МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДВНЗ «УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ІНЖЕНЕРНО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА КОМП'ЮТЕРНИХ СИСТЕМ ТА МЕРЕЖ

Совга Т.С.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ І ЗАВДАННЯ ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

з дисципліни

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ

Частина 1

для студентів біологічного факультету,
спеціальності 203 "Садівництво та виноградарство"

УЖГОРОД 2024

Совга Т.С. Основи вищої математики: методичні вказівки та завдання до практичних занять для студентів 1-го курсу біологічного факультету, спеціальності 203 «Садівництво та виноградарство». Частина 1. / Т.С. Совга. – Ужгород: видавництво ПП «Аутдор-Шарк», 2024. – 128 с.

Укладачі: Совга Т.С., ст. викладач

Рецензенти:
Шпеник О.О., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри фізико-математичних дисциплін ДВНЗ «УжНУ»

Відповідальний за випуск: Горват П.П., кандидат фіз.-мат. наук, доцент, завідувач кафедри комп'ютерних систем та мереж

Дані методичні вказівки розглянуто та схвалено на засіданні кафедри комп'ютерних систем та мереж, протокол № 1 від 05 вересня 2024 року та методичної комісії інженерно-технічного факультету, протокол № 1 від 12 вересня 2024 року.

ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1. Поняття матриці. Різновиди матриць

Означення. *Матрицею* називають прямокутну таблицю упорядкованих чисел або будь-яких інших об'єктів, розташованих в m рядках та n стовпцях.

Матриці позначають великими літерами, наприклад *A, B, C, ...* та круглими дужками.

Матриця, яка має m рядків та n стовпців, називається матрицею розмірності $m \times n$. Така матриця має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кожен елемент a_{ij} матриці A має два індекси: перший індекс i вказує номер рядка, а другий індекс j – номер стовпця, на перетині яких містить цей елемент. Так, елемент a_{23}, знаходиться на перетині другого рядка та третього стовпця матриці A.

Матриця розмірності $m \times 1$ називається *матрицею-стовпцем* або *вектором-стовпцем.* Матриця розмірності $1 \times n$ називається *матрицею-рядком* або *вектором-рядком.*

Наприклад, задані матриці:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 8 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 8 & 12 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

де матриця A має розмірність 2×3, матриця B розмірність 3×4, C – матриця-стовпець розмірності 4×1, D – матриця-рядок розмірності 1×4.

Матрицю називають *квадратною* порядку n, якщо кількість її рядків однакова з кількістю стовпців і дорівнює n. Наприклад, квадратна матриця A порядку n має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Множина елементів a_{11}, a_{22}, a_{33},..., a_{nn} квадратної матриці A порядку n утворюють *головну діагональ матриці*, а множина елементів a_{1n}, $a_{2(n-1)}$, $a_{3(n-2)}$,..., a_{n1} утворює *побічну* діагональ матриці. Якщо всі елементи головної діагоналі квадратної матриці дорівнюють одиниці, а всі інші нулю, то матрицю називають *одиничною* і позначається буквою E. Матриця, у якої усі елементи дорівнюють нулю називається *нульовою.* Позначається така матриця буквою O. Наприклад, задані матриці:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

де B – діагональна матриця 4-го порядку, E – одинична матриця 3-го порядку, O – нульова квадратна матриця 3-го порядку.

Дві матриці A та B називаються *рівними*, якщо вони однакових розмірностей і мають рівні відповідні елементи, тобто $a_{ij} = b_{ij}$ для усіх i=1,2, **...**, m; j = 1, 2,...,n.

Замінимо у матриці A рядки на стовпці так, щоб перший рядок став першим стовпцем, другий рядок – другим стовпцем і т.д. У результаті цього дістанемо матрицю

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A^T називається *транспонованою матрицею* відносно матриці A. Перехід від матриці A до матриці A^T називається *операцією транспонування*. Елементи матриць A^T і A пов'язані співвідношенням $a_{ij}^T = a_{ji}$ для всіх $i = 1,2,\dots,m$ і $j = 1,2,\dots,n$.

