

УДК 517.518:519.652

М. М. Пагіря (Мукачівський держ. ун-т)

РОЗВИНЕННЯ ФУНКЦІЇ $z \ln z$ В ЛАНЦЮГОВИЙ ДРІБ

The problem of expanded function of a complex variable $z \ln z$ in a continued fraction is investigated. Expansions functions in the continued fraction Thiele and in regular continued C -fraction are obtained. The convergence region of expansion is established.

Досліджувалася задача розвинення функції комплексної змінної $z \ln z$ в ланцюговий дріб. Отримані розвинення функції в ланцюговий дріб Тіле та в правильний ланцюговий C -дріб. Встановлена область збіжності розвинення.

1. Вступ. В якості наближення функцій комплексної змінної використовують багаточлени [1], дробово-раціональні функції [2] або апроксимації Паде [3]. Можна також наближати функції ланцюговими дробами [4–6]. Розвинення функцій в ланцюговий дріб має крім теоретичного ще і важливе практичне значення, оскільки розвинення функцій в ланцюгові дроби поряд із іншими наближеннями використовуються при обчисленні значень функцій [7, 8].

Задача розвинення функцій дійсної змінної в ланцюговий дріб Тіле досліджувалася в роботах [9–11]. В даній роботі розглядається задача розвинення функцій комплексної змінної в ланцюговий дріб Тіле та еквівалентний йому правильний ланцюговий C -дріб. Зокрема отримано розвинення функції $z \ln z$ та встановлена область збіжності отриманого розвинення.

2. Розвинення функцій в ланцюгові дроби. Нехай функція комплексної змінної $f(z)$ визначена на деякому компакт $\mathbf{Z} \subset \mathbb{C}$. Будемо розглядати розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z_* \in \mathbf{Z}$ в ланцюговий дріб Тіле [12]

$$T(z) = b_0 + \frac{z - z_*}{b_1} + \frac{z - z_*}{b_2} + \dots + \frac{z - z_*}{b_n} + \dots = b_0 + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{z - z_*}{b_k},$$

та правильний ланцюговий C -дріб [13]

$$C(z) = a_0 + \frac{a_1(z - z_*)}{1} + \frac{a_2(z - z_*)}{1} + \dots + \frac{a_n(z - z_*)}{1} + \dots = a_0 + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k(z - z_*)}{1},$$

де $z_*, a_k, b_k \in \mathbb{C}, k = 0, 1, \dots$

Скінчені ланцюгові дроби

$$T_n(z) = b_0 + \prod_{k=1}^n \frac{z - z_*}{b_k}, \quad C_n(z) = a_0 + \prod_{k=1}^n \frac{a_k(z - z_*)}{1}$$

називають n -ми підхідними дробами (n -ми наближеннями) відповідних ланцюгових дробів.

Розвинення функцій в ланцюгові дроби шукають одним із наступних способів. Так для функцій $(1+z)^\alpha, \alpha \in \mathbb{C}, \ln(1+z), e^z, \operatorname{tg} z$ розвинення в ланцюговий дріб в околі нуля, які були отримані Лагранжем, Ойлером, Ламбертом, пов'язані з відшукуванням розв'язку диференціального рівняння Ріккати з відповідними

коефіцієнтами [4, 14, 15]. Виходячи з подання функції гіпергеометричним рядом отримуються розвинення функції в ланцюговий дріб Гаусса [5, 7, 13].

Розвинення функції в околі нуля в правильний ланцюговий C -дріб пов'язане з поняттям відповідності ланцюгового дроби формальному ряду Лорана.

Означення 1 ([1]). *Формальним рядом Лорана (ФРЛ) називають послідовність комплексних чисел $\{c_n \mid c_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}\}$, яка записана у вигляді*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \quad (1)$$

де всі коефіцієнти c_n з від'ємними індексами крім скінченного числа рівні нулю.

З означення випливає, що ФРЛ L може бути поданий у вигляді

$$L = c_m z^m + c_{m+1} z^{m+1} + c_{m+2} z^{m+2} + \dots, \quad c_m \neq 0.$$

Очевидно, що якщо $m \geq 0$, то ФРЛ буде формальним степеневим рядом (ФСР). Формальні ряди Лорана вигляду (1) над полем \mathbb{C} самі утворюють поле \mathbb{L}_0 — поле формальних рядів Лорана [1, с.53], [16, с.23].

Для кожного ФРЛ $L \in \mathbb{L}_0$ можна визначити

$$\lambda(L) = \begin{cases} m, & L(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k z^k, \quad c_m \neq 0, \\ \infty, & L(z) = 0. \end{cases}$$

Нехай $f(z)$ — функція, яка мероморфна в початку координат, тобто в деякому відкритому крузі, який містить початок координат. Розвинення функції $f(z)$ в ряд Лорана позначимо $\mathcal{L}(f(z))$.

Означення 2. *Говорять, що послідовність мероморфних в початку координат функцій $\{R_n(z)\}$ відповідна ФРЛ L , якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(L - \mathcal{L}(R_n(z))) = \infty$.*

Оскільки всяка мероморфна в початку координат функція $f(z)$ має єдине розвинення у ФРЛ, то взаємно-однозначне відображення \mathcal{L} буде вкладенням поля \mathcal{M} всіх мероморфних в початку координат функцій в поле \mathbb{L}_0 . Порядок відповідності $R_n(z)$ ФРЛ L визначається наступним чином $\nu_n = \lambda(L - \mathcal{L}(R_n(z)))$.

Означення 3. *Ланцюговий дріб $\mathbf{K}(a_n(z)/b_n(z))$ називається відповідним ФРЛ L , якщо кожний підхідний дріб $f_n(z)$ мероморфна в початку координат функція і якщо послідовність підхідних дроби $\{f_n(z)\}$ відповідна L .*

Нехай функція $f(z)$ визначена ФСР

$$L = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \quad (2)$$

і нехай

$$H_0^{(n)} = 1, \quad H_k^{(n)} = \begin{vmatrix} c_n & c_{n+1} & c_{n+2} & \dots & c_{n+k-1} \\ c_{n+1} & c_{n+2} & c_{n+3} & \dots & c_{n+k} \\ c_{n+2} & c_{n+3} & c_{n+4} & \dots & c_{n+k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n+k-1} & c_{n+k} & c_{n+k+1} & \dots & c_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

де $c_n = 0$, коли $n < 0$, пов'язанні з ФСР (2) визначники Ганкеля.

