

УДК 519.21

М. М. Михасюк, П. В. Слюсарчук (Ужгородський нац. ун-т)

## ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ В ЦЕНТРАЛЬНІЙ ГРАНИЧНІЙ ТЕОРЕМІ ДЛЯ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ СЕРІЙ НЕЗАЛЕЖНИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Specification is considered of one estimate of Ignat Yu. and Paditz L.

Розглядається уточнення однієї оцінки Ігната Ю. І. і Падітц Л.

**1. Формулювання основного результату.** У даній роботі ми розглядаємо уточнення центральної теореми для послідовності серій незалежних в кожній серії випадкових величин. А саме, уточнюються теорема 2 із [1] і теорема 3 із [2]. В роботі [2] стала в теоремі 3  $L_3 < 17,96$ . Ми показуємо, що стала у теоремі 2 із [1] і теоремі 3 із [2] не перевищує 14,678.

Нехай  $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$  – незалежні випадкові величини з математичним сподіванням  $M\xi_{nk} = 0$ , дисперсією  $D\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2$ ,  $0 < \sigma_{nk} < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^{k_n} \sigma_{nk}^2 = 1$ . Позначимо:  $F_{nk}(x)$  – функція розподілу, а  $f_{nk}(t)$  – характеристична функція випадкової величини  $\xi_{nk}$ ,  $\Phi_n(x)$  – функція розподілу суми  $S_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk_n}$ ,  $\Phi(x)$  – функція розподілу стандартного нормального закону,  $\varphi_n(t)$  – характеристична функція  $S_n$ ,  $\rho_n = \sup_x |\Phi_n(x) - \Phi(x)|$ .

Для довільного  $\varepsilon > 0$  позначимо

$$\lambda_{nk}^{(1)} = \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x), \quad \lambda_{nk}^{(2)} = \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x), \quad \lambda_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_{nk}^{(1)}, \quad \lambda_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{k_n} \lambda_{nk}^{(2)}.$$

**Теорема.** Для довільного  $\varepsilon > 0$  і для всіх  $n \geq 1$  виконується нерівність

$$\rho_n \leq C (\lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)}), \quad (1)$$

де стала  $C \leq 14,678$ .**2. Допоміжна лема.****Лема.** Нехай  $\lambda_n^{(2)} \leq \frac{1}{14}$ ,  $|t| \leq T_n = (4\lambda_n^{(1)})^{-1}$ . Тоді має місце нерівність

$$\left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq e^{-\frac{t^2}{4}} (1,102\lambda_n^{(1)}|t|^3 + 11,495\lambda_n^{(2)}t^2). \quad (2)$$

**Доведення.** Будемо використовувати нерівність ([3], стор. 372):

$$\left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!} - \dots - \frac{(i\alpha)^m}{m!} \right| \leq \frac{2^{1-\delta}|\alpha|^{m+\delta}}{m!(m+1)^\delta}, \quad (0 \leq \delta \leq 1). \quad (3)$$

Випадок 1:  $|t| \leq T'_n = \min \left\{ a_1 (\lambda_n^{(1)})^{-\frac{1}{3}}, a_2 (\lambda_n^{(2)})^{-\frac{1}{2}} \right\}$ ,  $|t| \leq T_n$ , де  $a_1 = 1,22$ ,  $a_2 = \sqrt{0,174}$ ,  $a = a_1^2 + a_2^2 = 1,6624$ .

$$|f_{nk}(t) - 1| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{itx} - 1 - itx) dF_{nk}(x) \right| \leq \frac{t^2}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{nk}(x) =$$

$$= \frac{t^2}{2} \left( \int_{|x| \leq \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) \right).$$

Використаємо нерівність Ляпунова

$$(M|\xi\chi_\varepsilon|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (M|\xi\chi_\varepsilon|^3)^{\frac{1}{3}}, \text{ де } \chi_\varepsilon = \begin{cases} 1, & \xi \in [-\varepsilon; \varepsilon], \\ 0, & \xi \notin [-\varepsilon; \varepsilon]. \end{cases}$$

