УДК 519.21

Г. І. Сливка-Тилищак (Ужгородський нац. ун-т)

ПРО ШВИДКІСТЬ РОСТУ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ З ПРОСТОРУ ОРЛІЧА НА НЕОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ

In the paper the estimates for distribution of supremum for the normalized random fields from Orlicz spaces defined on the unbounded domain are found. In particular, we have obtained the estimates for distribution of supremum for the normalized solution of the hyperbolic equation of mathematical physics.

В роботі отримано оцінки для розподілу супремуму нормованих випадкових полів з простору Орліча в нескінченній області, Розглянуто приклад застосування отриманих оцінок до розв'язку рівняння гіперболічного типу математичної фізики.

1. Вступ. Вивчення тих чи інших класів випадкових процесів, дослідження їх загальних властивостей, умов обмеженості з імовірністю одиниця та отримання оцінок розподілу їх супремумів, побудова математичних моделей цих процесів є однією з актуальних задач теорії випадкових процесів, якою цікавилися багато видатних спеціалістів з теорії ймовірностей.

На початку 60-х років з'явилися роботи в яких вивчались властивості більш широких класів випадкових процесів ніж гауссові, а саме простори Орліча випадкових величин.

В монографії Красносельського М. А. та Рутицького Я. В. [1] в загальному вигляді вперше розглядаються функції та простори Орліча. В даній роботі отримані норми в просторі Орліча, що є еквівалентні нормі Люксенбурга, а також розглядається необхідна умова сепарабельності просторів Орліча. Простори Орліча випадкових величин та випадкові процеси з просторів Орліча вивчаються в монографії Булдигіна В. В. та Козаченка Ю. В. [2]. Систематичне вивчення властивостей орлічевських процесів, а також процесів з орлічевськими приростами починається в роботах [3–10]. Властивості випадкових процесів з просторів Орліча вивчалися у роботах Коно (1980) [11], Козаченка Ю. В. [4,5]. Оцінки для розподілів супремумів різних орлічевських процесів розглядалися в роботах [6, 8, 9, 11].

Оцінки для розподілу супремуму випадкових полів з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ в нескінченній області були одержані в роботі [12].

Робота складається з вступу, двох частин. У першій частині наведено основні відомості з теорії просторів Орліча випадкових величин та одержано основний результат. Другу частину присвячено прикладу застосування отриманих оцінок до розв'язку рівняння гіперболічного типу математичної фізики, коли $t \in [0, +\infty)$.

Результати викладені в роботі можуть бути використані при моделюванні розв'язків задач математичної фізики та в інших областях, де використовують методи теорії випадкових процесів.

2. Основний результат.

Означення 1 ([2]). *Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається C-функцією Орліча, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ зростає при $x > 0$.*

Означення 2 ([2]). *Скажемо, що C-функція U задовольняє g-умові, якщо існують такі сталі $z_0 \geq 0$, $k > 0$, $A > 0$, що для всіх $x \geq z_0$, $y \geq z_0$ виконується нерівність*

$$U(x)U(y) \leq AU(kxy).$$

Означення 3 ([2]). *Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим C-функцією $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi(\omega) = \xi$, $\omega \in \Omega$, якщо для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.*

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_U} = inf\left\{r_\xi > 0 : Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) \leq 1\right\}.$$

Означення 4 ([2]). *Процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.*

Означення 5 ([2]). *Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим C-функцією $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi(\omega) = \xi$, $\omega \in \Omega$, якщо для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.*

Простір Орліча $L_U(\Omega)$ є банаховим простором відносно норми

$$\|\xi\|_{L_U} = inf\left\{r_\xi > 0 : Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) \leq 1\right\}.$$

Означення 6 ([2]). *Процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.*

Означення 7 ([2]). *Сім'я випадкових величин ξ з простору Орліча ($E\xi = 0$), називається строго орлічевою, якщо існує стала C_Δ така, що для скінченної кількості $\xi_i \in \Delta$, $i \in I$ і для будь-якого $\lambda_i \in \mathbf{R}^1$ виконується нерівність*

$$\left\|\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right\|_{L_U} \leq C_\Delta\left(E\left(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i\right)^2\right)^{1/2}.$$

