

УДК 512.552

С. В. Лисенко, А. П. Петравчук, О. М. Шевчик (Київський нац. ун-т ім. Тараса Шевченка)

ПРО ДІЮ ДИФЕРЕНЦІЮВАНЬ НА ЕЛЕМЕНТИ КОМУТАТИВНИХ АСОЦІАТИВНИХ КІЛЕЦЬ

Let R be an associative commutative ring with 1 and D a derivation of R . The action of D on nilpotent elements and on zero-divisors of R is studied. It is proved that if $a \in R$ is a nilpotent element with $a^n = 0$, then $D(a)^m = 0$ for some $m \leq 3n$ provided that the additive group of the ring R has no p -torsion for all prime p , $p \leq n$.

Нехай R – асоціативне комутативне кільце з одиницею і D – диференціювання кільця R . Вивчено дію D на нільпотентних елементах і на дільниках нуля кільця R . Доведено, що якщо $a \in R$ – нільпотентний елемент з $a^n = 0$, то $D(a)^m = 0$ для $m \leq 3n$ при умові, що адитивна група кільця R не має p -скруту для всіх простих p , $p \leq n$.

Нехай R – довільне комутативне асоціативне кільце з одиницею, яку ми будемо позначати через 1. Нагадаємо, що відображення $D: R \rightarrow R$ називається диференціюванням кільця R , якщо D – адитивне відображення (тобто $D(a+b) = D(a)+D(b)$) і задовольняє правилу Лейбніца: $D(ab) = D(a)b+aD(b)$ для довільних $a, b \in R$. Вивченню дії диференціювань на елементи і ідеали кілець присвячено багато робіт різних авторів (див., наприклад, [1], [2], [3], [4]). Зокрема, в роботі [4] доведено, що для будь-якого нільпотентного ідеалу I асоціативного комутативного кільця R і довільного диференціювання D кільця R підмножина $I + D(I)$ є нільпотентним ідеалом із R індексу нільпотентності $\leq n^2$, де n – індекс нільпотентності ідеалу I , при умові, що адитивна група $(R, +)$ кільця R не містить елементів порядку p для кожного простого p , яке не перевищує числа n . Звідси випливає, що при таких обмеженнях на групу $(R, +)$ довільне диференціювання D кільця R переводить нільпотентний елемент $a \in R$ в нільпотентний елемент $D(a)$.

В даній роботі досліджується залежність між індексом нільпотентності елемента $a \in R$ і індексом нільпотентності елемента $D(a)$ для довільного диференціювання D кільця R . Доведено, що якщо $n = n(a)$ – індекс нільпотентності елемента $a \in R$, то $n(D(a)) \leq 3n$ при вказаних вище обмеженнях на адитивну групу $(R, +)$ (Теорема 1). Відзначено, що такі обмеження є суттєвими. В роботі також досліджено дію диференціювань на дільники нуля кільця R при деяких обмеженнях на анулятори елементів (Теорема 2).

В роботі використовуються стандартні позначення. Нагадаємо, що індексом нільпотентності (нільпотентного) елемента $a \in R$ називається найменше натуральне n таке, що $a^n = 0$. Якщо D – диференціювання кільця R , то через D^n позначається композиція D з самим собою n разів (в загальному випадку, D^n не є диференціюванням кільця R при $n > 1$). Покладемо також $D^0 = E$ – тотожне відображення кільця R на себе. Далі, через $\text{Ann}_R(a)$ позначається анулятор елемента a в R , тобто $\{b \in R \mid ab = 0\}$. Очевидно, $\text{Ann}_R(a)$ – ідеал кільця R (відмінний від 0, якщо a – дільник нуля в R). Нагадаємо також, що адитивна група $(R, +)$ кільця R не має n -скруту ($n \in \mathbb{N}$, $n > 1$), якщо з умови $nx = 0$, $x \in R$ випливає, що $x = 0$ (очевидно, $(R, +)$ не має n -скруту тоді і тільки тоді,

коли ця група не має p -скруту для довільного простого дільника p числа n). Множину всіх диференціювань кільця R будемо позначати через $Der R$.

Для доведення теореми 1 нам будуть потрібні наступні леми технічного характеру. Перша з цих лем містить узагальнену формулу Лейбніца, яка є аналогом поліноміальної формули з комбінаторики і може бути доведена індукцією по k при фіксованому n .