Врахувавши останню нерівність і умову  $|t| \leq T'_n$ , одержуємо,

$$\begin{aligned} |f_{nk}(t) - 1| &\leq \frac{t^2}{2} \left( (\lambda_{nk}^{(1)})^{\frac{2}{3}} + \lambda_{nk}^{(2)} \right) \leq \frac{1}{2} \left( (a_1 (\lambda_n^{(1)})^{-\frac{1}{3}})^2 (\lambda_{nk}^{(1)})^{\frac{2}{3}} + (a_2 (\lambda_n^{(2)})^{-\frac{1}{2}})^2 \lambda_{nk}^{(2)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2) = \frac{1}{2} a < 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Піднесемо першу нерівність із (4) до квадрату, і врахуємо умову  $|t| \leq T_n$ . Тоді

$$\begin{aligned} |f_{nk}(t) - 1|^2 &\leq \frac{t^4}{4} \left( (\lambda_{nk}^{(1)})^{\frac{4}{3}} + 2 (\lambda_{nk}^{(1)})^{\frac{2}{3}} \lambda_{nk}^{(2)} + (\lambda_{nk}^{(2)})^2 \right) \leq \\ &\leq \frac{|t|^3}{4} a_1 (\lambda_n^{(1)})^{-\frac{1}{3}} (\lambda_{nk}^{(1)})^{\frac{4}{3}} + \frac{t^2}{2} (a_1 (\lambda_n^{(1)})^{-\frac{1}{3}})^2 (\lambda_{nk}^{(1)})^{\frac{2}{3}} \lambda_{nk}^{(2)} + \frac{t^2}{4} (a_2 (\lambda_n^{(2)})^{-\frac{1}{2}})^2 (\lambda_{nk}^{(2)})^2 = \\ &= \frac{|t|^3}{4} a_1 \lambda_{nk}^{(1)} + \frac{t^2}{2} a_1^2 \lambda_{nk}^{(2)} + \frac{t^2}{4} a_2^2 \lambda_{nk}^{(2)} = \frac{|t|^3}{4} a_1 \lambda_{nk}^{(1)} + t^2 \left( \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{4} \right) \lambda_{nk}^{(2)}. \end{aligned} \quad (5)$$

Нехай  $|z| \leq \frac{a}{2}$ . Тоді  $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$ ,

$$|\ln(1+z) - z| \leq \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} + \frac{|z|^4}{3} + \dots = \frac{|z|^2}{2} + \frac{|z|^3}{3} \frac{1}{1-|z|} \leq |z|^2 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3(1-\frac{a}{2})} \right).$$

Тому при  $|z| \leq \frac{a}{2}$

$$\ln(1+z) = z + \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3(1-\frac{a}{2})} \right) \theta |z|^2, \quad (6)$$

де  $|\theta| \leq 1$ .

Надалі будемо використовувати нерівність:  $|e^z - 1| \leq |z|e^{|z|}$ . Тоді із (4) випливає, що характеристичну функцію  $\varphi_n(t)$  можна логарифмувати. За згаданою нерівністю

$$\begin{aligned} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| &= \left| e^{\ln \varphi_n(t)} - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = e^{-\frac{t^2}{2}} \left| e^{\frac{t^2}{2} + \ln \varphi_n(t)} - 1 \right| \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left| \frac{t^2}{2} + \ln \varphi_n(t) \right| e^{\left| \frac{t^2}{2} + \ln \varphi_n(t) \right|} = e^{-\frac{t^2}{2}} \gamma_n e^{\gamma_n}, \end{aligned} \quad (7)$$

де  $\gamma_n = \left| \frac{t^2}{2} + \ln \varphi_n(t) \right|$ .

