УДК 519.6

І. А. Мич, В. В. Ніколенко (Ужгородський нац. ун-т)

ПОТЕНЦІАЛИ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ДИНАМІЧНИХ РЯДІВ

We consider the extremal and stationary dynamic series. For this series formulas calculating of potentials has been given in the paper. The theorem existence of dynamic series for an arbitrary given potential has been proved in paper also.

Розглядаються екстремальні та стаціонарні динамічні ряди. Для цих рядів виведено формули обчислення потенціалів, доведено теорему про існування стаціонарного динамічного ряду для довільного заданого потенціалу.

У даній роботі вводяться важливі поняття теорії динамічних рядів, вивчаються потенціали деяких класів динамічних рядів, які визначаються як максимальний прибуток біржевого алгоритму [1, 2]. Отримані результати описують область зміни потенціалів, які дають можливість оцінити ефективність побудованих біржевих алгоритмів [3]. Вивчення структури динамічних рядів за допомогою потенціалу дає можливість побудувати ефективні алгоритми прогнозування динамічних рядів [3, 4].

Динамічний ряд $Z = \{z_1, z_2, \dots , z_n\}$ — це числова послідовність, яка задана на дискретній множині $\{1, 2, \dots , n\} \subset T$, де T — множина часових відліків. Послідовність $Z_i = \{z_{i_1}, z_{i_2}, \dots , z_{i_k}\}$ називається відрізком часового ряду Z, якщо $Z_i \subset Z$ і $\exists z_t \in Z$, що $z_t = z_i$, $z_{t+1} = z_{i+1}$, ..., $z_{t+k} = z_{i+k}$. Відрізок часового ряду монотонно зростаючий (спадний), якщо $z_{i_1} \le z_{i_2} \le \dots \le z_{i_k}$ ($z_{i_1} \ge z_{i_2} \ge \dots \ge z_{i_k}$). Точка $z_j \in Z$ називається точкою локального максимума (мінімума), якщо вона одночасно належить монотонно зростаючому і монотонно спадному відрізкам. Це означає, що якщо $z_j \in Z$ є точкою локального максимума, то $z_{j-1} \le z_j > z_{j+1}$ або точкою локального мінімума, то $z_{j-1} \ge z_j < z_{j+1}$. Якщо точка z_j є точкою перетину двох монотонних відрізків $Z'_j = \{z_{j_t}, z_{j_{t+1}}, \dots , z_{j_{t+l}}\}$ і $Z_j = \{z_{j_1}, z_{j_2}, \dots , z_{j_k}\}$, то ці відрізки називаються плечами точки z_j, і цей фрагмент динамічного ряду будемо позначати через (t, z_j, l), де t — довжина лівого плеча, а l — довжина правого плеча. Тоді динамічний ряд можна схематично представити у вигляді $t_1, z_{i_1}, l_1, t_2, z_{i_2}, l_2, t_3, z_{i_3}, l_3, \dots$

Нехай z_{i_1} перша точка локального мінімуму, а z_{j_k} остання точка локального максимума. Потенціалом динамічного ряду Z називається число $P(Z) = \prod\limits_{t=1}^{k} \frac{z_{j_t}}{z_{i_t}}$, де z_{j_t} точки локальних максимумів, а z_{i_t} точки локальних мінімумів. Для динамічних рядів, які не мають екстремумів, потенціал визначається тільки для монотонно зростаючих послідовностей згідно фрмули $P(Z) = \frac{z_k}{z_1}$. Потенціал динамічних рядів вказує на максимальний (теоретичний) прибуток, який можна отримати на ціновому ряді Z в умовах заданої біржевої гри.

Ряд $z_1, z_2, \dots , z_n$ називається циклічним, якщо $\exists T \in N$, що $z_{i+T} = z_i$. Найменше з чисел T називається довжиною періода (або цикла). Ряд Z називається обмеженим, якщо існують такі числа m і M, що $\forall z_i \in Z$ виконується умова $m \le z_i \le M$.

Нехай $K(n)$ — клас динамічних рядів довжиною n. Розглянемо деякі підкласи класу $K(n)$.

Екстремальні ряди. Ряд $Z \in K(n)$ називається екстремальним, якщо всі точки локального максимуму дорівнюють M, а мінімума — m. Позначимо через $K(M,m)$ множину екстремальних рядів. Розглянемо ряди $Z_k^* \in K(M,m)$ всі плечі екстремумів яких дорівнюють 1, тобто ряд у якого всі точки є екстремальними. Ці ряди схематично можна зобразити у вигляді:

$$Z_1^* : 1\ m\ 1\ M\ 1\ m\ 1 \cdots 1\ m\ 1\ M\ 1,$$

$$Z_2^* : 1\ M\ 1\ m\ 1 \cdots 1\ M\ 1\ m\ 1,$$

$$Z_3^* : 1\ M\ 1\ m\ 1 \cdots 1\ m\ 1\ M\ 1,$$

$$Z_4^* : 1\ m\ 1\ M\ 1 \cdots 1\ M\ 1\ m\ 1,$$

$Z_1^*, Z_2^* \in K(n)$, якщо довжина ряду $n = 2k$, $Z_3^*, Z_4^* \in K(n)$, якщо довжина ряду $n = 2k+1$.