Лема 1. *Нехай R – асоціативне комутативне кільце з 1 і $a \in R$ – довільний елемент. Якщо D – диференціювання кільця R , то для довільних цілих n і k , $n \geq 1$, $k \geq 0$ виконуються рівності*

$$D^k(a^n) = \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_n = k \\ s_i \geq 0}} \binom{k}{s_1, \dots, s_n} D^{s_1}(a) \dots D^{s_n}(a) \quad (1)$$

Лема 2. *Нехай R – асоціативне комутативне кільце з 1 і $D \in Der R$. Тоді:*

1) *Якщо $(R, +)$ не має 2-скруту і $a \in R$ такий елемент, що $a^2 = 0$, то $(D(a))^3 = 0$.*

2) *Якщо $(R, +)$ не має 2-скруту і 3-скруту, і для елемента $a \in R$ виконується рівність $a^3 = 0$, то $(D(a))^5 = 0$.*

Доведення.

1) Застосовуючи до обох частин рівності $a^2 = 0$ диференціювання D отримаємо, що $2aD(a) = 0$. Звідси за умовою леми отримаємо $aD(a) = 0$. Застосовуючи ще раз D до останньої рівності отримаємо, що $D(a)^2 + aD^2(a) = 0$. Домножуючи обидві частини цієї рівності на $D(a)$ і враховуючи рівність $aD(a) = 0$ отримаємо $D(a)^3 = 0$.

2) Із умови $(a)^3 = 0$ після застосування D отримаємо рівність $3a^2D(a) = 0$ і тому за умовами леми $a^2D(a) = 0$. Застосовуючи ще раз диференціювання D до останньої рівності отримаємо $2aD(a)^2 + a^2D^2(a) = 0$. Ще одне застосування D дає рівність

$$2D(a)^3 + 6aD(a)D^2(a) + a^2D^3(a) = 0$$

і тому

$$2D(a)^3 = -6aD(a)D^2(a) - a^2D^3(a).$$

Домножимо обидві частини останньої рівності на $D(a)^2$.

Отримаємо

$$2D(a)^5 = -6aD(a)^3D^2(a) - a^2D^3(a)D(a)^2 = -6aD(a)^3D^2(a),$$

бо $-a^2D^3(a)D(a)^2 = 0$ з огляду на рівність $a^2D(a) = 0$. Але за доведеним вище $2aD(a)^2 = -a^2D^2(a)$ і тому

$$-6aD(a)^3D^2(a) = -3 \cdot 2aD(a)^2D(a)D^2(a) = 3a^2D^2(a)D(a)D^2(a) = 0.$$

Таким чином, $D(a)^5 = 0$.

Лема 3. *Якщо в асоціативному комутативному кільці R для елемента a виконується умова $a^n = 0$ і адитивна група кільця R не має p -скруту для довільного простого $p \leq n$, то для будь-якого диференціювання D кільця R мають місце рівності*

$$a^{n-k}D(a)^{2k-1} = 0, \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (2)$$

Доведення. Індукція по k . Із рівності $a^n = 0$ отримаємо $(n-1)a^{n-1}D(a) = 0$ і тому $a^{n-1}D(a) = 0$ в силу умов леми на адитивну групу $(R, +)$, тобто тоді (2) виконується для $k = 1$. Нехай вже доведено, що $a^{n-(k-1)}D(a)^{2(k-1)-1} = 0$, покажемо, що тоді виконується (2). Застосуємо диференціювання D до обох частин останньої рівності. Отримаємо

$$(n - (k - 1))a^{n-k}D(a)D(a)^{2(k-1)-1} + a^{n-(k-1)}(2(k-1) - 1) \cdot D(a)^{2(k-1)-2}D^2(a) = 0.$$

Звідси випливає, що

$$(n - (k - 1))a^{n-k}D(a)^{2(k-1)} = -a^{n-(k-1)}(2k - 3)D(a)^{2(k-1)-2}D^2(a).$$

Домножимо обидві частини останньої рівності на $D(a)$. Тоді її права частина перетвориться на нуль за індуктивним припущенням. Але тоді отримаємо

$$(n - (k - 1))a^{n-k}D(a)^{2k-1} = 0$$

і тому, враховуючи умову леми, маємо $a^{n-k}D(a)^{2k-1} = 0$.