Означення 8 ([2]). *Випадковий процес $X = \{X(t), t \in T\}$, $(X \in L_U(\Omega))$ називається строго орлічевим, якщо сім'я випадкових величин $X = \{X(t), t \in T\}$ — є строго орлічевою. Випадкові процеси $X = \{X(t), t \in T\}$ та $Y = \{Y(t), t \in T\}$ називаються сумісно строго орлічевими, якщо сім'я випадкових величин $\{X(t), Y(t), t \in T\}$ є строго орлічевою.*

Теорема 1 ([13]). *Нехай (T, ρ) метричний компактний простір, $N(u)$ — метрична масивність простору (T, ρ), $X = \{X(t),\ t \in T\}$ — сепарабельний випадковий процес із простору $L_U(\Omega)$, де для U виконується умова g. Нехай існує така функція $\sigma = \sigma(h)$, $0 \leq h \leq \sup\limits_{t,s\in T}\rho(t,s)$, що $\sigma(h)$ монотонно зростає, неперервна і така що*

$$\sup_{\rho(t,s)\leq h}\|X(t) - X(s)\|_{L_U} \leq \sigma(h).$$

Якщо для деякого ε виконується умова

$$\int\limits_0^{\varepsilon} \chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty,$$

де

$$\chi_U(n) = \begin{cases} n, & n < U(z_0); \\ C_U U^{(-1)}(n), & n \geq U(z_0), \end{cases}$$

$C_U = k(1 + U(z_0)) \max(1, A)$, z_0, k, A *— константи з означення 2,* $\sigma^{(-1)}(h)$ *— функція обернена до* $\sigma(h)$. *Тоді з імовірністю одиниця випадкова величина* $\sup\limits_{t \in T} |X(t)|$ *належить простору* $L_U(\Omega)$ *та*

$$\left\|\sup_{t\in T}|X(t)|\right\|_U \leq \|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int\limits_0^{\omega_0\theta} \chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du = B(t_0,\ \theta),$$

де t_0 *— довільна точка з* T, $\omega_0 = \sigma(\sup\limits_{t\in T}\rho(t_0,\ t))$, $\ 0 < \theta < 1$. *Крім того, для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{t\in T}|X(t)| > \varepsilon\right\} \leq \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Теорема 2. *Нехай* $\{\xi(x,t),\ (x,t) \in V\}$, $V = [0;a] \times [0,+\infty)$ *— сепарабельне випадкове поле з простору Орліча* $L_U(x)$, *де* $U(x)$ *задовольняє* g*-умову. Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k, b_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots$ *— сім'я таких відрізків, що* $0 \leq b_k < b_{k+1} < +\infty$, $k = 0,1,\ldots$ $V_k = [0;a] \times [b_k, b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k V_k = V$;

2) *Існують такі неперервні монотонно зростаючі функції* $\sigma_k = \{\sigma_k(h),\ 0 \leq h \leq b_{k+1} - b_k\}$, $\sigma_k(0) = 0$, *що на кожному* V_k

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h \\ |t-t_1|\leqslant h \\ (x,t),(x_1,t_1)\in V_k}} \|\xi(x,t) - \xi(x_1,t_1)\|_{L_U} \leq \sigma_k(h);$$

3) *Для деякого* $\varepsilon > 0$

$$\int\limits_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{a}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right)\left(\frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du;$$

4) $c = \{c(t),\ t \in R\}$ *— деяка неперервна функція така, що*

$c(t) > 0$, $t \in R$, $c_k = \sup\limits_{t\in[b_k,b_{k+1}]} \frac{1}{c(t)} = \frac{1}{\inf\limits_{t\in[b_k,b_{k+1}]} c(t)}$;

5) (x_0, t_{0k}) — деяка точка з V_k, z_0, K, A — константи з означення C-функції;

$$B(x_0,t_{0k},\theta)=|\xi(x_0,t_{0k})\|_{L_U}+$$

$$+\frac{C_U}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\omega_{0k}\theta}U^{(-1)}\left(\left(\frac{a}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{b_{k+1}-b_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du,$$

де $\omega_{0k}=\sigma_k\left(\max\left(|x-x_o|,\ |t_{0k}-t_k|\right)\right)$, $C_U=k(1+U(z_0))\times\max(1,A)$, $0<\theta<1$; *для деякого* $\delta>z_0\max\limits_{k\in Z}c_kB(x_0,t_{0k},\theta)$ *збігаеться ряд*

$$\sum_{k\in Z}\left(U\left(\frac{\delta}{c_kB(x_0,t_{0k},\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Тоді для всіх $\varepsilon\geq K\delta z_0$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V}\frac{|\xi(x,t)|}{c(t)}>\varepsilon\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\left(U\left(\frac{\varepsilon}{\delta K}\right)\right)^{-1}\cdot A\cdot\sum_{k\in Z}\left(U\left(\frac{\delta}{c_kB(x_0,t_{0k},\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Доведення. Легко бачити, що при будь-якому $\varepsilon>0$