2. Найпростіші дії над матрицями

Найпростішими діями над матрицями називають *множення матриці на число, додавання (віднімання) матриць та множення матриць*:

1^0. ***Добутком матриці A на число k*** (або числа ***k*** на матрицю ***A***) називається матриця, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці A та числа k:

$$A \cdot k = k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Дії додавання та віднімання можна виконувати лише над матрицями однакової розмірності.

2^0. ***Сумою (різницею) матриць A*** **та** ***B однакової розмірності m x n*** називається матриця ***C*** розмірності $m \times n$, елементи якої c_{ij} дорівнюють відповідній алгебраїчній сумі (різниці) елементів a_{ij} та b_{ij} матриць ***A*** та ***B,*** тобто

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Справедливі наступні властивості дій додавання та віднімання:

1) $A + B = B + A$ *– комутативність відносно додавання матриць*;

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *– асоціативність відносно додавання матриць;*

3) $A + O = O + A = A$; $A - A = O$ *– роль нульової матриці в діях над матрицями, як і числа 0 в діях над числами;*

4) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$ *– асоціативність відносно множення чисел*;

5) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *– дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць;*

6) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *– дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.*

Дію множення двох матриць $A \cdot B$ вводять тільки для узгоджених матриць. Матриця A називається *узгодженою* з матрицею B, якщо кількість стовпців матриці A (першого множника) дорівнює кількості рядків матриці B (другого множника). Якщо матриці не узгоджені, то множення таких матриць неможливе.

2^0. *Добутком $A \cdot B$ матриці A розміру $m \times n$ і матриці B розмірності $n \times p$* називається матриця C розмірності $m \times p$, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумі добутків елементів *i-го* рядка матриці A на відповідні елементи *j*-го стовпця матриці B, тобто кожен елемент матриці C знаходиться за формулою

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, p. \qquad (3)$$

Зауваження. Добуток матриць взагалі не має властивості комутативності, тобто $A \cdot B \neq B \cdot A$. Якщо добуток двох матриць має властивість $A \cdot B = B \cdot A$, тоді кажуть, що матриці комутують. Наприклад, $A \cdot E = E \cdot A A$.

Приклад . Знайти добуток матриць

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ та } \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Матриця A має три стовпці, а матриця X – три рядки, тому ці матриці є узгодженими і їх можна множити. Добутком цих матриць буде матриця-стовпець

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

3. Визначники (детермінанти) та їх властивості

Визначником (детермінантом) n-го порядку квадратної числової матриці A порядку n називають число, яке знаходиться з елементів матриці A за певним правилом і позначають |A| , $det\ A$ або Δ(A).

Правило знаходження визначника матриці 1-го порядку: визначник матриці першого порядку дорівнює елементу цієї матриці, тобто

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}. \tag{4}$$

Правило знаходження визначника матриці 2-го порядку: визначник матриці другого порядку дорівнює різниці добутків елементів головної та побічної діагоналей, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}. \tag{5}$$

Правило знаходження визначника матриці 3-го порядку: Визначник матриці третього порядку знаходять за формулою

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}. \tag{6}$$

Обчислення визначника третього порядку можна виконати за схемою, яка називається ***правилом трикутників,*** наведеною на рис. 1. Три перших доданки (із знаком “+”) є добутками елементів, які стоять на головній діагоналі і в вершинах двох трикутників з основами, паралельними головній діагоналі. Три останні доданки у правій частині (6) беруться зі знаком “–“ і є добутками елементів, які стоять на побічній діагоналі і в вершинах двох трикутників із основами, паралельними побічній діагоналі.

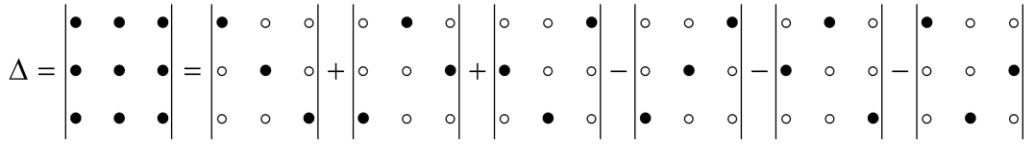


Рис. 1.