З означення потенціалу ряду випливає твердження.

Твердження 1. *Потенціали екстремальних рядів Z_k^*, $k = 1,2,3,4$ обчислюються за формулами: $P(Z_1^*) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n}{2}}$, $P(Z_2^*) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n}{2}-1}$, якщо довжина ряду $n = 2k$; $P(Z_3^*) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, $P(Z_4^*) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n-1}{2}}$, якщо довжина ряду $n = 2k+1$.*

Ряди Z_k^*, $k = 1,2,3,4$ є циклічними з періодом $T = 2$. Розглянемо множину екстремальних рядів $Z_k^*(a)$ всі точки внутрішніх екстремумів яких мають плечі довжиною a. Схематично ці ряди можна представити у вигляді:

$$Z_1^*(a) : d_1\ m\ a\ M\ a\ m\ a \cdots a\ m\ a\ M\ d_2,$$

$$Z_2^*(a) : d_1\ M\ a\ m\ a \cdots a\ M\ a\ m\ d_2,$$

$$Z_3^*(a) : d_1\ M\ a\ m\ a \cdots a\ m\ a\ M\ d_2,$$

$$Z_4^*(a) : d_1\ m\ a\ M\ a \cdots a\ M\ a\ m\ d_2,$$

де d_1 — ліве плече першого екстремуму, а d_2 — праве плече останнього екстремуму.

Твердження 2. *Потенціали екстремальних рядів $Z_k^*(a)$, $k = 1,2,3,4$ обчислюються за формулами: $P(Z_1^*(a)) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\left[\frac{n}{2a-1}\right]}$, $P(Z_2^*(a)) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\left[\frac{n}{2a-1}\right]-1}$,*
$P(Z_3^*(a)) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n-(d_1+d_2)}{2a-1}-1}$, $P(Z_4^*(a)) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n-(d_1+d_2)}{2a-1}}$.

Нехай $Z_k^*(a,b)$, $k = 1,2,3,4$ екстремальні ряди всі внутрішні екстремуми яких мають відповідно ліве плече a і праве плече b. Ці ряди можна представити у вигляді:

$$Z_1^*(a,b) : d_1\ m\ b\ M\ a\ m\ b\ \cdots\ b\ M\ d_2,$$

$$Z_2^*(a,b): d_1\ M\ a\ m\ b\ M\ a\ \cdots\ a\ m\ d_2,$$

$$Z_3^*(a,b): d_1\ M\ a\ m\ b\ M\ a\ \cdots\ b\ M\ d_2,$$

$$Z_4^*(a,b): d_1\ m\ b\ M\ a\ m\ b\ \cdots\ a\ m\ d_2.$$

Твердження 3. *Потенціали рядів $Z_k^*(a,b)$, $k = 1,2,3,4$ обчислюють за формулами:* $P\left(Z_1^*(a,b)\right) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n-(d_1+d_2)}{a+b-1}}$, $P\left(Z_2^*(a,b)\right) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n-(d_1+d_2)}{a+b-1}-1}$,

$$P\left(Z_3^*(a,b)\right) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n-(d_1+a+d_2)}{a+b-1}}, \quad P\left(Z_4^*(a,b)\right) = \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n-(d_1+d_2+a)}{a+b-1}}.$$

Теорема 1. *Якщо у динамічному ряді $Z \in K(M,m)$ тіло цикла утворює відрізок $a_1\ M\ b_1\ m\ a_2\ M\ b_2 \cdots a_l\ M\ b_l$, то $P\left(Z,a,b_l\right) = \left(\frac{M}{m}\right)^{D+U}$, де $D = \left[\frac{n-(d_1+d_2)}{\sum\limits_{i=1}^{l} a_i+b_i-l}\right]$, U — кількість пар (M,m) на відрізку $n-(D+d_1)$.*

Твердження 4. *Найбільший потенціал в класі $K(n)$ мають ряди Z_k^*, $k = 1,2,3,4$.*

Доведення. Нехай в ряді $Z \in K(n)$ кількість членів парне $n = 2k$ і першим екстремумом є локальний мінімум (максимум). Тоді $P\left(Z\right) \le P\left(Z_1^*\right)$ $\left(P\left(Z\right) \le P\left(Z_2^*\right)\right)$, якщо $n = 2k+1$ і перший екстремум є локальний мінімум (максимум) $P\left(Z\right) \le P\left(Z_3^*\right)$ $\left(P\left(Z\right) \le P\left(Z_4^*\right)\right)$.

Доведення випливає з означення потенціалу динамічного ряду. Нехай в ряді Z парна кількість членів і він не є екстремальним або має хоча б один екстремум з плечем більшим за одиницю. Якщо хоча б один з екстремумів z_{j_k} (z_{i_k}) не дорівнює Mабо m, то в цьому випадку $\frac{z_{j_k}}{z_{i_k}} < \frac{M}{m}$. Якщо плече екстремума більше одиниці, то кількість пар $\frac{z_{j_k}}{z_{i_k}}$ буде меншою ніж $\frac{n}{2}$. Звідси випливає, що $P\left(Z\right) \le \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n}{2}}$. Інші випадки доводяться аналогічно.