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V}\frac{|\xi(x,t)|}{c(t)}>\varepsilon\right\}\leqslant\sum_{k\in Z}P\left\{\sup_{(x,t)\in V_k}\frac{|\xi(x,t)|}{c(t)}>\varepsilon\right\}\leq$$

$$\leq\sum_{k\in Z}P\left\{\sup_{(x,t)\in V_k}|\xi(x,t)|>\frac{\varepsilon}{c_k}\right\}. \tag{1}$$

З теореми 1 випливає, що

$$\sum_{k\in Z}P\left\{\sup_{(x,t)\in V_k}|\xi(x,t)|>\frac{\varepsilon}{c_k}\right\}\leq\left(U\left(\frac{\varepsilon}{c_kB(x_0,t_{0k},\theta)}\right)\right)^{-1} \tag{2}$$

при $0<\theta<1$.

З означення, що функція $U(x)$ задовольняє g-умову, випливає, що при $\varepsilon\geq$ $\geq K\delta z_0$

$$U\left(\frac{\varepsilon}{c_kB(x_0,t_{0k},\theta)}\right)=U\left(K\cdot\frac{\varepsilon}{K\cdot\delta}\cdot\frac{\delta}{c_kB(x_0,t_{0k},\theta)}\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{A}\left(U\left(\frac{\varepsilon}{\delta K}\right)\right)\cdot\left(U\left(\frac{\delta}{c_kB(x_0,t_{0k},\theta)}\right)\right). \tag{3}$$

Отже, з (1), (2) та (3) випливає нерівність

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V}\frac{|\xi(x,t)|}{c(t)}>\varepsilon\right\}\leqslant\left(U\left(\frac{\varepsilon}{\delta K}\right)\right)^{-1}\cdot A\cdot\sum_{k\in Z}\left(U\left(\frac{\delta}{c_kB(x_0,t_{0k},\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Теорема 3. *Нехай* $\{\xi(x,t),\ (x,t) \in V\}$, $V = [0;a] \times [0,+\infty)$ — *сепарабельне випадкове поле з простору* $L_p(x)$, *де* $p \geq 1$. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k, b_{k+1}]$, $k = 0,1,\ldots$ — *сім'я таких відрізків, що* $0 \leq b_k < b_{k+1} < +\infty$, $k = 0,1,\ldots$ $V_k = [0;a] \times [b_k, b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k V_k = V$;

2) Існують такі неперервні монотонно зростаючі функції $\sigma_k = \{\sigma_k(h),\ 0 \leq h \leq b_{k+1} - b_k\}$, $\sigma_k(0) = 0$, *що на кожному* V_k

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h\\ |t-t_1|\leqslant h\\ (x,t),(x_1,t_)\in V_k}} \left(\mathbb{E}\,|\xi(x,t) - \xi(x_1,t_1)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sigma_k(h);$$

3) Для деякого $\varepsilon > 0$, $k \in Z$ *виконується умова*

$$\int_0^{\varepsilon} \left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)^{-\frac{2}{p}} du < \infty;$$

4) $c = \{c(t),\ t \in R\}$ — *деяка неперервна функція така, що* $c(t) > 0,\ t \in R$, $c_k = \sup\limits_{t\in[b_k,b_{k+1}]} \frac{1}{c(t)} = \frac{1}{\inf\limits_{t\in[b_k,b_{k+1}]} c(t)}$;

5) $(x_0,\ t_{0k})$ *деяка точка з* V_k,

$$B_p(x_0, t_{0k}, \theta) = \left(|\xi(x_0,t_{0k})|^P\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\frac{D_k}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\omega_{0k}\theta} \left(\sigma_k^{(-1)(u)}\right)^{(-\frac{2}{p})} du,$$

