

УДК 519.8

О. Ю. Червак (Ужгородський нац. ун-т)

НАДКРИТЕРІЇ В ОДНОКРИТЕРІАЛЬНІЙ ОПТИМІЗАЦІЇ

Based on one-criterion problems the article described approaches of definition of advantage orders, unimprovable (optimal) alternative, upper-criterion and sub-criterion. The article also considered examples of upper-criterion and sub-criterion making.

На прикладі однокритеріальної оптимізації даються способи задання порядків віддачі переваги, поняття непокращуваності (оптимальності) альтернатив, надкритеріїв та підкритеріїв, а також приклади побудови надкритеріїв і підкритеріїв критеріїв.

Однією з основних операцій цілеспрямованої діяльності є вибір. Майже кожна складна практична задача вибору є багатокритеріальною. Але, оскільки альтернатива, оптимальна за кожним з багатьох критеріїв, існує дуже рідко, то ці критерії, як правило, "згортаються" в один єдиний критерій за допомогою тих чи інших умов узгодження. Різні такі умови визначають й різні згортки критеріїв. Отже, вони визначають й різні задачі багатокритеріальної оптимізації.

Дуже часто використовуються скалярні й векторні згортки багатьох критеріїв. Серед скалярних згорток широко розповсюджена лінійна згортка як додатна лінійна комбінація критеріїв, додатні коефіцієнти якої характеризують відносну важливість кожного з них. У цьому випадку багатокритеріальна задача зводиться до однокритеріальної задачі з скалярною цільовою функцією. Згортка багатьох критеріїв в один векторний критерій може бути одержана і на основі умови попарної різної важливості критеріїв.

Зазначимо, що проблема заміни будь-якої задачі оптимізації (однокритеріальної чи багатокритеріальної) однією або багатьма простішими задачами оптимізації, такими, щоб їх оптимальні розв'язки були б оптимальними розв'язками і для даної задачі, є також актуальною проблемою.

Метою роботи є розв'язання задач багатокритеріальної оптимізації, в яких критерії порівнюються попарно за важливістю. Для цього, кожна з цих задач формулюється як задача з векторним критерієм, значення якого відповідно впорядковується, тобто на множині альтернатив визначається відповідний порядок віддачі переваги.

Для впорядкування задач вибору на одній і тій допустимій множині альтернатив введені поняття надкритерію будь-якого критерію; якщо критерій є надкритерієм даного критерію на цій множині, то останній критерій є підкритерієм першого.

Розглянемо задачу максимізації з критерієм c :

$$\max c(x), \quad x \in X. \quad (1)$$

В ній критерій визначається шкалою як множиною оцінок R зі строгим порядком, заданим на ній за допомогою відношення *більше*: альтернатива x *краща* за альтернативу y , якщо і тільки якщо $c(x) > c(y)$, або $c(x) - c(y) > 0$. Якщо $c(x) = c(y)$ або $c(x) - c(y) = 0$, то x і y *рівноцінні* альтернативи.

Множину всіх оптимальних альтернатив цієї задачі позначатимемо через X_* ($X_* \subseteq X$), X – *множина допустимих альтернатив*, або, просто, *допустима*

множина. Тут і в подальшому, X будемо вважати множиною в просторі R^n . Отже, альтернатива x є вектором (x_1, x_2, \dots, x_n) з дійсними координатами x_j , $j = 1, 2, \dots, n$.

Очевидно, задача мінімізації зводиться до задачі максимізації, і навпаки. Тому, в подальшому, розглядатимемо тільки задачу максимізації.

Оскільки впорядкування альтернатив в задачі максимізації є повним впорядкуванням, тобто будь-які дві альтернативи порівняльні в цьому порядку, то оптимальна альтернатива $x_* \in X$ є *негіршою* альтернативою за всі інші допустимі альтернативи, тобто для всіх $x \in X$ виконується нерівність $c(x_*) \geq c(x)$.

Оптимальна оцінка цієї альтернативи $c_* = c(x_*)$ є найкращою оцінкою, тобто для всіх $c \in C = \{c(x) | x \in X\}$, $c \neq c_*$, виконується строга нерівність $c_* > c$.

Множину C назвемо множиною допустимих значень функції оцінок c , а $c_* \in C$ – максимумом цієї функції на X .