Теорема 1 ([13, с.220]). (А) Якщо для заданого ФСР (2) існує правильний ланцюговий С-дріб

$$1 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n z}{1}, \quad a_n \neq 0, \quad (3)$$

який відповідний L (в точці $z = 0$), то

$$H_k^{(1)} \neq 0, \quad H_k^{(2)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

і

$$a_1 = H_1^{(1)}, \quad a_{2m} = -\frac{H_{m-1}^{(1)} H_m^{(2)}}{H_m^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}, \quad a_{2m+1} = -\frac{H_{m+1}^{(1)} H_{m-1}^{(2)}}{H_m^{(1)} H_m^{(2)}}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (5)$$

(Б) Якщо співвідношення (4) має місце, то правильний ланцюговий С-дріб (3), коефіцієнти якого визначаються за допомогою (5) буде відповідним ФСР (2).

Теорема 2 ([13, с.184]). Нехай $1 + \prod (a_n z/1)$ — правильний ланцюговий С-дріб, такий, що $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$, де a комплексна константа, крім того $R_a = \{z : |\arg(az + 1/4)| < \pi\}$. Тоді

(А) Ланцюговий дріб збігається до функції $f(z)$, яка мероморфна в R_a ;

(Б) збіжність буде рівномірною на кожній компактній підмножині K із R_a , яка не містить полюсів $f(z)$;

(В) функція $f(z)$ голоморфна в точці $z = 0$.

Теорема 3 ([13, с.182]). Нехай $\{f_n(z)\}$ — послідовність мероморфних в початку координат функцій, яка відповідна формальному степеневому ряду $L = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$, і нехай D — область, яка містить початок координат. Тоді

(А) $\{f_n(z)\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині з D тоді і тільки тоді, коли $\{f_n(z)\}$ рівномірно обмежена на кожній такій підмножині;

(Б) якщо $\{f_n(z)\}$ збігається рівномірно на кожній компактній підмножині із D , то функція $f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$ буде голоморфною на D , а $L = \mathcal{L}(f)$ буде рядом Тейлора для $f(z)$ в точці $z = 0$.

3. Формула Тіле. Формула Тіле — аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів [12]. Нехай $^{(n)}f(z)$ — обернена похідна Тіле n -го порядку, $n = 0, 1, \dots$, функції $f(z)$. Обернені похідні Тіле обчислюють за рекурентним співвідношенням [12, с.138–139]

$$^{(0)}f(z) = f(z), \quad ^{(1)}f(z) = \backslash f(z) = 1/f'(z), \quad (6a)$$

$$^{(n)}f(z) = k \backslash ^{(n-1)}f(z) + ^{(n-2)}f(z), \quad n = 2, 3, \dots \quad (6b)$$

Зауваження 1. Із (6b) безпосередньо випливає, що $^{(n)}f(z) \neq \backslash ^{(n-1)}f(z)$ при $n = 2, 3, \dots$, а виконується співвідношення $\backslash ^{(n-1)}f(z) = (^{(n)}f(z) - ^{(n-2)}f(z))/n$.

Якщо припустити, що в деякому околі точки $z = z_*$ функція $f(z)$ має нескінчену кількість обернених похідних Тіле, то отримуємо розвинення функції у формальний ланцюговий дріб Тіле (ФЛДТ)

$$f(z) = b_0 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - z_*}{b_n}, \quad (7)$$

де

$$b_0 = f(z_*), \quad b_1 = \backslash f(z_*), \quad b_n = n \cdot \backslash^{(n-1)} f(z_*) = {}^{(n)} f(z) - {}^{(n-2)} f(z), \quad n = 2, 3, \dots \quad (8)$$

Аналогічно, як і у випадку функції дійсної змінної [11], доводяться наступні твердження.

Теорема 4. *Нехай для $z \in \mathbf{Z}$ існують скінчені та відмінні від нуля обернені похідні функцій $u = u(z)$ та $v = v(z)$. Тоді існують обернені похідні суми, різниці, добутку та частки цих функцій, які визначаються за формулами:*

$$\backslash(u \pm v) = \frac{\backslash u \cdot \backslash v}{\backslash v \pm \backslash u}, \quad \backslash(u \cdot v) = \frac{\backslash u \cdot \backslash v}{\backslash u \cdot u + \backslash v \cdot v}, \quad \backslash(u/v) = \frac{v^2 \cdot \backslash u \cdot \backslash v}{\backslash v \cdot v - \backslash u \cdot u}. \quad (9)$$

Теорема 5. *Якщо $C = Const$, то при $n = 0, 1, 2, \dots$, мають місце співвідношення*

$$\begin{aligned} {}^{(2n)}(Cf(z)) &= C \cdot {}^{(2n)}f(z), & {}^{(2n+1)}(Cf(z)) &= \frac{1}{C} \cdot {}^{(2n+1)}f(z), \\ {}^{(2n)}(f(z) + C) &= {}^{(2n)}f(z) + C, & {}^{(2n+1)}(f(z) + C) &= {}^{(2n+1)}f(z). \end{aligned} \quad (10)$$

Теорема 6. *Якщо для $z \in \mathbf{Z}$ функції $f_i(z), i = 1, 2, \dots, n$, мають скінчені відмінні від нуля обернені похідні, то*

$$\backslash \left(\sum_{i=1}^n f_i(z) \right) = \frac{\prod_{i=1}^n \backslash f_i(z)}{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \backslash f_j(z)}, \quad \backslash \left(\prod_{i=1}^n f_i(z) \right) = \frac{\prod_{i=1}^n \backslash f_i(z)}{\sum_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \backslash f_j(z) f_j(z)}. \quad (11)$$

Зауваження 2. *Із другої формули (11) випливає, що*

$$\backslash(f(z)^n) = \frac{\backslash f(z)}{n(f(z))^{n-1}}.$$

Для того, щоб подати коефіцієнти ланцюгового дроби Тіле (7) через відношення визначників Ганкеля нам потрібні наступні твердження.