Властивості визначників:

1). Визначник при транспонуванні не змінюється.

Наслідок. *У визначнику рядки та стовпці мають однакові властивості*.

2). Якщо у визначнику поміняти місцями будь-які два рядки (стовпці), то визначник змінить знак на протилежний.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 23$, $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$, тому $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

3). Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.

4). Якщо у визначнику усі елементи одного рядка (стовпця) помножити на дійсне число *k*, то значення визначника також помножиться на число *k*.

Наслідок 1. *Спільний множник усіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.*

Наслідок 2. *Якщо усі елементи будь-якого рядка (стовпця) визначника дорівнюють нулю, то визначник дорівнює нулю.*

5). Визначник, у якого відповідні елементи двох будь-яких рядків (стовпців) пропорційні, дорівнює нулю.

6). Якщо у визначнику елементи *i-го* рядка (*k*-го стовпця) є сумою двох доданків, тоді він дорівнює сумі двох відповідних визначників.

7) Якщо до всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) цього визначника, помножені на одне й те ж саме число, то значення визначника не зміниться.

4. Мінори та алгебраїчні доповнення

Для обчислення визначників порядку $n > 3$ використовують поняття мінору та алгебраїчного доповнення.

Означення 1. *Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку* називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержуємо з визначника $|A|$ шляхом викреслювання *i*-го рядка та *j*-го стовпця, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Означення 2. *Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника* називають мінор цього елемента, взятий зі знаком $(-1)^{i+j}$, тобто

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \qquad (7)$$

5. Розгортання визначника за елементами рядка або стовпця. Визначник *n*-го порядку.

Визначник *n*-го порядку можна обчислити за формулою

$$|A| = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}. \qquad (8)$$

Справедливість формули (8) для n=2 і n=3 легко перевірити безпосередньо. Справді, згідно даної формули, для n=2 маємо

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

Як бачимо, визначник другого порядку дорівнює різниці добутків елементів на головній і допоміжній діагоналях.

Якщо маємо визначник третього порядку, то

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot M_{11} + a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot M_{12} +$$

$$+ a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

Для визначника *n-го* порядку справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого стовпця (рядка) на відповідні їм алгебраїчні доповнення.*

У випадку використання *i*-го рядка цю теорему математично можна записати так

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{ik} \cdot A_{ik} + a_{in} \cdot A_{in}. \qquad (9)$$

Рівність (9) називають *розгортанням визначника за елементами i-го рядка* (i = 1, 2, ..., n). Аналогічно визначник можна розкласти за елементами k-го стовпця (k = 1, 2, ..., n).

Отже, обчислення визначника n-го порядку зводиться до обчислення визначників $(n-1)$-го порядку шляхом розгортання визначника за елементами будь-якого рядка або стовпця.

*Зауваження***.** Для скорочення обчислень визначника доцільно його розгорнути за елементами такого рядка чи стовпця, який містить найбільшу кількість нулів.

Таким чином, *для ефективного використання* методу обчислення визначника шляхом його розгортання за елементами будь-якого рядка або стовпця треба навчитись робити *елементарні перетворення визначника*, які дають можливість *одержати нулі у деякому рядку або стовпці.*

Означення. *Елементарними перетвореннями* називають наступні дії:

1) перестановка рядків (стовпців), враховуючи властивості визначника;

2) множення всіх елементів рядка (стовпця) на число $\lambda \neq 0$;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на деяке число.

Теорема 2. *Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.*

Розглянемо, наприклад, суму добутків елементів першого рядка на алгебраїчні доповнення елементів третього рядка визначника третього порядку

$$a_{11}\cdot A_{31}+a_{12}\cdot A_{32}+a_{13}\cdot A_{33}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot(a_{12}\cdot a_{23}-a_{22}\cdot a_{13})+a_{12}\cdot(a_{11}\cdot a_{23}-a_{21}\cdot a_{13})+a_{13}\cdot(a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12})=$$

$$=a_{11}\cdot a_{12}\cdot a_{23}-a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{12}\cdot a_{11}\cdot a_{23}+a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{13}+a_{13}\cdot a_{11}\cdot a_{22}-a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{12}=0.$$

6. Обернена матриця

Означення. *Матриця* A^{-1} називається *оберненою матрицею до матриці* A, якщо виконуються рівності

$$A\cdot A^{-1}=A\cdot A^{-1}=E, \tag{10}$$

тобто матриці A та A^{-1} комутують і їх добуток є одинична матриця $A\cdot A^{-1}=E$.