де $\omega_{0k} = \sigma_k\left(max\left(|x - x_o|,\ |t_{0k} - t_k|\right)\right)$, $D_k = \frac{(a\cdot(b_{k+1}-b_k))^{\frac{1}{p}}}{2^{\frac{2}{p}}}$, $0 < \theta < 1$, *причому збігається ряд*

$$\sum_{k\in Z} \left(c_k B_p(x_0, t_{0k}, \theta)\right)^p.$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon \geq 0$ *має місце нерівність*

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V} \frac{|\xi(x,t)|}{c(t)} > \varepsilon\right\} \leqslant \frac{\sum\limits_{k\in Z} \left(c_k B_p(x_0,t_{0k},\theta)\right)^p}{\varepsilon^p}.$$

Доведення. Дана теорема випливає з теореми 2. Тут $U(x) = |x|^p$, $z_0 = 0$, $C_U = 1$, $K = 1$, $A = 1$. Умова 3) теореми 2 буде мати вигляд

$$\int_0^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{a}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right)\left(\frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du =$$

$$= \int_0^{\varepsilon} \left(\left(\frac{a}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \left(\frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} + 1 \right) \right)^{\frac{1}{p}} du.$$

При достатньо малих $\varepsilon > 0$ дана умова

$$\int_0^{\varepsilon} \left(\left(\frac{a}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} \right) \left(\frac{b_{k+1} - b_k}{2\sigma_k^{(-1)}(u)} \right) \right)^{\frac{2}{p}} du \leq D_k \int_0^{\varepsilon} \left(\sigma_k^{(-1)}(u) \right)^{-\frac{1}{p}} du < \infty,$$

де $D_k = \frac{(a \cdot (b_{k+1} - b_k))^{\frac{1}{p}}}{2^{\frac{2}{p}}}$.

Ряд з умови 5) теореми 2 набуде вигляду:

$$\sum_{k \in Z} \left(U \left(\frac{\delta}{c_k B(x_0, t_{0k}, \theta)} \right) \right)^{-1} = \frac{1}{\delta^p} \sum_{k \in Z} \left(c_k B_p(x_0, t_{0k}, \theta) \right)^p.$$

Тоді

$$P \left\{ \sup_{(x,t) \in V} \frac{|\xi(x,t)|}{c(t)} > \varepsilon \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \left(U \left(\frac{\varepsilon}{\delta K} \right) \right)^{-1} \cdot A \cdot \sum_{k \in Z} \left(U \left(\frac{\delta}{c_k B(x_0, t_{0k}, \theta)} \right) \right)^{-1} =$$

$$= \frac{\delta^p}{\varepsilon^p} \cdot \frac{1}{\delta^p} \sum_{k \in Z} \left(c_k B_p(x_0, t_{0k}, \theta) \right)^p = \frac{\sum_{k \in Z} \left(c_k B_p(x_0, t_{0k}, \theta) \right)^p}{\varepsilon^p}.$$

3. Оцінка для розподілу супремуму в нескінченній області розв'язку задачі про коливання струни випадковими початковими умовами з простору $L_p(\Omega)$. Розглянемо крайову задачу гіперболічного типу математичної фізики про коливання неоднорідної струни:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(p(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x) u - \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$x \in [0, l], \ t \in [0, T], \ T > 0;$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \ t \in [0, T];$$

$$u(x, 0) = \xi(x), \ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \eta(x), \ x \in [0, l].$$

Припустимо, що початкове положення струни $(\xi(x), \ x \in [0, \pi])$ і початкова швидкість $(\eta(x), \ x \in [0, \pi])$ є випадкові процеси з простору $L_p(x)$, де $p \geq 2$.

Розв'язок задачі згідно [14] зображується у вигляді ряду

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \left[A_k \cos \sqrt{\lambda_k} t + \frac{B_k}{\sqrt{\lambda_k}} \sin \sqrt{\lambda_k} t \right], \tag{4}$$

$$x \in [0, l], \ t \in [0, T], \ T > 0;$$

де

$$A_k = \int_0^l \xi(x) X_k(x) \rho(x) dx,$$

$$B_k = \int_0^l \eta(x) X_k(x) \rho(x) dx, \ k \geq 1,$$

$\lambda_k, \ k \geq 1$ — власні значення, $X_k = (X_k)(x), \ x \in [0, l]), \ k \geq 1$ — відповідні їм власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX_k(x)}{dx}\right) - q(x)x(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Функції такі $p(x)\ x \in [0,\ l]$, $q(x)\ x \in [0,\ l]$, $\rho(x)x\ \in [0,\ l]$, що мають місце умови:

1) $p(x) > 0, \ \rho(x) > 0 \ q(x) \geq 0, \ x \ \in [0,\ l]$;

2) $p(x) > 0$, і $\rho(x) > 0)$ – двічі неперервно диференційовні функції на $\in [0,\ l]$;

3) $q(x)$ – неперервно диференційовна на $\in [0,\ l]$.