Теорема 7 (Формула Ньорлунда [17, с.427]). *Якщо функція $f(z)$ аналітична в $\mathbf{Z} \subset \mathbb{C}$, то обернені похідні Тіле функції визначаються через похідні функції як відношення визначників Ганкеля наступним чином*

$${}^{(2k)}f(z) = \frac{H_{k+1}^{(0)}}{H_k^{(2)}}, \quad {}^{(2k+1)}f(z) = \frac{H_k^{(3)}}{H_{k+1}^{(1)}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Теорема 8 (Тотожність Якобі [1, с.595]). Для всіх цілих n та $k \geq 1$ для визначників Ганкеля має місце тотожність Якобі

$$(H_k^{(n)})^2 - H_k^{(n-1)} H_k^{(n+1)} + H_{k+1}^{(n-1)} H_{k-1}^{(n+1)} = 0. \quad (13)$$

Теорема 9. Коефіцієнти ланцюгового дроби Тіле (7) визначаються через визначники Ганкеля наступним чином

$$b_{2k} = -\frac{(H_k^{(1)})^2}{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(2)}}, \quad b_{2k+1} = \frac{(H_k^{(2)})^2}{H_k^{(1)} H_{k+1}^{(1)}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Доведення. Оскільки $b_{2k} = (2k) \backslash ((2k-1)f(z)) = {}^{(2k)}f(z) - {}^{(2k-2)}f(z)$, то з першої формули (12) та (13) маємо

$$b_{2k} = \frac{H_{k+1}^{(0)}}{H_k^{(2)}} - \frac{H_k^{(0)}}{H_{k-1}^{(2)}} = \frac{H_{k+1}^{(0)} H_{k-1}^{(2)} - H_k^{(0)} H_k^{(2)}}{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(2)}} = -\frac{(H_k^{(1)})^2}{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(2)}}.$$

Аналогічно з другої формули (12) та (13) отримуємо

$$b_{2k+1} = (2k+1) \backslash ({}^{(2k)}f(z)) = {}^{(2k+1)}f(z) - {}^{(2k-1)}f(z) = \frac{H_k^{(3)}}{H_{k+1}^{(1)}} - \frac{H_{k-1}^{(0)}}{H_k^{(1)}} = \frac{(H_k^{(2)})^2}{H_k^{(1)} H_{k+1}^{(1)}}.$$

Зауваження 3. Формули (14) іншим, більш довгим шляхом у випадку функції дійсної змінної без використання тотожності Якобі (13) були доведені в [17, с.428-429].

4. Розвинення функції $z \ln z$ в ланцюговий дріб Тіле. Розглянемо розвинення функції $z \ln z$ в ланцюговий дріб.

Теорема 10. (А) Функція $w = z \ln z$ має обернені похідні Тіле довільного порядку, які визначаються згідно із формулами

$${}^{(0)}(z \ln z) = z \ln z, \quad {}^{(1)}(z \ln z) = \frac{1}{\ln z + 1}, \quad (15a)$$

$${}^{(2)}(z \ln z) = -z(2 \ln^2 z + 3 \ln z + 2), \quad {}^{(3)}(z \ln z) = \frac{1}{\ln z + 5/2}, \quad (15b)$$

$${}^{(2n)}(z \ln z) = -z \left(n(n+1) \ln^2 z + \alpha_n \ln z + \frac{\alpha_n^2 + 4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}{4n(n+1)} \right), \quad (15c)$$

$${}^{(2n+1)}(z \ln z) = 1 / \left(\ln z + \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} \right), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (15d)$$

де

$$\alpha_1 = 3, \quad \alpha_n = \frac{(n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2 - 1)}{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (16)$$

(В) Коефіцієнти розвинення функції в околі точки $z = z_*$ в ланцюговий дріб

Тіле рівні

$$b_0 = z_* \ln z_*, \quad b_1 = \frac{1}{\ln z_* + 1}, \quad (17a)$$

$$b_2 = -2z_*(\ln z_* + 1)^2, \quad b_3 = \frac{-3/2}{(\ln z_* + 5/2)(\ln z_* + 1)}, \quad (17b)$$

$$b_{2n} = -2n z_* (\ln z_* + a_{n-1})^2, \quad (17c)$$

$$b_{2n+1} = \frac{-(2n+1)}{n(n+1)(\ln z_* + a_n)(\ln z_* + a_{n-1})}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (17d)$$

де

$$a_0 = 1, \quad a_n = \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Доведення. (А) З (6a)–(6b) безпосередньо впливають (15a)–(15b). Зробимо припущення, що (15c), (15d) та (16) виконуються при $n = k - 1$. Тоді при $n = k$ отримуємо