Стаціонарні ряди. Ряд $Z(a)$ називається стаціонарним, якщо $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$, $m \le a \le M$. Стаціонарні ряди будемо розглядати як монотонно зростаючі послідовності, тому з означення потенціалу випливає, що $P\left(Z(a)\right) = \frac{z_n}{z_1} = \frac{a}{a} = 1$. Стаціонарні ряди мають найменший можливий потенціал.

Теорема 2. *Для довільних n і A, що задовольняють умову $1 \le A \le \left(\frac{M}{m}\right)^{\frac{n}{2}}$ існує такий динамічний ряд $Z_A \in K(n)$, що $P\left(Z_A\right) = A$.*

Доведення. Позначимо через l таке найбільше натуральне число, що $\frac{A}{\left(\frac{M}{m}\right)^l} > 1$. Після виконання очевидних перетворень отримаємо,

$$A - \left(\frac{M}{m}\right)^l < \frac{M}{m}, \quad \frac{Am^l - M^l}{m^l} = \frac{Am^l - M^l}{\frac{m^{l-1}}{m}} < \frac{M}{m}, \text{тобто}$$

$$B = \frac{Am^l - M^l}{m^{l-1}} < M.$$

Шуканий ряд буде мати вигляд представлений на рис. 1.

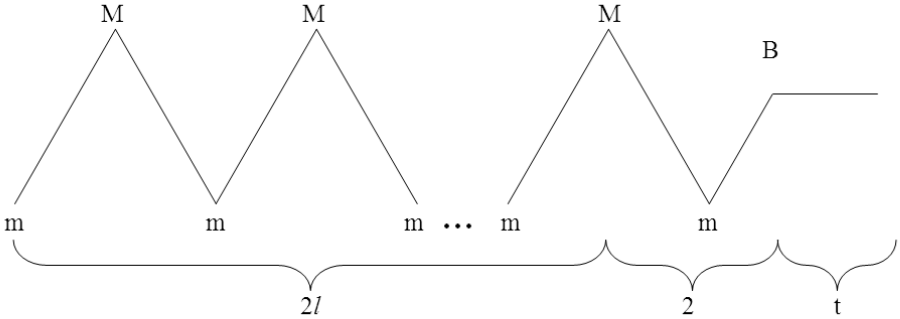

Рис. 1. Схематичне представлення стаціонарного ряду

З наведеного рисунку бачимо, що $2l + 2 + t = n$, $t = n - (2l + 2)$. З побудови випливає, що $P(Z_A) = A$.

Теорема 2 доводить, що якщо здати клас K трьома числами M, m, n, то для довільної точки (n_0, A_0), $1 \leq n_0 \leq n$, $1 \leq A_0 \leq \left(\frac{M}{m}\right)^{nk}$ існує динамічний ряд $Z \in K(n)$ такий, що $P(Z) = A_0$. З іншої сторони теореми стверджують, що потенціали всіх рядів класу K знаходяться в заштрихованій області, зображеній на рис. 2.

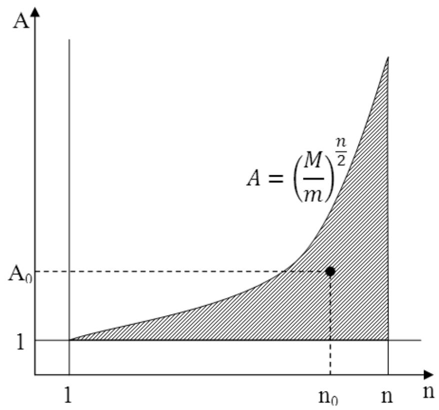

Рис. 2. Область потенціалів стаціонарних рядів

Список використаної літератури

1. *Берзлєв О.Ю., Кондрук Н.Е., Ніколенко В.В.* Багаторівневі алгоритми прогнозування динамічних рядів // Праці 4-ої міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень"(Ужгород, 29 вер. — 4 жовт. 2008 р.). — Ужгород: ПП "Інвазор 2008. — С. 15.
2. *Ніколенко В.В., Сіка Х. М.* Потенціали динамічних рядів та ефективність біржевих алгоритмів // Праці 7-ої міжнародної школи-семінару "Теорія прийняття рішень"(Ужгород, 29 вер. — 4 жовт. 2014 р.). — Ужгород: ПП "Інвазор 2014. — С. 187.
3. *Берзлєв О.Ю., Маляр М.М., Ніколенко В.В.* Багаторівневі адаптивні моделі в задачах передбачування // Наук. вісник Ужгород. ун-ту, сер. Математика і інформатика. – 2009. – Вип. 19. – С. 4–11.
4. *Берзлєв О.Ю., Ніколенко В.В.* Прогнозування часових рядів методом зіставлення зі зразком // Управління розвитком складних систем. Київський нац. ун-т будівництва і архітектури.– 2015. – Вип. 22. – С. 101–107.

Одержано 07.08.2015