Легко довести, що ряд (4) є також випадковим полем з простору $L_p(\Omega)$

Теорема 4. *Нехай* $\{u(x,t), \ (x,t) \in D\}$, $D = [0; l] \times [0, +\infty)$ — *сепарабельне випадкове поле з простору* $L_p(x)$, *де* $p \geq 2$, $\sigma_k(h) = \widetilde{C_k}|h|^\delta$, $0 < \delta < 1$. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) $[b_k, b_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots$ — *сім'я таких відрізків, що* $0 \leq b_k < b_{k+1} < +\infty$, $k = 0, 1, \ldots$ $D_k = [0,\ l] \times [b_k, b_{k+1}]$, $\bigcup\limits_k D_k = D$;

2) Збігається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left((\mathbb{E}A_k^p)^{\frac{1}{p}} + \frac{(\mathbb{E}B_k^p)^{\frac{1}{p}}}{k}\right)k^\delta;$$

3) $c = \{c(t), \ t \in R\}$ — *деяка неперервна функція, що* $c(t) > 0$, $t \in R$, $c_k = \sup\limits_{t \in [b_k, b_{k+1}]} \frac{1}{c(t)} = \frac{1}{\inf\limits_{t \in [b_k, b_{k+1}]} c(t)}$;

4) $(x_0,\ t_{0k})$ *деяка точка з* D_k,

$$B_p(x_0, t_{0k}, \theta) = (|u(x_0, t_{0k})|^p)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \frac{\widetilde{D}_k}{\theta(1-\theta)} \cdot \frac{p\delta}{p\delta - 2} \cdot (\omega_{ok}\theta)^{\frac{p\delta}{p\delta-2}},$$

де $\omega_{0k} = \sigma_k\left(max\left(|x - x_o|, \ |t_{0k} - t_k|\right)\right)$, $\widetilde{D}_k = \frac{\left(l \cdot (b_{k+1} - b_k)\widetilde{C_k}^{\frac{2}{\delta}}\right)^{\frac{1}{p}}}{2^{\frac{2}{p}}}$, $0 < \theta < 1$;

збігається ряд

$$\sum_{k \in Z} (c_k B_p(x_0, t_{0k}, \theta))^p$$

Тоді для будь-якого $\varepsilon \geq 0$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{(x,t)\in V}\frac{|u(x,t)|}{c(t)}>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{\sum\limits_{k\in Z}(c_kB_p(x_0,t_{0k},\theta))^p}{\varepsilon^p}.$$

Доведення. Оскільки $\{u(x,t)\}$ належить простору $L_p(\Omega)$, при $p>2$, то отримаємо оцінку

$$(\mathbb{E}\,|u(x,t)-u(x_1,t_1)|^p)^{\frac{1}{p}}=$$

$$=\left(\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\sin(k\gamma(x))\cos kt+\frac{B_k}{k}\sin(k\gamma(x))\cos kt\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{k=1}^{n}\left(A_k\sin(k\gamma(x_1))\cos kt+_1\frac{B_k}{k}\sin(k\gamma(x_1))\cos kt_1\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{n}\Big[(\mathbb{E}A_k^p)^{\frac{1}{p}}\,|\sin(k\gamma(x))\cos kt-\sin(k\gamma(x_1))\cos kt_1|+$$

$$\left.+\frac{(\mathbb{E}B_k^p)^{\frac{1}{p}}}{k}\,|\sin(k\gamma(x))\sin kt-\sin(k\gamma(x_1))\sin kt_1|\right]\leq$$

$$\leq\frac{1}{2^{\delta-1}}(c_0+1)\sum_{k=1}^{\infty}\left((\mathbb{E}A_k^p)^{\frac{1}{p}}+\frac{(\mathbb{E}B_k^p)^{\frac{1}{p}}}{k}\right)(k)^{\delta}\,|h|^{\delta},$$

де $c_0=\max\limits_{u\in[0,\pi]}\left(\frac{\rho(u)}{p(u)}\right)^{\frac{1}{2}}>0$.