$$\begin{aligned} {}^{(2k)}w &= 2k \left(1 / \left(\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k} \right) \right) - z \left((k-1)k \ln^2 z + \alpha_{k-1} \ln z + (\alpha_{k-1}^2 + \right. \\ &+ 4(k-1)^4 + 8(k-1)^3 - 4(k-1) - 1) / 4(k-1)k \left. \right) = -2kz \left(\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k} \right)^2 - \\ &- z \left((k-1)k \ln^2 z + \alpha_{k-1} \ln z + \frac{\alpha_{k-1}^2 + 4(k-1)^4 + 8(k-1)^3 - 4(k-1) - 1}{4(k-1)k} \right) = \\ &= -z \left(k(k+1) \ln^2 z + \frac{((k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)) \ln z}{k-1} + \frac{2(\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1)^2}{4k(k-1)^2} + \right. \\ &+ \frac{\alpha_{k-1} + 4k^4 - 8k^3 + 4k - 1}{4k(k-1)} \left. \right) = -z \left(k(k+1) \ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)}{k-1} \ln z + \right. \\ &+ \frac{(k+1)\alpha_{k-1}^2 + 4(2k^2 - 1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)^2 + (k-1)(4k^4 - 8k^3 + 4k - 1)}{4k(k-1)^2} \left. \right) = \\ &= -z \left(k(k+1) \ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)}{k-1} \ln z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1}^2 + 4(2k^2 - 1)\alpha_{k-1}}{4k(k-1)^2} + \right. \\ &+ \frac{4k^5 - 4k^4 + 8k^3 - 4k^2 - 5k + 3}{4k(k-1)^2} \left. \right) = -z \left(k(k+1) \ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)}{k-1} \ln z + \right. \\ &+ \frac{(k+1)^2 \alpha_{k-1}^2 + 4(2k^2 - 1)(k+1)\alpha_{k-1} + 4k^6 + 4k^4 + 4k^3 - 9k^2 - 2k + 3}{4k(k+1)(k-1)^2} = \\ &= -z \left(k(k+1) \ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)}{k-1} \ln z + \frac{((k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1))^2}{4k(k+1)(k-1)^2} + \right. \\ &+ \frac{(k-1)^2(4k^4 + 8k^3 - 4k - 1)}{4k(k+1)(k-1)^2} \left. \right) = -z \left(k(k+1) \ln^2 z + \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)}{k-1} \ln z + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{\left(\frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)}{(k-1)}\right)^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1}{4k(k+1)} =$$

$$= -z \left(k(k+1) \ln^2 z + \alpha_k \ln z + \frac{\alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1}{4k(k+1)} \right),$$

де

$$\alpha_k = \frac{(k+1)\alpha_{k-1} + 2(2k^2 - 1)}{(k-1)}. \quad (19)$$

Отже, (15с) має місце.

Аналогічно маємо, що

$${}^{(2k+1)}w = (2k+1) \cdot \left(-z(k(k+1) \ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k) \right) + \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k}},$$

де $c_k = (\alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1)/4k(k+1)$.

Згідно із (9)

$${}^{(2k+1)}w = -(2k+1) \left(\left(z \cdot \left(k(k+1) \ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k \right) \right) / \left(z \cdot z + \left(k(k+1) \ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k \right) \right) \right) + \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k}}.$$

З (9), (10) та (11) маємо, що

$$\left(k(k+1) \ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k \right) = \frac{\left(k(k+1) \ln^2 z \right) \cdot \left(\alpha_k \ln z + c_k \right)}{\left(k(k+1) \ln^2 z \right) + \left(\alpha_k \ln z + c_k \right)} = \frac{z}{\alpha_k + 2k(k+1) \ln z}.$$

Тоді

$${}^{(2k+1)}w = \frac{\frac{-(2k+1)z}{\alpha_k + 2k(k+1) \ln z}}{z + \left(k(k+1) \ln^2 z + \alpha_k \ln z + c_k \right) \frac{z}{\alpha_k + 2k(k+1) \ln z}} + \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k}} =$$

$$= \frac{-(2k+1)}{k(k+1) \ln^2 z + (\alpha_k + 2k(k+1)) \ln z + \alpha_k + c_k} + \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_{k-1} + 2k^2 - 1}{2(k-1)k}}.$$

З (19) маємо, що $\alpha_{k-1} = ((k-1)\alpha_k - 2(2k^2 - 1))/(k+1)$. А тоді

$${}^{(2k+1)}w = \frac{-(2k+1)}{k(k+1) \ln^2 z + (\alpha_k + 2k(k+1)) \ln z + \alpha_k + \frac{\alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1}{4k(k+1)}} +$$

$$+ \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_k + 2k^2 - 1}{2(k+1)k}} = -4k(k+1)(2k+1) / (4k^2(k+1)^2 \ln^2 z + 4k(k+1)(\alpha_k + 2k(k+1)) \times$$

$$\times \ln z + 4k(k+1)\alpha_k + \alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 - 4k - 1) + \frac{2(k+1)k}{2(k+1)k \ln z + \alpha_k + 2k^2 - 1}.$$

Оскільки

$$4k^2(k+1)^2 \ln^2 z + 4k(k+1)(\alpha_k + 2k(k+1)) \ln z + 4k(k+1)\alpha_k + \alpha_k^2 + 4k^4 + 8k^3 -$$

$$-4k - 1 = (2k(k+1) \ln z + \alpha_k + 2k^2 - 1)(2k(k+1) \ln z + \alpha_k + 2k^2 + 4k + 1),$$

то

$$\begin{aligned} {}^{(2k+1)}w &= \frac{-4k(k+1)(2k+1)}{(2k(k+1) \ln z + \alpha_k + 2k^2 - 1)(2k(k+1) \ln z + \alpha_k + 2k^2 + 4k + 1)} + \\ &+ \frac{2(k+1)k}{2(k+1)k \ln z + \alpha_k + 2k^2 - 1} = \frac{2(k+1)k}{2(k+1)k \ln z + \alpha_k + 2k^2 + 4k + 1} = \\ &= \frac{1}{\ln z + \frac{\alpha_k + 2(k+1)^2 - 1}{2k(k+1)}}. \end{aligned}$$

Формула (15d) виконується при $n = k$.