Зауваження 1. Позначивши у співвідношенні (2) $s = n - k$ отримаємо це співвідношення в іншій формі

$$a^s D(a)^{2(n-s)-1} = 0, \quad s = 1, \dots, n - 1.$$

Лема 4. Нехай a – елемент комутативного кільця R з одиницею. Тоді в правій частині рівності

$$D^n(a^n) = \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_n = n \\ s_i \geq 0}} \binom{n}{s_1, \dots, s_n} D^{s_1}(a) \dots D^{s_n}(a),$$

яка має місце за формулою (1), в кожному доданку

$$\binom{n}{s_1, \dots, s_n} D^{s_1}(a) \dots D^{s_n}(a)$$

число співмножників вигляду $a = D^0(a)$ плюс число співмножників вигляду $D(a)$ більше або рівне $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (тут $\lfloor x \rfloor$ – ціла частина дійсного числа x).

Доведення. Нехай спочатку $n = 2k$ – парне і нехай кількість чисел s_i , які рівні 0 плюс кількість чисел s_i , рівних 1 менше ніж $k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Тоді кількість чисел s_i , більших або рівних 2 буде не менше ніж $k + 1$ і тому

$$n = \sum_{i=1}^n s_i \geq 2(k + 1) > n,$$

що неможливо. Отримана суперечність показує справедливість леми при $n = 2k$. Нехай тепер $n = 2k + 1$. Тоді $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor = k$ і аналогічні міркування показують справедливість твердження леми при $n = 2k + 1$.

Теорема 1. Нехай R – асоціативне комутативне кільце з 1 і D – диференціювання кільця R . Якщо для деякого елемента $a \in R$ виконується рівність $a^n = 0$, то тоді $D(a)^{3n} = 0$ при умові, що адитивна група кільця R не має p -скруту для всіх простих p , $p \leq n$.

Доведення. В рівності (1) при $k = n$ перенесемо член $n!D(a)^n$, який відповідає значенням $s_1 = s_2 = \dots = s_n = 1$ в ліву частину рівності (1) (яка дорівнює 0, бо $D^n(a^n) = 0$) і тоді отримаємо

$$-n!D(a)^n = \sum_{\substack{s_1 + \dots + s_n = n \\ s_i \geq 0, \exists s_j \geq 2}} \binom{n}{s_1, \dots, s_n} D^{s_1}(a) \dots D^{s_n}(a) \quad (3)$$

Візьмемо довільний доданок

$$\binom{n}{s_1, \dots, s_n} D^{s_1}(a) \dots D^{s_n}(a)$$

в правій частині (3) і нехай множник $a = D^0(a)$ входить в нього в степені t , а множник $D(a) = D^1(a)$ входить в степені v . Тоді за лемою 4 виконується нерівність $t + v \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Розглянемо добуток $a^t D(a)^v D(a)^{2n}$. Неважко переконатися, використовуючи лему 3, що $a^t D(a)^v D(a)^{2n} = 0$ при умові, що $t + v \geq \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Але тоді, домножуючи обидві частини рівності (3) на $D(a)^{2n}$ отримаємо, що права частина перетворюється на нуль. Таким чином $-n!D(a)^{3n} = 0$ і тоді за умовою леми $D(a)^{3n} = 0$.

Зауваження 2. Якщо не накладати обмежень на адитивну групу кільця R , то, взагалі кажучи, твердження теореми 1 не має місця, як показує п.1 із прикладу 1.

Зауваження 3. Оцінка для індексу нільпотентності елемента $D(a)$ в теоремі 1 не є найкращою. За лемою 2 із $a^3 = 0$ випливає, що $D(a)^5 = 0$, також можна безпосередньо довести, що із умови $a^4 = 0$ випливає, що $D(a)^8 = 0$.

Очевидно, довільний автоморфізм кільця R переводить нільпотентні елементи, оборотні елементи і дільники нуля кільця в елементи з відповідними властивостями. Диференціювання кільця R не мають таких властивостей, якщо не накладати на кільце додаткових умов. В наступному прикладі наводяться комутативні кільця, в яких диференціювання не зберігають вказані вище властивості елементів кільця.

Приклад 1. 1) Нехай \mathbb{K} – поле характеристики $p > 0$ і $G = \langle g \rangle$ – циклічна група порядку p . Лінійне відображення D групової алгебри $\mathbb{K}[G]$ в себе, задане на базисі $\{1, g, \dots, g^{p-1}\}$ за правилом $D(1) = 0$, $D(g^i) = ig^{i-1}$ є диференціюванням кільця $\mathbb{K}[G]$ і для нільпотентного елемента $a = g - 1$ його образ $D(a) = 1$ є оборотним в $\mathbb{K}[G]$.