Оскільки

$$\ln \varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \ln f_{nk}(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \ln (1 + (f_{nk}(t) - 1)),$$

то, враховуючи (6), оцінимо  $\gamma_n$  наступним чином:

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \left| \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{k_n} (f_{nk}(t) - 1) + \sum_{k=1}^{k_n} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3(1 - \frac{a}{2})} \right) \theta_k |f_{nk}(t) - 1|^2 \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{k_n} (f_{nk}(t) - 1) \right| + \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3(1 - \frac{a}{2})} \right) \sum_{k=1}^{k_n} |f_{nk}(t) - 1|^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Окремо оцінимо обидва доданки у (8). З нерівності (3) отримаємо:

$$\begin{aligned} \left| \frac{t^2}{2} + \sum_{k=1}^{k_n} (f_{nk}(t) - 1) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{k_n} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right) dF_{nk}(x) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_n} \left( \int_{|x| \leq \varepsilon} \left| e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right| dF_{nk}(x) \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{k_n} \left( \int_{|x| > \varepsilon} \left| e^{itx} - 1 - itx - \frac{(itx)^2}{2} \right| dF_{nk}(x) \right) \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^{k_n} \frac{|t|^3}{6} \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x) + \sum_{k=1}^{k_n} t^2 \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{|t|^3}{6} \lambda_n^{(1)} + t^2 \lambda_n^{(2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

З нерівності (5) маємо:

$$\sum_{k=1}^{k_n} \left| f_k \left( \frac{t}{B_n} \right) - 1 \right|^2 \leq \frac{|t|^3}{4} a_1 \lambda_n^{(1)} + t^2 \left( \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{4} \right) \lambda_n^{(2)}.$$

Із (5), (8) і (7) отримуємо

$$\begin{aligned} \gamma_n &\leq \frac{|t|^3}{6} \lambda_n^{(1)} + t^2 \lambda_n^{(2)} + \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3(1 - \frac{a}{2})} \right) \left( \frac{|t|^3}{4} a_1 \lambda_n^{(1)} + t^2 \left( \frac{a_1^2}{2} + \frac{a_2^2}{4} \right) \lambda_n^{(2)} \right) = \\ &= |t|^3 \lambda_n^{(1)} \left( \frac{1}{6} + \frac{a_1}{4} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3(1 - \frac{a}{2})} \right) \right) + t^2 \lambda_n^{(2)} \left( 1 + \frac{2a_1^2 + a_2^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (10)$$

З умов леми  $|t| \leq T'_n$ ,  $|t| \leq T_n$  і нерівностей (7) і (10) маємо

$$\left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq e^{-\frac{t^2}{2}} \gamma_n e^{\gamma_n} \leq$$

$$\leq e^{-\frac{t^2}{2}} \left( |t|^3 \lambda_n^{(1)} \left( \frac{1}{6} + \frac{a_1}{4} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3(1-\frac{a}{2})} \right) \right) + t^2 \lambda_n^{(2)} \left( 1 + \frac{2a_1^2 + a_2^2}{4} \right) \right) \times \\ \times \exp \left\{ |t|^3 \lambda_n^{(1)} \left( \frac{1}{6} + \frac{a_1}{4} \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{3(1-\frac{a}{2})} \right) \right) + t^2 \lambda_n^{(2)} \left( 1 + \frac{2a_1^2 + a_2^2}{4} \right) \right\}.$$

Врахувавши, що  $|t| \leq T'_n$ ,  $|t| \leq T_n$ ,  $a_1 = 1,22$ ,  $a_2 = \sqrt{0,174}$ ,  $a = a_1^2 + a_2^2 = 1,6624$ ,

$$|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leq e^{-\frac{t^2}{2}} (0,82|t|^3 \lambda_n^{(1)} + 1,7877t^2 \lambda_n^{(2)}) \exp \{ |t|^3 \lambda_n^{(1)} 0,82 + t^2 \lambda_n^{(2)} 1,7877 \},$$