(В) Формули (17a)–(17b) безпосередньо впливають з (15a)–(15b). З (15c) маємо

$$\begin{aligned} b_{2n} = {}^{(2n)}w - {}^{(2n-2)}w &= -z_* \left(n(n+1) \ln^2 z_* + \alpha_n \ln z_* + \frac{\alpha_n^2 + 4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}{4n(n+1)} \right) + \\ &+ z_* \left((n-1)n \ln^2 z_* + \alpha_{n-1} \ln z_* + \frac{\alpha_{n-1}^2 + 4(n-1)^4 + 8(n-1)^3 - 4(n-1) - 1}{4(n-1)n} \right) = \\ &= -z_* (2n \ln^2 z_* + \bar{\alpha}_n \ln z_* + \bar{\beta}_n), \end{aligned}$$

де $\bar{\alpha}_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$, $\bar{\beta}_n = \frac{\alpha_n^2 + 4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}{4n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1}^2 + 4(n-1)^4 + 8(n-1)^3 - 4(n-1) - 1}{4(n-1)n}$. Згідно з (16) можна записати $\bar{\alpha}_n$ та $\bar{\beta}_n$ наступним чином

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_n &= \frac{(n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2 - 1)}{n-1} - \alpha_{n-1} = 4n \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2n(n-1)}, \\ \bar{\beta}_n &= \frac{\frac{((n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2 - 1))^2}{(n-1)^2} + 4n^4 + 8n^3 - 4n - 1}{4n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1}^2 + 4n^4 - 8n^3 + 4n - 1}{4(n-1)n} = \\ &= \frac{1}{4n(n+1)(n-1)^2} \left(((n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2 - 1))^2 + (n-1)^2(4n^4 + 8n^3 - 4n - 1) - \right. \\ &\quad \left. - (n^2 - 1)(\alpha_{n-1}^2 + 4n^4 - 8n^3 + 4n - 1) \right) = \frac{1}{4n(n+1)(n-1)^2} \left(2(n+1)\alpha_{n-1}^2 + \right. \\ &\quad \left. + 4(n+1)(2n^2 - 1)\alpha_{n-1} + 2(n+1)(2n^2 - 1)^2 \right) = 2n \left(\frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n} \right)^2. \end{aligned}$$

Тоді $b_{2n} = -2nz_* \left(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2n(n-1)} \right)^2 = -2nz_* (\ln z_* + a_{n-1})^2$. Формула (17c) виконується.

Аналогічно з (15d) впливає

$$\begin{aligned} b_{2n+1} = {}^{(2n+1)}w - {}^{(2n-1)}w &= \frac{1}{\ln z_* + \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)}} - \frac{1}{\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n}} = \\ &= \frac{-\bar{\gamma}_n}{\left(\ln z_* + \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} \right) \left(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n} \right)}, \end{aligned}$$

$$\bar{\gamma}_n = \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n}.$$

Підставимо значення α_n з (16), маємо

$$\bar{\gamma}_n = \frac{\frac{(n+1)\alpha_{n-1} + 2(2n^2-1)}{n-1} + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)} - \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n} = \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

Кінцеве отримуємо $b_{2n+1} = -(2n+1)/n(n+1)(\ln z_* + a_n)(\ln z_* + a_{n-1})$. Формула (17d) виконується.

Із теореми випливає, що в околі точки $z_* \neq 0$ розвинення функції $z \ln z$ в ланцюговий дріб Тіле після еквівалентних перетворень має вигляд

$$\begin{aligned} z \ln z = & z_* \ln z_* + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+1)}{1} + \frac{z-z_*}{-2z_*(\ln z_*+1)} + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+5/2)}{-3/2} + \\ & \frac{(z-z_*)(\ln z_*+1)}{-4z_*(\ln z_*+5/2)} + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+10/3)}{-5/6} + \dots + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_{n-1})}{-(2n-1)/(n-1)n} + \\ & \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_{n-2})}{-2nz_*(\ln z_*+a_{n-1})} + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_n)}{-(2n+1)/n(n+1)} + \frac{(z-z_*)(\ln z_*+a_{n-1})}{-2(n+1)z_*(\ln z_*+a_n)} + \dots \end{aligned}$$

В околі точки $z_* = 1$ маємо розвинення

$$\begin{aligned} z \ln z = & \frac{z-1}{1} + \frac{z-1}{-2} + \frac{5/2(z-1)}{-3/2} + \frac{z-1}{-10} + \frac{10/3(z-1)}{-5/6} + \frac{5/2(z-1)}{-20} + \dots + \\ & \frac{a_{n-1}(z-1)}{-(2n-1)/(n-1)n} + \frac{a_{n-2}(z-1)}{-2na_{n-1}} + \frac{a_n(z-1)}{-(2n+1)/n(n+1)} + \frac{a_{n-1}(z-1)}{-2(n+1)a_n} + \dots \end{aligned}$$

5. Розвинення функції $z \ln z$ в правильний ланцюговий C -дріб. Спочатку доведемо одне допоміжне твердження.

Теорема 11. *Якщо коефіцієнти ФСР*

$$\mathcal{L} = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - z_*)^n, \tag{20}$$

такі, що

$$c_0 \neq 0, H_k^{(1)} \neq 0, H_k^{(2)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{21}$$

де $H_k^{(n)}$ – визначник Ганкеля утворений з коефіцієнтів ФСР \mathcal{L} , то правильний ланцюговий C -дріб

$$\mathcal{C} = a_0 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(z - z_*)}{1}$$

буде відповідним в точці $z_* \neq 0$ ФСР (20), де

$$a_0 = c_0, a_1 = c_1, a_{2k} = -\frac{H_{k-1}^{(1)} H_k^{(2)}}{H_k^{(1)} H_{k-1}^{(2)}}, a_{2k+1} = -\frac{H_{k+1}^{(1)} H_{k-1}^{(2)}}{H_k^{(1)} H_k^{(2)}}, \quad k = 1, 2, \dots \tag{22}$$

Доведення. Запишемо ФСР \mathcal{L} наступним чином

$$\mathcal{L} = c_0 \tilde{\mathcal{L}} = c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \tilde{z}^n \right), \quad \tilde{c}_n = \frac{c_n}{c_0}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \tilde{z} = z - z_*.$$

За припущенням $c_0 \neq 0$, $H_k^{(1)} \neq 0$, $H_k^{(2)} \neq 0$, то згідно із теоремою 1 правильний ланцюговий C -дріб

$$\tilde{\mathcal{C}} = 1 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{a}_n \tilde{z}}{1},$$

