^{(1)}(y) + 2|t|^m\kappa_{k0}^{(2)}(y), \quad \omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le |t|\left(\kappa_{k0}^{(1)}(y) + \kappa_{k0}^{(2)}(y)\right),$$

де $\delta = \alpha + 1 - m$.

Доведення. Із (2) випливає рівність

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx} - \sum_{j=0}^{m}\frac{(itx)^j}{j!}\right)dH_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right| =$$

$$= |t|\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)dx\right| = |t|\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\left(e^{itx} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(itx)^j}{j!}\right)H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)dx\right|. \qquad (4)$$

Тоді із нерівності(Золотарьов [5], стор. 372)

$$\left|e^{iz} - \sum_{j=0}^{m}\frac{(iz)^j}{j!}\right| \le \frac{2^{1-\delta}|z|^{m+\gamma}}{m!(m+1)^\gamma}, \ 0 \le \gamma \le 1, \ m = 0, 1, 2, \ldots \qquad (5)$$

одержуємо

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le |t|\int_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{itx} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(itx)^j}{j!}\right|\left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx =$$

$$= |t|\int_{|x|\le y}\left|e^{itx} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(itx)^j}{j!}\right|\left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx + |t|\int_{|x|>y}\left|e^{itx} - \sum_{j=0}^{m-1}\frac{(itx)^j}{j!}\right|\left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx \le$$

$$\le \frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\kappa_{k0}^{(1)}(y) + 2|t|^m\kappa_{k0}^{(2)}(y).$$

Із (4)

$$\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = |t|\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)dx\right| \le |t|\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx =$$

$$= |t|\int_{|x|\le y}\left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx + |t|\int_{|x|>y}\left|H_k\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|dx \le |t|\left(\kappa_{k0}^{(1)}(y) + \kappa_{k0}^{(2)}(y)\right).$$

Лема 1 доведена.

Лема 2. *Нехай виконуються умови* (1) *і* (2), $\kappa_0(y) = \max\left\{\kappa_0^{(1)}(y); \kappa_0^{(2)}(y)\right\}$, $c \in \left(0; e^{-\frac{2}{\alpha}}\right)$, $\delta = \alpha + 1 - m$, $b = 8\left(\frac{2}{\alpha e}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\kappa_0^{(2)}(y) \le cb^{-1}$. *Якщо* $\kappa_0(y) \le cb^{-1}$, *то при* $|t| \le T_1 = (-\ln(b\kappa_0(y)))^{\frac{1}{\alpha}}$,

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-c_1|t|^\alpha}, \qquad (6)$$

де $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{b}\left(-c^{\frac{\alpha}{2}}\ln c\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$, $T_1 > 1$, *а при* $|t| > T_1$

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le |t|\kappa_0(y)\left(8e^{-\frac{1}{\alpha}} + 2\right) \le 5|t|\kappa_0(y). \tag{7}$$

Якщо $\kappa_0(y) > cb^{-1}$ (*тобто* $\kappa_0^{(1)}(y) > cb^{-1}$) *і* $|t| \le T_2 = \frac{c}{b\kappa_0^{(1)}(y)}$ $(T_2 < 1)$, *то*

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-c_2|t|^\alpha}, \tag{8}$$

де $c_2 = 1 - \frac{1}{2}ce^{\frac{3}{2}} > 0$.

Доведення. Із умови (1)

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le \left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| + \left|g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-|t|^\alpha} + \omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right). \tag{9}$$

Нехай $\kappa_0(y) \le cb^{-1}$, $|t| \le T_1$. Оскільки $b\kappa_0(y) \le c < e^{-\frac{2}{\alpha}} \le e^{-1}$, то

$$T_1 = \left(-\ln\left(b\kappa_0(y)\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}} \ge (-\ln c)^{\frac{1}{\alpha}} > \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \ge 1. \tag{10}$$

Із (9), (10) і леми 1

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha} + e^{\frac{1}{2}|t|^\alpha}\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1 + e^{\frac{1}{2}|t|^\alpha}|t|^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|\kappa_{k0}^{(1)}(y) + 2|t|^{m-\alpha}\kappa_{k0}^{(2)}(y)\right)\right) \le$$

$$\le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1 + e^{\frac{1}{2}T_1^\alpha}|t|^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}T_1 + 2T_1^{m-\alpha}\right)\right),$$