де, при виконанні умов  $|t| \leq T'_n$ ,  $|t| \leq T_n$ ,  $\lambda_n^{(2)} \leq \frac{1}{14}$ ,

$$\exp \{ |t|^3 \lambda_n^{(1)} 0,82 + t^2 \lambda_n^{(2)} 1,7877 \} \leq \exp \left\{ t^2 (4\lambda_n^{(1)})^{-1} \lambda_n^{(1)} 0,82 + t^2 \lambda_n^{(2)} 1,7877 \right\} \leq \\ \leq \exp \left\{ t^2 4^{-1} 0,82 + 0,35t^2 \frac{1}{14} 1,7877 + 0,65 \left( a_2 (\lambda_n^{(2)})^{-\frac{1}{2}} \right)^2 \lambda_n^{(2)} 1,7877 \right\} \leq \\ \leq e^{\frac{t^2}{4}} e^{0,65(a_2)^2 1,7877} \leq e^{\frac{t^2}{4}} 1,2241,$$

тому

$$|\varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}}| \leq e^{-\frac{t^2}{2}} (0,82|t|^3 \lambda_n^{(1)} + 1,7877t^2 \lambda_n^{(2)}) e^{\frac{t^2}{4}} 1,2241 \leq \\ \leq e^{-\frac{t^2}{4}} (1,01|t|^3 \lambda_n^{(1)} + 2,19t^2 \lambda_n^{(2)}). \quad (11)$$

У випадку 1 лема доведена.

Випадок 2:  $|t| > T'_n$ ,  $|t| \leq T_n$ .

$$|f_{nk}(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_{nk}(x) \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \cos tx dF_{nk}(x) + i \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx dF_{nk}(x) \right|^2 = \\ = \left( 1 + \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx - 1) dF_{nk}(x) \right)^2 + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx dF_{nk}(x) \right)^2 = \\ = 1 - t^2 \sigma_{nk}^2 + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \cos tx - 1 + \frac{(tx)^2}{2} \right) dF_{nk}(x) + \\ + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx - 1) dF_{nk}(x) \right)^2 + \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx dF_{nk}(x) \right)^2. \quad (12)$$

Зараз оцінимо всі доданки останньої рівності. Із (3) отримаємо:

$$\left| \cos \alpha - 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right| = \left| \operatorname{Re} \left( e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!} \right) \right| \leq \left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!} \right| \leq \frac{|\alpha|^3}{6},$$

$$\left| \cos \alpha - 1 + \frac{\alpha^2}{2} \right| = \left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!} \right| \leq \alpha^2.$$

Із цих нерівностей для першого інтеграла в (12) одержуємо

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \cos tx - 1 + \frac{t^2 x^2}{2} \right) dF_{nk}(x) = \\ & = \int_{|x| \leq \varepsilon} \left( \cos tx - 1 + \frac{t^2 x^2}{2} \right) dF_{nk}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} \left( \cos tx - 1 + \frac{t^2 x^2}{2} \right) dF_{nk}(x) \leq \\ & \leq \frac{|t|^3}{6} \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x) + t^2 \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{|t|^3}{6} \lambda_{nk}^{(1)} + t^2 \lambda_{nk}^{(2)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Знову, із нерівності (3) отримаємо:

$$\begin{aligned} |\cos \alpha - 1| &= |Re(e^{i\alpha} - 1 - i\alpha)| \leq |e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \leq \frac{\alpha^2}{2}, \\ |\cos \alpha - 1| &\leq |e^{i\alpha} - 1| \leq |\alpha|. \end{aligned}$$

Із наведених нерівностей випливає наступна нерівність  $|\cos \alpha - 1| \leq \frac{|\alpha|^3}{\sqrt{2}}$ . Із цих нерівностей для другого інтеграла (12) одержуємо