коефіцієнти якого рівні

$$\tilde{a}_1 = \tilde{H}_1^{(1)}, \quad \tilde{a}_{2k} = -\frac{\tilde{H}_{k-1}^{(1)} \tilde{H}_k^{(2)}}{\tilde{H}_k^{(1)} \tilde{H}_{k-1}^{(2)}}, \quad \tilde{a}_{2k+1} = -\frac{\tilde{H}_{k+1}^{(1)} \tilde{H}_{k-1}^{(2)}}{\tilde{H}_k^{(1)} \tilde{H}_k^{(2)}},$$

де

$$\tilde{H}_0^{(n)} = 1, \quad \tilde{H}_k^{(n)} = \begin{vmatrix} \tilde{c}_n & \tilde{c}_{n+1} & \cdots & \tilde{c}_{n+k-1} \\ \tilde{c}_{n+1} & \tilde{c}_{n+2} & \cdots & \tilde{c}_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{c}_{n+k-1} & \tilde{c}_{n+k} & \cdots & \tilde{c}_{n+2k-2} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, 3, \dots,$$

буде відповідний ФСР $\tilde{\mathcal{L}}$. Врахувавши, що $\tilde{H}_s^{(n)} = H_s^{(n)} / (c_0)^s$ кінцеве маємо

$$\tilde{a}_1 = \frac{H_1^{(1)}}{c_0} = \frac{a_1}{c_0}, \quad \tilde{a}_{2k} = -\frac{H_{k-1}^{(1)} H_k^{(2)}}{H_k^{(1)} H_{k-1}^{(2)}} = a_{2k}, \quad \tilde{a}_{2k+1} = -\frac{H_{k+1}^{(1)} H_{k-1}^{(2)}}{H_k^{(1)} H_k^{(2)}} = a_{2k+1}.$$

Нехай

$$f(z) = b_0 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z - z_*}{b_n} \quad (23)$$

формальне розвинення функції $f(z)$ в околі точки $z = z_*$ в ланцюговий дріб за формулою Тіле (7). Запишемо ланцюговий дріб (23) у вигляді еквівалентного ланцюгового дробу з частинними знаменниками рівними одиниці

$$f(z) = \omega_0 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\omega_n (z - z_*)}{1}, \quad (24)$$

де

$$\omega_0 = b_0, \quad \omega_1 = \frac{1}{b_1}, \quad \omega_n = \frac{1}{b_{n-1} b_n}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (25)$$

З іншого боку, якщо функція $f(z)$ в деякому околі точки $z = z_*$ розвинута в ФСР

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_*)^n, \quad \text{де } c_n = \frac{f^{(n)}(z_*)}{n!}, \quad (26)$$

то існує відповідний правильний ланцюговий C -дріб, що

$$f(z) = a_0 + \prod_{n=1}^{\infty} \frac{a_n (z - z_*)}{1}, \quad (27)$$

де коефіцієнти a_n визначаються за (22).

Теорема 12. Коефіцієнти ланцюгових дробів (24) та (27) рівні між собою, тобто $a_n = \omega_n$, $n = 0, 1, \dots$.

Доведення. Очевидно, що $a_0 = \omega_0$, $a_1 = \omega_1$. Визначимо коефіцієнти ω_n ланцюгового дроби (24) через визначники Ганкеля. Із (14) та (25) маємо

$$\omega_{2k} = -\frac{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(2)} H_{k-1}^{(1)} H_k^{(1)}}{(H_k^{(1)})^2 (H_{k-1}^{(2)})^2} = -\frac{H_k^{(2)} H_{k-1}^{(1)}}{H_k^{(1)} H_{k-1}^{(2)}} = a_{2k},$$

$$\omega_{2k+1} = -\frac{H_k^{(1)} H_{k+1}^{(2)} H_{k-1}^{(2)} H_k^{(2)}}{(H_k^{(1)})^2 (H_k^{(2)})^2} = -\frac{H_{k-1}^{(2)} H_{k+1}^{(1)}}{H_k^{(1)} H_k^{(2)}} = a_{2k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Із доведеної теореми випливають наступні важливі висновки.

Наслідок 1. Відповідний правильний ланцюговий C -дріб (27) і ланцюговий дріб (24) еквівалентні.

Наслідок 2. Розвинення в ланцюговий дріб Тіле (7) функції $f(z)$ є відповідним в точці $z = z_*$ розвиненню у ФСР (26) цієї функції тоді і тільки тоді, коли для визначників Ганкеля виконується співвідношення

$$c_0 \neq 0, \quad H_k^{(1)} \neq 0, \quad H_k^{(2)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зауваження 4. В [18, с.249] показано, що інтерполяційний ланцюговий дріб Тіле

$$D_n(z) = b_0 + \prod_{k=1}^n \frac{z - z_{k-1}}{b_k},$$

де $z_k, k = 0, 1, \dots, n$, — інтерполяційні вузли, $b_k, k = 0, 1, \dots, n$, — коефіцієнти ланцюгового дроби, які побудовані за значеннями функції $f(z)$ в інтерполяційних вузлах, не буде відповідним степеневому ряду, в той же час граничний випадок такого інтерполяційного ланцюгового дроби, тобто випадок, коли всі вузли інтерполяції z_0, z_1, \dots, z_n прямують до одного і того ж значення z_* дає формальний ланцюговий дріб Тіле, який відповідний формальному степеневому ряду в точці $z = z_*$.

Відповідний ФСР правильний ланцюговий C -дріб (21) еквівалентний ФЛДТ (7). А тоді коефіцієнти правильного ланцюгового C -дроби можуть бути знайдені не через відношення чотирьох визначників Ганкеля (5), а через коефіцієнти ФЛДТ, тобто через обернені похідні Тіле наступним чином

$$\omega_0 = f(z_*), \quad \omega_1 = \frac{1}{f'(z_*)}, \quad \omega_n = \frac{1}{n(n-1) \dots ((n-1)f'(z_*)) \dots ((n-2)f'(z_*))}, \quad (28)$$

коли $n = 2, 3, \dots$. Формули безпосередньо випливають з (8) та (25).

Теорема 13. Якщо функція $f(z)$ в деякому околі точки $z = z_*$ має розвинення в правильний ланцюговий C -дріб (24) і $\lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$, то:

(А) Ланцюговий дріб (24) збігається до $f(z)$.