а із визначення T_1

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1 + \frac{4}{b}|t|^\alpha\sqrt{b\kappa_0(y)}\left(-\ln(b\kappa_0(y))\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Оскільки функція $y = x^{\frac{\alpha}{2}}\ln x$ спадає при $x \in \left(0; e^{-\frac{2}{\alpha}}\right)$, то $y(x) > y\left(e^{-\frac{2}{\alpha}}\right) = -\frac{2}{\alpha e}$. Тому при $b\kappa_0(y) \le c < e^{-\frac{2}{\alpha}}$

$$\sqrt{b\kappa_0(y)}\left(-\ln(b\kappa_0(y))\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(-\left(b\kappa_0(y)\right)^{\frac{\alpha}{2}}\ln(b\kappa_0(y))\right)^{\frac{1}{\alpha}} \le \left(-c^{\frac{\alpha}{2}}\ln c\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Тому

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-\frac{1}{2}|t|^\alpha}\left(1 + \frac{4}{b}|t|^\alpha\left(-c^{\frac{\alpha}{2}}\ln c\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right) \le e^{-c_1|t|^\alpha}.$$

Але $\left(-c^{\frac{\alpha}{2}}\ln c\right)^{\frac{1}{\alpha}} < \left(\frac{2}{\alpha e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{b}{8}$, тому $c_1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{b}\left(-c^{\frac{\alpha}{2}}\ln c\right)^{\frac{1}{\alpha}} > 0$.

У випадку $\varkappa_0(y) \le cb^{-1}$ при $|t| > T_1$ із (9), (10) і леми 1 одержуємо

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{|t|^\alpha} + \omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \le e^{-T_1^\alpha} + |t|\left(\varkappa_{k0}^{(1)}(y) + \varkappa_{k0}^{(2)}(y)\right) \le$$

$$\le \varkappa_0(y)(b+2|t|) \le |t|\varkappa_0(y)\left(b\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} + 2\right) = |t|\varkappa_0(y)\left(8e^{-\frac{1}{\alpha}} + 2\right) \le 5|t|\varkappa_0(y).$$

Нехай $\varkappa_0(y)>cb^{-1}$. Оскільки $\varkappa_0^{(2)}(y)\le cb^{-1}$, то $\varkappa_0^{(1)}(y)>cb^{-1}$. Тоді із (9) і леми 1 при $|t| \le T_2 = \frac{c}{b\varkappa_0^{(1)}}$ (враховуємо, що $T_2 < 1$ і $m - \alpha \ge 0$)

$$\left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le e^{-|t|^\alpha} + \omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) = e^{-|t|^\alpha}\left(1 + e^{-|t|^\alpha}\omega_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right) \le$$

$$\le e^{-|t|^\alpha}\left(1 + e^{|t|^\alpha}|t|^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|\varkappa_{k0}^{(1)}(y) + 2|t|^{m-\alpha}\varkappa_{k0}^{(2)}(y)\right)\right) \le$$

$$\le e^{-|t|^\alpha}\left(1 + e^{T_2^\alpha}|t|^\alpha\left(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}T_2\varkappa_{k0}^{(1)}(y) + 2T_2^{m-\alpha}\varkappa_{k0}^{(2)}(y)\right)\right) \le$$

$$\le e^{-|t|^\alpha}\left(1 + 4e|t|^\alpha\frac{c}{b}\right) \le e^{-|t|^\alpha}\left(1 + |t|^\alpha\frac{c}{2}e^{\frac{3}{2}}\right) \le e^{-c_2|t|^\alpha}.$$

Ми використали, що $b = 8\left(\frac{2}{\alpha e}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \ge 8e^{-\frac{1}{2}}$. Лема 2 доведена.