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx - 1) dF_{nk}(x) \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} (\cos tx - 1)^2 dF_{nk}(x) = \\ & = \int_{|x| \leq \varepsilon} (\cos tx - 1)^2 dF_{nk}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} (\cos tx - 1)^2 dF_{nk}(x) \leq \\ & \leq \frac{|t|^3}{2} \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x) + t^2 \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{|t|^3}{2} \lambda_{nk}^{(1)} + t^2 \lambda_{nk}^{(2)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Тепер із нерівностей (3) отримаємо

$$\begin{aligned} |\sin \alpha - \alpha| &= \left| Im \left( e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!} \right) \right| \leq \left| e^{i\alpha} - 1 - i\alpha - \frac{(i\alpha)^2}{2!} \right| \leq \frac{|\alpha|^3}{6}, \\ |\sin \alpha - \alpha| &= |Im(e^{i\alpha} - 1 - i\alpha)| \leq |e^{i\alpha} - 1 - i\alpha| \leq \frac{\alpha^2}{2}, \end{aligned}$$

тому

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx dF_{nk}(x) \right)^2 \leq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sin tx dF_{nk}(x) \right|^2 = \\ & = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} (\sin tx - tx) dF_{nk}(x) \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin tx - tx|^2 dF_{nk}(x) \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_{|x| \leq \varepsilon} |\sin tx - tx| dF_{nk}(x) + \int_{|x| > \varepsilon} |\sin tx - tx| dF_{nk}(x) \leq \\ &\leq \frac{|t|^3}{6} \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^3 dF_{nk}(x) + \frac{t^2}{2} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) = \frac{|t|^3}{6} \lambda_{nk}^{(1)} + \frac{t^2}{2} \lambda_{nk}^{(2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Враховуючи (13), (14), (15) із (12) одержимо наступний результат:

$$\begin{aligned} |f_{nk}(t)|^2 &= 1 - t^2 \sigma_{nk}^2 + 2 \left( \frac{|t|^3}{6} \lambda_{nk}^{(1)} + t^2 \lambda_{nk}^{(2)} \right) + \frac{|t|^3}{2} \lambda_{nk}^{(1)} + t^2 \lambda_{nk}^{(2)} + \frac{|t|^3}{6} \lambda_{nk}^{(1)} + \frac{t^2}{2} \lambda_{nk}^{(2)} = \\ &= 1 - t^2 \sigma_{nk}^2 + |t|^3 \lambda_{nk}^{(1)} + \frac{7}{2} t^2 \lambda_{nk}^{(2)} \leq \exp \left\{ -t^2 \sigma_{nk}^2 + |t|^3 \lambda_{nk}^{(1)} + \frac{7}{2} t^2 \lambda_{nk}^{(2)} \right\}. \end{aligned}$$

Звідси маємо:

$$|f_{nk}(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} \sigma_{nk}^2 + \frac{|t|^3}{2} \lambda_{nk}^{(1)} + \frac{7}{4} t^2 \lambda_{nk}^{(2)} \right\},$$

а

$$|\varphi_n(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \frac{|t|^3}{2} \lambda_n^{(1)} + \frac{7}{4} t^2 \lambda_n^{(2)} \right\}. \quad (16)$$

З умов леми  $\lambda_n^{(2)} \leq \frac{1}{14}$ ,  $|t| \leq T_n = \left(4\lambda_n^{(1)}\right)^{-1}$  і (16) отримуємо

$$|\varphi_n(t)| \leq \exp \left\{ -\frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2} \left(4\lambda_n^{(1)}\right)^{-1} \lambda_n^{(1)} + \frac{7}{4} t^2 \frac{1}{14} \right\} = e^{-\frac{t^2}{4}}.$$

Отже,

$$\left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq 2e^{-\frac{t^2}{4}}. \quad (17)$$

Оскільки ми розглядаємо випадок 2:  $|t| > T'_n$ ,  $|t| \leq T_n$ , то із умови  $|t| > T'_n$ , де  $T'_n = \min \left\{ a_1 \left( \lambda_n^{(1)} \right)^{-\frac{1}{3}}, a_2 \left( \lambda_n^{(2)} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\}$ , одержимо:  $|t| > a_1 \left( \lambda_n^{(1)} \right)^{-\frac{1}{3}}$  або  $|t| > a_2 \left( \lambda_n^{(2)} \right)^{-\frac{1}{2}}$ .