Якщо задача (1) недопустима, тобто в ній не існує жодної допустимої альтернативи, то вона не має оптимального розв'язку. (Допустиму альтернативу називатимемо також допустимим розв'язком цієї задачі.) Якщо допустима задача (1) (тобто задача з непорожньою допустимою множиною) не має оптимального розв'язку, то або функція оцінок необмежена зверху на множині X , або точна верхня межа множини C , допустимих значень цієї функції, не належить цій множині.

Поряд з цією задачею розглянемо іншу задачу максимізації на допустимій множині X , з іншим критерієм c' :

$$\max c'(x), \quad x \in X. \quad (2)$$

Означення 1. Критерій c' назвемо надкритерієм критерію c на X , якщо і тільки якщо для будь-якого $x, y \in X$ з відношення $c(x) > c(y)$ впливає відношення $c'(x) > c'(y)$.

Теорема 1. Якщо c' є надкритерієм критерію c на X , то альтернатива x'_* , оптимальна в задачі (2), є оптимальною і в задачі (1). Отже, $X'_* \subset X_*$, де X'_* – множина оптимальних альтернатив в задачі (2), X_* – множина оптимальних альтернатив в задачі (1).

Доведення. Нехай $x'_* \in X'_*$ – будь-яка альтернатива. Отже, для всіх $x \in X$ виконується нерівність

$$c'(x'_*) \geq c'(x). \quad (3)$$

Припустимо супротивне, тобто x'_* не є оптимальною альтернативою в задачі (1). Тоді існує $y \in X$ така, що виконується нерівність

$$c(y) > c'(x'_*). \quad (4)$$

Але, за означенням 1, з нерівності (3) впливає нерівність $c'(y) > c'(x'_*)$, що суперечить оптимальності x'_* в задачі (2).

Означення 2. Критерій c назвемо підкритерієм критерію c' на X , якщо і тільки якщо критерій c' є надкритерієм критерію c на X .

Отже, якщо критерій c в задачі (1) є підкритерієм критерію c' в задачі (2), то за теоремою 1 виконується умова включення $X'_* \subset X_*$.

Легко перевірити, що поняття надкритерію як відношення на R^n (або на будь-якій з її множин) має властивість транзитивності, тобто справедлива наступна теорема.

Теорема 2. *Якщо c' є надкритерієм критерію c на деякій множині $Y \subset R^n$ і c'' є надкритерієм критерію c' на цій множині, то c'' є надкритерієм критерію c на множині Y .*

Доведення. Нехай критерій c' є надкритерієм критерію c на Y , тобто для будь-яких $x, y \in Y$, таких, що $c(x) > c(y)$, виконується нерівність $c'(x) > c'(y)$, критерій c'' є надкритерієм критерію c' на Y , тобто для $x, y \in Y$, таких, що $c'(x) > c'(y)$, виконується нерівність $c''(x) > c''(y)$. Тоді, за транзитивністю відношення " $>$ " з нерівності $c(x) > c(y)$ випливає нерівність $c''(x) > c''(y)$. Отже, критерій c'' є надкритерієм критерію c на Y .

Означення 3. Два критерії c і c' назвемо еквівалентними на множині Y , $Y \subset R^n$, якщо і тільки якщо з того, що альтернатива $x \in Y$ краща за альтернативу $y \in Y$ по одному з цих критеріїв, випливає, що альтернатива x краща за альтернативу y і по другому критерію.

Легко показати, що для еквівалентних критеріїв c і c' на X , виконується рівність $X_* = X'_*$.

Відношення критеріїв також є транзитивним, що легко показати: якщо критерій c' еквівалентний критерію c на множині Y і критерій c'' еквівалентний критерію c' на цій же множині, то критерій c'' еквівалентний критерію c на множині Y .

Зазначимо, що поняття еквівалентності критеріїв дає можливість замінювати одну задачу максимізації іншою задачею максимізації з еквівалентним критерієм.

Розглянемо методику побудови надкритеріїв.

Нехай $c(x) = f(c'(x))$, де f – функція, визначена на R , c і c' – функції, визначені на R^n , C – множина значень функції c на X , C' – множина значень функції c' на X , F – множина значень функції f на C' .

Означення 4. Функцію f назвемо неспадною функцією на C' , якщо і тільки якщо для будь-яких $c'_1 \in C'$ і $c'_2 \in C'$ таких, що $f(c'_1) > f(c'_2)$ виконується нерівність $c'_1 > c'_2$.

Легко бачити, що з означення 4 випливає можливість існування $c'_1, c'_2 \in C'$, таких, що $c'_1 > c'_2$ і $f(c'_1) = f(c'_2)$.