3. Доведення теореми 1. Нехай $y > 0$ і виконується умова $\varkappa_0^{(2)}(y) \le cb^{-1}$, де стала c визначена у лемі 2. Оскільки у випадку $\varkappa_0^{(2)}(y) > cb^{-1}$ теорема стає очевидною: $\rho_n \le 1 \le \frac{b}{c}\varkappa_0^{(2)}(y)$. Використаємо нерівність ([6], стор. 299)

$$|F(x) - G(x)| \le \frac{2}{\pi}\int_0^T |f(x) - g(x)|\frac{dt}{t} + \frac{24\sup\limits_x |G'(x)|}{\pi T}. \tag{11}$$

Оскільки $\rho_n = \sup\limits_x |\Phi_n(x) - Q_n(x)| = \sup\limits_x \left|\Phi_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right) - Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)\right|$, то в (11) покладемо $F(x) = \Phi_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $G(x) = Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)$, $f(x) = \prod\limits_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$, $g(t) = \prod\limits_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$. Із (1) випливає, що випадкові величини η_i мають щільність розподілу, а $G(x) = Q_n\left(x\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)$ є функцією розподілу випадкової величини $\frac{1}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}(\eta_1 + \cdots + \eta_n)$, тоді

$$|G'(x)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx}\prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n|t|^\alpha}dt = \frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right).$$

Із (11) отримаємо

$$\rho_n \le \frac{2}{\pi}\int_0^T \left|\prod_{k=1}^n f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^n g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2}. \tag{12}$$

В нерівності $\left|\prod\limits_{i=1}^{n} a_i - \prod\limits_{i=1}^{n} b_i\right| \le \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i - b_i| \prod\limits_{k=1}^{i-1} |b_k| \prod\limits_{k=i+1}^{n} |a_k|$ покладемо $a_k = f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$, $b_k = g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$. Тоді із лем 1 і 2 при $|t| \le T_l$ ($l = 1$ при $\kappa_0(y) \le cb^{-1}$ і $l = 2$ при $\kappa_0(y) > cb^{-1}$) одержимо:

$$\left|\prod_{i=1}^{n} f_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{i=1}^{n} g_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le \sum_{i=1}^{n} \omega_i\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \prod_{k=1}^{i-1} \left|g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \prod_{k=i+1}^{n} \left|f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\kappa_{k0}^{(1)}(y) + 2|t|^m \kappa_{k0}^{(2)}(y)\right) e^{-|t|^\alpha (i-1)} e^{c_l |t|^\alpha (n-1)} \le$$

$$\le \left(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha+1}\kappa_{k0}^{(1)}(y) + 2|t|^m \kappa_{k0}^{(2)}(y)\right) n e^{-c_l |t|^\alpha (n-1)}. \tag{13}$$

Нехай $\kappa_0(y) > cb^{-1}$ ($l = 2$). Покладемо у (12) $T = T_2$. Тоді для інтеграла у (12), із використанням нерівності (13), при $n > 1$ одержимо

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{T_2} \left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi} n \int_0^{T_2} \left(\frac{2^{1-\delta}}{m^\delta}|t|^{\alpha}\kappa_{k0}^{(1)}(y) + 2|t|^{m-1} \kappa_{k0}^{(2)}(y)\right) n e^{-c_l |t|^\alpha (n-1)} dt \le$$

$$\le \frac{\kappa_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} C_3 + \frac{\kappa_0^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}} C_4. \tag{14}$$

Через C_k будемо позначати сталі, що залежать тільки від c і α. Із (10) та (12) при $n > 1$ і $\kappa_0(y) > cb^{-1}$

$$\rho_n \le C_5 \left(\frac{\kappa_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{\kappa_0^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}}\right). \tag{15}$$

Із умови $\kappa_0(y) > cb^{-1}$ випливає справедливість теореми і при $n = 1$. У випадку $\kappa_0(y) > cb^{-1}$ теорема доведена.