Тому виконується принаймні одна із нерівностей:  $a_1^{-3} \lambda_n^{(1)} |t|^3 > 1$ ,  $a_2^{-2} \lambda_n^{(2)} |t|^2 > 1$ . Якщо врахуємо, що  $a_1 = 1, 22$ ,  $a_2 = \sqrt{0, 174}$ , то із (17) одержимо

$$\begin{aligned} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| &\leq 2e^{-\frac{t^2}{4}} \left( a_1^{-3} \lambda_n^{(1)} |t|^3 + a_2^{-2} \lambda_n^{(2)} |t|^2 \right) \leq \\ &\leq e^{-\frac{t^2}{4}} \left( 1, 102 \lambda_n^{(1)} |t|^3 + 11, 495 \lambda_n^{(2)} t^2 \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Порівнюючи (11) і (18), переконаємось у справедливості леми. Лема доведена.

**3. Доведення основної теореми.** Скористаємось нерівністю ([4], стор. 299)

$$\sup_x |F(x) - G(x)| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^T \frac{|f(t) - g(t)|}{t} dt + \frac{24}{\pi T} \sup_{x \in R} |G'(x)|.$$

Покладемо  $F(x) = \Phi_n(x)$ ,  $G(x) = \Phi(x)$ ,  $T = T_n$ . Оскільки  $G'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ , тоді

$$\rho_n \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T_n} \left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \frac{dt}{t} + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}T_n}. \quad (19)$$

Будемо вважати, що виконується умова  $\lambda_n^{(2)} \leq \frac{1}{14}$ , бо у протилежному випадку  $\lambda_n^{(2)} > \frac{1}{14}$ ,  $\rho_n \leq 1 < 14\lambda_n^{(2)}$ , теорема є очевидною.

Із леми, нерівності (2), при  $\lambda_n^{(2)} \leq \frac{1}{14}$  і  $|t| \leq T_n = (4\lambda_n^{(1)})^{-1}$

$$\left| \varphi_n(t) - e^{-\frac{t^2}{2}} \right| \leq e^{-\frac{t^2}{4}} (1, 102\lambda_n^{(1)}|t|^3 + 11, 495\lambda_n^{(2)}t^2).$$

Тоді із (19)

$$\begin{aligned} \rho_n &\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{T_n} e^{-\frac{t^2}{4}} (1, 102\lambda_n^{(1)}t^2 + 11, 495\lambda_n^{(2)}t) dt + \frac{24}{\pi\sqrt{2\pi}}4\lambda_n^{(1)} \leq \\ &\leq \lambda_n^{(1)} \frac{2, 204}{\pi} \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{4}} dt + \lambda_n^{(2)} \frac{22, 99}{\pi} \int_0^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{4}} dt + \frac{96}{\pi\sqrt{2\pi}}\lambda_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\int_0^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{4}} dt = 2, \quad \int_0^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{4}} dt = 2\sqrt{\pi},$$

то

$$\rho_n \leq \lambda_n^{(1)} \frac{2, 204}{\pi} 2\sqrt{\pi} + \lambda_n^{(2)} \frac{22, 99}{\pi} 2 + \frac{96}{\pi\sqrt{2\pi}}\lambda_n^{(1)} \leq \lambda_n^{(1)} 14, 678 + \lambda_n^{(2)} 14, 636.$$

Теорема доведена.