Означення 5. Функцію f назвемо зростаючою функцією на C' , якщо і тільки якщо для будь-яких $c'_1, c'_2 \in C'$, таких, що $c'_1 > c'_2$, виконується $f(c'_1) > f(c'_2)$.

Теорема 3. *Якщо функція f є неспадною функцією на C' , то критерій $c'(x)$ є надкритерієм критерію $c(x) = f(c'(x))$ на X .*

Доведення. Нехай $x, y \in X$ – будь-які дві альтернативи, для яких виконується нерівність $c(x) > c(y)$, або, інакше $f(c'(x)) > f(c'(y))$. Тоді, за означенням 4, виконується й нерівність $c'(x) > c'(y)$. Отже, критерій $c'(x)$ є надкритерієм критерію $c(x)$.

Теорема 4. *Якщо функція f є зростаючою функцією на C' , то критерій $c'(x)$ і $c(x) = f(c'(x))$ еквівалентні на X .*

Доведення. Оскільки зростаюча функція f на C' є і неспадною на цій множині, то за теоремою 3 критерій $c'(x)$ є надкритерієм критерію $c(x)$ на X . Отже, для доведення теореми досить показати, що критерій $c(x)$ є надкритерієм критерію $c'(x)$ на X . Дійсно, нехай $x, y \in X$ – будь-які дві альтернативи, для яких виконується нерівність $c'(x) > c'(y)$. Тоді, оскільки f зростаюча функція на C' , то $f(c'(x)) > f(c'(y))$, тобто $c(x) > c(y)$, що означає те, що $c(x)$ є надкритерієм критерію $c'(x)$ на X .

Нехай $c_j, j = 1, 2, \dots, q$ – попарно еквівалентні критерії на X . Це означає, що для будь-яких двох номерів j_1 і $j_2, 1 \leq j_1, j_2 \leq q$, критерії c_{j_1} і c_{j_2} еквівалентні на X : $c_{j_1}(x) > c_{j_1}(y)$, якщо і тільки якщо $c_{j_2}(x) > c_{j_2}(y)$; $c_{j_1}(x) = c_{j_1}(y)$, якщо і тільки якщо $c_{j_2}(x) = c_{j_2}(y)$. Розглянемо критерій, який є лінійною комбінацією цих попарно еквівалентних критеріїв на X :

$$c(x) = \sum_{j=1}^q \alpha_j c_j(x), \quad (5)$$

де $\alpha_j > 0, j = 1, 2, \dots, q$.

Нехай $c'_j, j = 1, 2, \dots, q$ – будь-які надкритерії критеріїв $c_j, j = 1, 2, \dots, q$ відповідно на X . Розглянемо критерій, який є будь-якою додатною лінійною комбінацією цих надкритеріїв $c'_j, j = 1, 2, \dots, q$ на X :

$$c'(x) = \sum_{j=1}^q \beta_j c'_j(x), \quad (6)$$

де $\beta_j > 0, j = 1, 2, \dots, q$. Тоді справедлива наступна теорема.

Теорема 5. Критерій $c'(x)$, визначений формулою (6), є надкритерієм на X критерію $c(x)$, визначеного формулою (5).

Доведення. Нехай $x, y \in X$ – будь-які дві альтернативи, такі, що $c(x) > c(y)$, інакше $\sum_{j=1}^q \alpha_j c_j(x) > \sum_{j=1}^q \alpha_j c_j(y)$, або

$$\sum_{j=1}^q \alpha_j (c_j(x) - c_j(y)). \quad (7)$$

З нерівності (7) випливає, що існує номер $j_0, 1 \leq j_0 \leq q$, такий, що $\alpha_{j_0}(c_{j_0}(x) - c_{j_0}(y)) > 0$, тобто $c_{j_0}(x) - c_{j_0}(y) > 0$, за умови, що $\alpha_{j_0} > 0$. Оскільки критерій c_{j_0} еквівалентний на X всім критеріям $c_j, j = 1, 2, \dots, q$, то виконуються нерівності $c_j(x) > c_j(y), j = 1, 2, \dots, q$. Але, так як критерії $c'_j, j = 1, 2, \dots, q$ є надкритеріями критеріїв $c_j, j = 1, 2, \dots, q$, то виконуються нерівності $c'_j(x) > c'_j(y), j = 1, 2, \dots, q$, або

$$\beta_j (c'_j(x) - c'_j(y)) > 0, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (8)$$

оскільки $\beta_j > 0, j = 1, 2, \dots, q$. Отже, з нерівностей (8) випливає нерівність

$$\sum_{j=1}^q \beta_j (c'_j(x) - c'_j(y)) = \sum_{j=1}^q \beta_j c'_j(x) - \sum_{j=1}^q \beta_j c'_j(y) = c'(x) - c'(y) > 0,$$

тобто $c'(x) > c'(y)$, звідки випливає, що критерій $c'(x)$ є надкритерієм критерію $c(x)$ на X .