Тоді

$$(\mathbb{E}\,|u(x,t)-u(x_1,t_1))^p|^{\frac{1}{p}}\leq\widetilde{C}\,|h|^{\delta},$$

де

$$\widetilde{C}=\frac{1}{2^{\delta-1}}(c_0+1)\sum_{k=1}^{\infty}\left((\mathbb{E}A_k^p)^{\frac{1}{p}}+\frac{(\mathbb{E}B_k^p)^{\frac{1}{p}}}{k}\right)(k)^{\delta}.$$

Отже, умова

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h\\|t-t_1|\leqslant h\\(x,t),(x_1,t_)\in V_k}}(\mathbb{E}\,|\xi(x,t)-\xi(x_1,t_1)|^p)^{\frac{1}{p}}\leq\sigma_k(h),$$

еквівалентна умові збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left((\mathbb{E}A_k^p)^{\frac{1}{p}}+\frac{(\mathbb{E}B_k^p)^{\frac{1}{p}}}{k}\right)k^{\delta}.$$

Нехай $\sigma_k(h)=\widetilde{C_k}|h|^{\delta}$, $0<\delta<1$. Розглянемо

$$\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)^{-\frac{2}{p}}du=\int\limits_0^{\varepsilon}\left(\frac{\widetilde{C_k}}{u}\right)^{\frac{2}{p\delta}}du.$$

Останній інтеграл є збіжним при $\delta > \frac{2}{p}$. Отже, $p > 2$. Маємо

$$\int_0^{\varepsilon} \left(\sigma_k^{(-1)}(u)\right)^{-\frac{2}{p}} du = \frac{p\delta \widetilde{C_k}^{\frac{2}{p\delta}}}{p\delta - 2} \varepsilon^{\frac{p\delta-2}{p\delta}}.$$

Отже, ми отримали, що дана теорема випливає з теореми 3.

Список використаної літератури

1. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. В.* Выпуклые функции и пространства Орлича – М.: Физматгиз, 1958. – 271 с.
2. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes . – American Mathematical Society, Providence, Rhode. – 2000. – 289 p.
3. *Козаченко Ю. В.* О равномерной сходимости стохастических интегралов в норме пространства Орлича // Теория вероятн. и мат. статист. – 1983. – Вып. 29. – С. 52–64.
4. *Козаченко Ю. В.* Случайные процессы в пространствах Орлича I // Теория вероятн. и мат. статист. – 1984. – Вып. 30. – С. 92–107.
5. *Козаченко Ю. В.* Случайные процессы в пространствах Орлича II // Теория вероятн. и мат. статист. – 1984. – Вып. 31. – С. 44-50.
6. *Fernique X.* Regularite le fonctions aleatoires non gaussiennes // Lecture Notes in Mathematics. – 1983. – Vol. 976. – P. 1–74.
7. *Nanopoulos C. Nobilis P.* Regularite et proprietes limites des fonctios aleatoires // Semin. Probab. XII, Univ. Strasbourg 1976 / 77. – Lect. Notes Math. – 1978. – 649. – P. 567–690.
8. *Pisier G.* Conditions d'entropie assurant la continuite de certains processus et applications a l'analyze harmonique // Semin. Anal. Fonct. – 1979 – 1980. – № 13-14. – 43p.
9. *Pisier G.* Some applications of the metric entropy condition to harmonic analysis // Lect. Notes Math. – 1983. – 995. – P. 123–154.
10. *Weber M.* Analyse infinitesimale de fonctions aleatorie // Ecole d'Ete de Probabilites de St-Flour, 1981, Lecture Notes in Math. – Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. – 1983. – Vol. 976. – P. 381–456.
11. *Kono N.* Sample path properties of stochastic processes // J. Math. Kyoto Univ. – 1980. – 20, № 2. – P. 295–313.
12. *Kozachenko Yu. V., Slyvka-Tylyshchak A. I.* On the increase rate of random fields from space $Sub_{\varphi}(\Omega)$ on unbounded domains // Statistics, optimization and information computing. – June 2014. – Vol. 2. – P. 79–92.
13. *Козаченко Ю. В., Вереш К. Й.* Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами із просторів Орліча // Теорія ймов. та матем. статист. – 2009. – Вип. 80. – С. 56–69.
14. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. – М.: Высшая школа, 1964.

Одержано 2.11.2015