**4. Наслідки.** Нехай  $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$  – незалежні випадкові величини з математичним сподіванням  $M\xi_{nk} = 0$ , дисперсією  $D\xi_{nk} = \sigma_{nk}^2$ ,  $0 < \sigma_{nk} < \infty$ ,  $\sum_{k=1}^{k_n} \sigma_{nk}^2 = 1$  і існує  $M|\xi_{nk}|^r = \beta_{nk}^r$ ,  $2 < r \leq 3$ . Нехай  $\varepsilon = 1$ . Тоді із нерівності

$$\lambda_n^{(1)} + \lambda_n^{(2)} \leq \sum_{k=1}^{k_n} \beta_{nk}^r$$

випливає

**Наслідок 1.** Для всіх  $n \geq 1$  виконується нерівність  $\rho_n \leq 14, 678 \sum_{k=1}^{k_n} \beta_{nk}^r$ .

Нехай  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  – послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням  $M\xi_i = 0$ , дисперсією  $D\xi_i = \sigma_i^2$ ,  $B_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ . Позначимо через  $F_k(x)$  функцію розподілу випадкової величини  $\xi_k$  і покладемо  $\frac{\xi_k}{B_n} = \xi_{nk}$ ,  $k_n = n$ . Тоді

$$S_n = \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{B_n}, \quad F_{nk}(x) = F_k(xB_n),$$

$$\lambda_{nk}^{(1)} = \int_{|x| \leq \varepsilon} |x|^3 dF_k(xB_n) = \frac{1}{B_n^3} \int_{|x| \leq \varepsilon B_n} |x|^3 dF_k(x),$$

$$\lambda_{nk}^{(2)} = \int_{|x| > \varepsilon} x^2 dF_k(xB_n) = \frac{1}{B_n^2} \int_{|x| > \varepsilon B_n} x^2 dF_k(x).$$

Нехай  $\varepsilon = 1$ . Із теореми одержуємо наступний

**Наслідок 2.** Для всіх  $n \geq 1$  виконується нерівність

$$\rho_n \leq 14,678 \left( \frac{1}{B_n^3} \sum_{k=1}^n \int_{|x| \leq B_n} |x|^3 dF_k(x) + \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > B_n} x^2 dF_k(x) \right).$$

Нехай  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  – послідовність незалежних випадкових величин з математичним сподіванням  $M\xi_i = 0$ , дисперсією  $D\xi_i = \sigma_i^2$ ,  $\beta_{ri} = M|\xi_i|^r$ ,  $r \in (2, 3]$ ,  $B_n^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$ ,  $\beta_{3i} = M|\xi_i|^3$ .

**Наслідок 3.** Для всіх  $n \geq 1$  виконується нерівність  $\rho_n \leq 14,678 \frac{1}{B_n^r} \sum_{k=1}^n \beta_{rk}$ .

При  $r = 3$  одержуємо нерівність Ессена.

Нехай випадкові величини  $\xi_k$  однаково розподілені з функцією розподілу  $F(x)$ ,  $M\xi_k = 0$ ,  $D\xi_k = \sigma^2$ ,  $B_n^2 = n\sigma^2$ .

Із наслідку 2 одержуємо

**Наслідок 4.** Для всіх  $n \geq 1$  виконується нерівність

$$\rho_n \leq 14,678 \left( \frac{1}{\sigma^3 \sqrt{n}} \int_{|x| \leq \sigma \sqrt{n}} |x|^3 dF_k(x) + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x| > \sigma \sqrt{n}} x^2 dF_k(x) \right).$$

## Список використаної літератури

1. *Игнат Ю. И.* Об одной оценке отклонения от нормального закона распределения суммы в схеме серий // Теория вероятностей и математическая статистика. Межведомственный научный сборник. – Киев, 1956. – Вып. 25. – С. 25–29.
2. *Игнат Ю. И., Падитц Л.* Уточнение некоторых оценок отклонения от нормального закона распределения суммы независимых случайных величин // Теория вероятностей и математическая статистика. Межведомственный научный сборник. – Киев, 1987. – Вып. 37. – С. 57–66.
3. *Золотарёв В. М.* Современная теория суммирования независимых случайных величин. – М.: Наука, 1986. – 416 с.
4. *Лозэ М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.

Одержано 28.10.2015