2) Нехай $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ і $R = \mathbb{Z}_4[x]$ – кільце многочленів над кільцем \mathbb{Z}_4 . Адитивне відображення

$$D: \mathbb{Z}_4[x] \rightarrow \mathbb{Z}_4[x]$$

задане за правилом $D(1) = 0$ і $D(x^i) = ix^{i-1}$ на мономах $1, x, x^2, \dots$ є диференціюванням кільця $\mathbb{Z}_4[x]$ і для оборотнього елемента $a = 1 + 2x$ образ $D(a) = 2$ є нільпотентним елементом кільця $\mathbb{Z}_4[x]$.

3) Нехай $R = \mathbb{K}[x] \times \mathbb{K}[y]$ – прямий добуток полів раціональних функцій $\mathbb{K}[x]$ і $\mathbb{K}[y]$ над полем \mathbb{K} . Лінійне відображення $D: R \rightarrow R$ задане за правилом $D(f(x), g(y)) = (f'_x, g'_y)$ є диференціюванням кільця R і для оборотнього елемента $a = (x, 1) \in R$ його образ $D(a) = (1, 0)$ є ненільпотентним дільником нуля.

Теорема 2. *Нехай R – асоціативне комутативне кільце з 1 і a – дільник нуля із R . Якщо $(Ann_R(a))^2 \neq 0$, то для довільного диференціювання $D \in Der R$ елемент $D(a)$ є дільником нуля в R .*

Доведення. Припустимо, що в умовах леми елемент $D(a)$ не є дільником нуля в R . Оскільки a – дільник нуля, то існує елемент $b \in R$, $b \neq 0$ такий, що $ab = 0$. Тоді для довільного диференціювання $D \in Der R$ маємо $D(a)b + aD(b) = 0$. Візьмемо довільний елемент $b_1 \in Ann_R(a)$ і домножимо обидві частини останньої рівності на b_1 . Тоді $D(a)bb_1 = 0$. Оскільки елемент $D(a)$ не є дільником нуля за припущенням, то $bb_1 = 0$. Звідси з огляду на довільність у виборі b і $b_1 \in Ann_R(a)$ отримаємо, що $(Ann_R(a))^2 = 0$, що суперечить умовам леми. Отримана суперечність доводить, що $D(a)$ – дільник нуля в кільці R .

Зауваження 4. *Умова $(Ann_R(a))^2 \neq 0$ є суттєвою в теоремі 2. Дійсно, в груповому кільці $R = \mathbb{K}[G]$ із прикладу 1 елемент $a = g - 1$ має анулятор*

$$Ann_R(a) = \mathbb{K}(1 + g + \dots + g^{p-1})$$

і $(1 + g + \dots + g^{p-1})^2 = 0$. При цьому образ $D(a) = 1$ дільника нуля $a = g - 1$ не є дільником нуля в R .

Відзначимо також, що ряд результатів про дію диференціювань на елементи та на підмножини комутативних асоціативних кілець переносяться (при певних обмеженнях на комутатори елементів) на некомутативні кільця (див., наприклад, [5], [6]). Зокрема, деякі співвідношення для нільпотентних елементів некомутативних кілець виконуються при умові комутування елементів з їх образами при диференціюваннях.

Список використаної літератури

1. *Lanski C.* Left ideals and derivations in semiprime rings// J. Algebra. – 2004. – **277**, no. 2. – P.658–667.
2. *Letzter G.* Derivations and nil ideals// Rendicotti del Gircolo Matematico di Palermo. – 1988. – **37**, no.2. – P.174–176.
3. *Luchko V.S., Petravchuk A.P.* On one-sided Lie nilpotent ideals of associative rings// Algebra and Discrete Mathematics. – 2007. – no.4.– P.102–107.
4. *Лучко В.С.* О действии дифференцирований на нильпотентные идеалы ассоциативных алгебр// Укр. матем. журнал. – 2009. – т. 61, №7. – С.1000–1004.
5. *Deng Q, Bell H.E.* On derivations and commutativity in semiprime rings// Comm. Algebra. – 1995. – **23** (10). – P.3705–3713.
6. *Bergen J., Herstein I.N., Kerr J.W.* Lie ideals and derivations of prime rings// J. Algebra. – 1981. – **71**. – P.259–267.

Одержано 10.11.2015