(В) Збіжність буде рівномірною на кожному компактні $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_a(z_*)$, який не містить полюсів функції $f(z)$, де $\mathbf{R}_a(z_*) = \{z \in \mathbb{C} : |\arg(a(z - z_*) + 1/4)| < \pi\}$.

Доведення. Зробимо позначення $\bar{z} = z - z_*$. Тоді (24) запишеться у вигляді

$$f(z) = \omega_0 \left(1 + \frac{\omega_1 \bar{z} / \omega_0}{1} + \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_n \bar{z}}{1} \right).$$

Правильний ланцюговий C -дріб в круглих дужках збігається і збігається рівномірно до мероморфної функції $\tilde{f}(z)$ на довільному компакт $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}_a$, який не містить полюсів функції $\tilde{f}(z)$ і функція $\tilde{f}(z)$ голоморфна в точці $\bar{z} = 0$. Тоді $\bar{f}(z) = \omega_0 \tilde{f}(z - z_*)$. Згідно із наслідком 1 ланцюговий дріб (24) відповідний степеневому ряду $\mathcal{L}(f)$ функції $f(z)$ в точці z_* . Згідно із теоремою 3 $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(\bar{f})$. Виходячи із єдиності розвинення функції в степеневий ряд Тейлора маємо, що $f(z) = \bar{f}(z)$.

Функцію $w = z \ln z$ також можна розвинути в правильний ланцюговий C -дріб.

Теорема 14. (А) Функція $w = z \ln z$ в околі точки $z = z_*$ має розвинення в правильний ланцюговий C -дріб вигляду

$$z \ln z = \mathbf{a}_0 + \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbf{a}_k (z - z_*)}{1}, \quad (29)$$

де

$$\mathbf{a}_0 = z_* \ln z_*, \quad \mathbf{a}_1 = \ln z_* + 1, \quad \mathbf{a}_2 = \frac{-1}{2z_*(\ln z_* + 1)}, \quad \mathbf{a}_3 = \frac{3(\ln z_* + 5/2)}{4z_*(\ln z_* + 1)},$$

$$\mathbf{a}_{2n} = \frac{(n-1)(\ln z_* + a_{n-2})}{2(2n-1)z_*(\ln z_* + a_{n-1})}, \quad \mathbf{a}_{2n+1} = \frac{(n+1)(\ln z_* + a_n)}{2(2n+1)z_*(\ln z_* + a_{n-1})}, \quad n = 2, 3, \dots$$

(В) Правильний ланцюговий C -дріб (29) збігається до функції $z \ln z$ для всіх $z, z \neq 0, z \neq \infty$. Правильний ланцюговий C -дріб збігається рівномірно на довільному компакт $\mathbf{Z} \subset R(0, z_*) = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg(z) - \arg(z_*)| < \pi\}$.

Доведення. (А) Із (17) та (25) маємо, що коефіцієнти $\omega_k, k = 0, 1, \dots$, правильного ланцюгового C -дріб будуть рівні

$$\omega_0 = z_* \ln z_*, \quad \omega_1 = 1 + \ln z_*, \quad \omega_2 = \frac{-1}{2z_*(\ln z_* + 1)}, \quad \omega_3 = \frac{3(\ln z_* + 5/2)}{4(\ln z_* + 1)},$$

$$\omega_{2n} = \frac{(n-1)(\ln z_* + a_{n-2})}{2(2n-1)z_*(\ln z_* + a_{n-1})}, \quad \omega_{2n+1} = \frac{(n+1)(\ln z_* + a_n)}{2(2n+1)z_*(\ln z_* + a_{n-1})}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Якщо підставити значення a_n з (18), то кінцеве отримаємо

$$\omega_{2n} = \frac{(n-1)(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-2} + 2(n-1)^2 - 1}{2(n-2)(n-1)})}{2(2n-1)z_*(\ln z_* + \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n})} = \mathbf{a}_{2n},$$

$$\omega_{2n+1} = \frac{(n+1)(\ln z_* + \frac{\alpha_n + 2(n+1)^2 - 1}{2n(n+1)})}{(2(2n+1)z_*)(\ln z_* + \frac{\alpha_{2n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n})} = \mathbf{a}_{2n+1}, \quad n = 2, 3, \dots$$

Підставивши знайдені значення в (24) отримаємо (14).

(В) Спочатку покажемо, що α_n може бути подана у вигляді

$$\alpha_n = 3n^2 + \beta_1^{(n)}n + \beta_0^{(n)} + \frac{\beta_{-1}^{(n)}}{n-1} + \frac{\beta_{-2}^{(n)}}{(n-2)(n-1)} + \dots + \frac{\beta_{-n+1}^{(n)}}{(n-1)!}, \quad (30)$$

де $\beta_i^{(n)}, i = -n+1, -n+2, \dots, 1, -$ коефіцієнти.

З (16) безпосередньо випливає, що для $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 23$ та $\alpha_3 = 63$ співвідношення (30) виконується коли $\beta_1^{(1)} = \beta_0^{(1)} = 0, \beta_1^{(2)} = 4, \beta_0^{(2)} = 1, \beta_{-1}^{(2)} = 2, \beta_1^{(3)} = 8, \beta_0^{(3)} = \beta_{-1}^{(3)} = \beta_{-2}^{(3)} = 6$.