Як один з найпростіших прикладів застосування теореми 5 полягає в тому, що будь-який критерій $c(x)$ на X еквівалентний критерію $\alpha c(x) + \beta$ для будь-якого $\alpha > 0$ і будь-якого $\beta > R$. Це випливає з того, що для $\alpha > 0$ критерії $c(x)$ і $\alpha c(x)$ еквівалентні на X і з того, що число β , як сталий критерій, еквівалентний сталому нульовому критерію, який на X приймає стале нульове значення.

Теорема 6. *Сума еквівалентних критеріїв на X є надкритерієм кожного з цих критеріїв на X .*

Доведення. Нехай $c_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, q$ попарно еквівалентні критерії на X . Розглянемо будь-який з цих критеріїв c_{j_0} , $1 \leq j_0 \leq q$. Тоді, якщо для $x, y \in X$ виконується нерівність $c_{j_0}(x) > c_{j_0}(y)$, то за умовою попарної еквівалентності розглядуваних критеріїв виконуються нерівності $c_j(x) > c_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, q$. Отже, з цих нерівностей випливає нерівність $\sum_{j=1}^q c_j(x) > \sum_{j=1}^q c_j(y)$.

Теорема 7. *Будь-яка невід'ємна (ненульова) лінійна комбінація попарно еквівалентних критеріїв на X є надкритерієм кожного з цих критеріїв на X .*

Доведення. Нехай c_j , $j = 1, 2, \dots, q$ попарно еквівалентні критерії на X , $\sum_{j=1}^q \alpha_j c_j(x)$ – невід'ємна ненульова лінійна комбінація цих критеріїв, тобто $\alpha_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, q$, і існує j_0 , $1 \leq j_0 \leq q$, таке, що $\alpha_{j_0} > 0$.

Розглянемо один з цих критеріїв c_{j_1} ($1 \leq j_1 \leq q$). Нехай для $x, y \in X$ виконується нерівність $c_{j_1}(x) > c_{j_1}(y)$. Тоді, за умовою попарної еквівалентності розглядуваних критеріїв, виконуються й нерівності $c_j(x) > c_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, q$. Отже, виконується й нерівність $\sum_{j=1}^q \alpha_j c_j(x) > \sum_{j=1}^q \alpha_j c_j(y)$, оскільки $\alpha_j c_j(x) > \alpha_j c_j(y)$, $j = 1, 2, \dots, q$ і $\alpha_{j_0} c_{j_0}(x) > \alpha_{j_0} c_{j_0}(y)$.

Зазначимо, що будь-який критерій $c(x)$ на X є надкритерієм на X будь-якого свталого критерію $c'(x) = \text{const}$ на X , оскільки $X'_* = X$. Отже, $X_* \subset X'_*$.

Приклади побудови надкритеріїв можна продовжувати використовуючи їх означення. В кожному конкретному випадку, на кожній конкретній множині X надкритерії будь-якого критерію будуються по-своєму так, щоб одержати задачу максимізації простішу від розглядуваної задачі максимізації.

Список використаної літератури

1. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2002. – 312 с.
2. Червак О. Ю., Лешко І. М., Чупов С. В. Знаходження цілочислових паретівських оптимумів за допомогою лексикографічних відтинань // Науково-технічний вісник "Проблеми економічного та соціального розвитку регіону і практика наукового експерименту". – Київ–Ужгород, 1997. – Вып. 13. – С. 274–275.
3. Червак О. Ю. Надкритерії та підкритерії паретівського критерію // Міжнародна конференція "Питання оптимізації обчислень" (Київ, 6–9 жовтня 1997 р.). – Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 1997. – С. 315–316.
4. Червак О. Ю. Об оптимальностях по многим равноважным критериям // Кибернетика и системный анализ. – Киев, 1997. – No 4. – С. 181–182.
5. Червак О. Ю., Сергієнко І. В. Оптимізація на множині Парето // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. – Київ, 1996. – Вып. 2. – С. 171–175.

Одержано 10.11.2015