Нехай $\kappa_0(y) \le cb^{-1}$, $n > 1$. В (12) покладемо $T = \frac{c}{5}(\kappa_0(y))^{\frac{n}{n+1}}$, $T' = \min(T_1, T)$. Тоді

$$I = \frac{2}{\pi}\int_0^{T} \left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int_0^{T'} \left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - \prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_{T'}^{T} \left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} + \frac{2}{\pi}\int_{T'}^{T} \left|\prod_{k=1}^{n} g_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right| \frac{dt}{t} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{16}$$

Враховуючи, що $T' \le T_1$, із (12) при $n > 1$, аналогічно до (14), одержимо:

$$I_1 \le C_6 \left(\frac{\kappa_0^{(1)}(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}} + \frac{\kappa_0^{(2)}(y)}{n^{\frac{m}{\alpha}-1}}\right). \tag{17}$$

Будемо вважати, що $T' = T_1$, бо у випадку $T' = T$ $I_2 = 0$, $I_3 = 0$. Із (7) і (10) одержуємо

$$I_2 = \frac{2}{\pi}\int_{T_1}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int_{T_1}^{T}(5|t|\kappa_0(y))^n\frac{dt}{t} \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}(5\kappa_0(y))^n\frac{T^n}{n} \le \frac{2}{\pi}(\kappa_0(y))^{\frac{n}{n+1}}\frac{c^n}{n} \le C_7 n^{-\frac{1}{\alpha}}(\kappa_0(y))^{\frac{n}{n+1}}. \qquad (18)$$

Для оцінки I_3 використаємо нерівність $\int\limits_{\alpha}^{\infty} e^{-t}t^u dt \le a^u e^{-a}$ $(a > 0,\ u \le 0)$. Тоді із (1), (10) і умови $b\kappa_0(y) \le c$ одержуємо:

$$I_3 = \frac{2}{\pi}\int_{T_1}^{T}\left|\prod_{k=1}^{n} f_k\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int_{T_1}^{T} e^{-nt^\alpha}\frac{dt}{t} \le \frac{2}{\pi}\int_{T_1}^{\infty} e^{-nt^\alpha}\frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha}\int_{n(T_1)^\alpha}^{\infty} e^{-z}z^{-1}dz \le \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha}(n(T_1)^\alpha)^{-1}e^{-n(T_1)^\alpha} \le \frac{2}{\pi}\frac{1}{n\alpha}(b\kappa_0(y))^n \le$$

$$\le \frac{\kappa_0(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\cdot\frac{1}{\alpha}n^{\frac{1}{\alpha}-1}c^{n-1}\frac{2b}{\pi} \le C_8\frac{\kappa_0(y)}{n^{\frac{1}{\alpha}}}. \qquad (19)$$

Із (10), (16)–(19) одержуємо справедливість теореми у випадку $n>1$, $\kappa_0(y)\le cb^{-1}$.

Нехай $n = 1$, $\kappa_0(y) \le cb^{-1}$. Із (15) і леми 1

$$\rho_1 \le \frac{2}{\pi}\int_0^T\left|f_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right) - g_1\left(t\lambda^{-\frac{1}{\alpha}}\right)\right|\frac{dt}{t} + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2} \le \frac{2}{\pi}\int_0^T |t|\left(\kappa_{k0}^{(1)}(y) + \kappa_{k0}^{(2)}(y)\right)\frac{dt}{t} +$$

$$+\frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2} \le \frac{2}{\pi}\left(\kappa_{k0}^{(1)}(y) + \kappa_{k0}^{(2)}(y)\right)T + \frac{24\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)}{n^{\frac{1}{\alpha}}T\pi^2} \le C_9\left(\kappa_0(y)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема доведена.

Список використаної літератури

1. *Капустей М. М., Слюсарчук П. В.* Про одну форму псевдомоментів і їх застосування для оцінки близькості функцій розподілу двох сум випадкових величин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформатика. – Ужгород, 2013. – Вип. 24, № 2. – С. 69–76.
2. *Капустей М. М., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості функцій розподілу сум випадкових величин в термінах псевдомоментів // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформатика. – Ужгород, 2014. – Вип. 25, № 2. – С. 58–64.
3. *Боярищева Т. В., Слюсарчук П. В.* Оцінка близькості розподілів двох сум для різно розподілених випадкових величин // Науковий вісник Ужгородського ун-ту. Сер. матем. і інформатика. – Ужгород, 2001. – Вип. 6. – С. 4–8.
4. *Золотарёв В. М.* О близкости распределений дву сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и её применения. – 1965. – Т. 10, вып. 3. – С. 519–526.
5. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986.– 416 с.
6. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962.– 720 с.

Одержано 11.11.2015