Припустимо, що (30) виконується при $n = k-1$. Тоді при $n = k$ з (16) маємо

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{1}{k-1} \left((k+1) \left(3(k-1)^2 + \beta_1^{(k-1)}(k-1) + \beta_0^{(k-1)} + \frac{\beta_{-1}^{(k-1)}}{k-2} + \frac{\beta_{-2}^{(k-1)}}{(k-3)(k-2)} + \dots + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}}{(k-2)!} + 4k^2 - 2 \right) = 3k^2 + (\beta_1^{(k-1)} + 4)k + \beta_1^{(k-1)} + \beta_0^{(k-1)} + 1 + \frac{2\beta_0^{(k-1)} + \beta_{-1}^{(k-1)} + 2}{k-1} + \\ &+ \frac{3\beta_{-1}^{(k-1)} + \beta_{-2}^{(k-1)}}{(k-2)(k-1)} + \frac{4\beta_{-2}^{(k-1)} + \beta_{-3}^{(k-1)}}{(k-3)(k-2)(k-1)} + \dots + \frac{(k-1)\beta_{-(k-3)}^{(k-1)} + \beta_{-(k-2)}^{(k-1)}}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-2)(k-1)} + \frac{k\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}}{(k-1)}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що α_k також записується у вигляді (30), де коефіцієнти відповідно рівні

$$\begin{aligned} \beta_1^{(k)} &= \beta_1^{(k-1)} + 4, \quad \beta_0^{(k)} = 2\beta_1^{(k-1)} + \beta_0^{(k-1)} + 1, \quad \beta_{-1}^{(k)} = 2\beta_0^{(k-1)} + \beta_{-1}^{(k-1)} + 2, \\ \beta_{-i}^{(k)} &= (i+1)\beta_{-(i-1)}^{(k-1)} + \beta_{-i}^{(k-1)}, \quad i = 2, 3, \dots, k-2, \quad \beta_{-(k-1)}^{(k)} = k\beta_{-(k-2)}^{(k-1)}. \end{aligned}$$

Скористаємося (30) для знаходження границі \mathbf{a}_k при $k \rightarrow \infty$. Маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n(2n-1)z_*} \frac{\ln z_* + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n-2} + 2(n-1)^2 - 1}{2(n-2)(n-1)}}{\ln z_* + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n-1} + 2n^2 - 1}{2(n-1)n}}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha_{n-2} + 2(n-1)^2 - 1}{2(n-2)(n-1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2(n-2)(n-1)} \left(3(n-2)^2 + \beta_1^{(n-2)}(n-2) + \right. \\ &+ \left. \beta_0^{(n-2)} + \frac{\beta_{-1}^{(n-2)}}{n-3} + \frac{\beta_{-2}^{(n-2)}}{(n-4)(n-3)} + \dots + \frac{\beta_{-(n-3)}^{(n-2)}}{(n-3)!} + 2(n-1)^2 - 1 \right) = \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{2n} = 1/(4z_*)$. Аналогічно $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{a}_{2n+1} = 1/(4z_*)$.

Тоді, згідно із теоремою 13 правильний ланцюговий C -дріб (29) збігається до функції $w = z \ln z$ і на довільному компакт $\mathbf{Z} \subset R(0, z_*)$ вказаний ланцюговий дріб збігається рівномірно.

6. Висновки. Використання обернених похідних Тіле для побудови розвинення функції комплексної змінної в ланцюговий дріб Тіле та еквівалентний йому правильний ланцюговий C -дріб доцільне оскільки не передбачає спочатку розвинення цієї функції в ФСР (20) та обчислення коефіцієнтів правильного ланцюгового C -дріб через відношення чотирьох визначників Ганкеля (22).

Коефіцієнти правильного ланцюгового C -дробу знаходяться безпосередньо через обернені похідні Тіле (28). Таким чином побудований ланцюговий дріб буде відповідним ФСР. Запропонований підхід дозволив розвинути функцію $z \ln z$ в ланцюговий дріб та встановити область збіжності такого ланцюгового дробу.

Список використаної літератури

1. *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis. Vol. 1. Power Series–Integration–Conformal Mapping–Location of Zeros. – New York–London–Sydney–Toronto: A Wiley–Interscience publication, 1974. – XV+682 p.
2. *Уолли Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1961. – 508 с.
3. *Бейкер (мл.) Дж., Грейвс-Моррис П.* Аппроксимации Паде. – М.: Мир, 1986. – 502 с.
4. *Khovanskii A. N.* The Application of Continued Fractions and Their Generalizations to Problems in Approximation Theory. – Groningen: P. Noordhoff, 1963. – 212 p.
5. *Suyt A., Brevik Petersen V., Verdonk B., Waadeland H., Jones W. B.* Handbooks of Continued Fractions for Special Functions. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2008. –XVI+431 p.
6. *Скоробогатько В. Я.* Теория ветвящихся цепных дробей и ее применение в вычислительной математике. – Москва: Наука, 1983. – 312 с.
7. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. – Москва, Наука, Глав. ред. физ.–мат. литературы, 1979. – 832 с.
8. *Люк Ю.* Специальные математические функции и их аппроксимации. – Москва: Мир, 1980. – 608 с.
9. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Розвинення деяких функцій у ланцюгові дробі // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. – 2007. – Вип. 14–15. – С. 107–116.
10. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Еквівалентність двох методів побудови правильних ланцюгових C -дробів // Укр. мат. журнал. – 2009. – **61**, № 7. – С. 1005–1009.
11. *Пагіря М. М., Кацала Р. А.* Властивості обернених похідних // Укр. мат. журнал. – 2010. – **62**, № 5. – С. 708–713.
12. *Thiele T. N.* Interpolationsrechnung. – Leipzig: Commisision von B. G. Teubner, 1909.– XII + 175 S.
13. *Джоунс У., Трон В.* Непрерывные дроби. Аналитическая теория и приложения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985. – 414 с.
14. *Sanielevici S.* Sur l'intégration des équations différentielles par les fractions continues // Ann. Sci. de l'University de Jassy. – 1933. – 18. – P. 197–214.
15. *Merkes E. P., Scott W. T.* Continued Fraction Solution of the Riccati Equation // J. Math. Anal. Appl. Vol. 4 (1962), P. 309–327.
16. *Шафаревич И. Р.* Основные понятия алгебры. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. – 348 с.
17. *Nörlund N. E.* Vorlesungen über Differenzenrechnung. – Berlin, Verlag von Julius Springer, 1924. – 551 S.
18. *Lorentzen L., Waadeland H.* Continue Fraction with Applications. – Amsterdam–London–New York–Tokyo: North–Holland, 1992. – 606 p.

Одержано 30.10.2015