Не всяка матриця має обернену. Матриця A має обернену матрицю A^{-1} при виконанні двох умов:

1) матриця A квадратна;

2) визначник $|A|$ матриці A не дорівнює нулю.

Обернену матрицю A^{-1} до матриці A знаходять за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (11)$$

де $A_{i,j}$ – алгебраїчні доповнення елементів a_{ij} матриці A, (алгебраїчні доповнення до i-го рядка розташовані в i-му стовпці (i =1,2,..,n)).

Таким чином, щоб знайти матрицю обернену до даної, треба:

1) обчислити визначник даної матриці;

2) скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів даної матриці;

3) транспонувати матрицю з алгебраїчних доповнень;

4) кожний елемент транспонованої матриці поділити на визначник даної матриці.

Розв'язування завдань

Приклад 1. Нехай: $A=\begin{pmatrix} 50 & 30 & 40 \\ 18 & 16 & -20 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 20 & 18 & 50 \\ 14 & 15 & 10 \end{pmatrix}$. Знайти $A\pm B$.

Розв'язання. $A+B=\begin{pmatrix} 50+20 & 30+18 & 40+50 \\ 18+14 & 16+15 & -20+10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 70 & 48 & 90 \\ 32 & 31 & -10 \end{pmatrix}$,

$$A-B=\begin{pmatrix} 50-20 & 30-18 & 40-50 \\ 18-14 & 16-15 & -20-10 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 30 & 12 & -10 \\ 4 & 1 & -30 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Дано матрицю $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -3 & 8 & 9 \\ 11 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Визначити розмірність матриці і транспонувати її.

Розв'язання.

Так як матриця має три рядки і три стовбці, розмірність матриці буде 3x3. Транспонована матриця має вигляд: $A^T=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 4 & 8 & 4 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

Приклад 3. Нехай задано матриці $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&1&2\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}$. Знайти $A\cdot B$ та $B\cdot A$, і показати, що $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Розв'язання.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2&1&2\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-2)+2\cdot3+3\cdot1&1+4+9&2+2+6\\4\cdot(-2)+5\cdot3+6\cdot1&4+10+18&8+5+12\\2\cdot(-2)+1\cdot3+4\cdot1&2+2+12&4+1+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&14&10\\13&32&25\\3&16&13\end{pmatrix}.$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-2&1&2\\3&2&1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\2&1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+4+4&-4+5+2&-6+6+8\\3+8+2&6+10+1&9+12+4\\1+12+4&2+15+2&3+18+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&3&8\\13&17&25\\17&19&29\end{pmatrix}.$$

Отже, $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Приклад 4. Обчислити визначники: а) $\begin{vmatrix}2&-3\\4&5\end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix}3&2\\0&4\end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix}2&6\\8&5\end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Будемо обчислювати задані визначники за формулою (5):

а) $\begin{vmatrix}2&-3\\4&5\end{vmatrix}=2\cdot5-(-3)\cdot4=10+12=22$; б) $\begin{vmatrix}3&2\\0&4\end{vmatrix}=3\cdot4-0\cdot2=12$;

в) $\begin{vmatrix}2&6\\8&5\end{vmatrix}=2\cdot5-6\cdot8=10-48=-38$.

Приклад 5. Обчислити визначник $\Delta=\begin{vmatrix}2&-3&0\\1&4&3\\-5&6&0\end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Згідно з формулою (6) одержимо

$$\begin{vmatrix}2&-3&0\\1&4&3\\-5&6&0\end{vmatrix}=[2\cdot4\cdot0]+[(-3)\cdot3\cdot(-5)]+[1\cdot6\cdot0]-[-5\cdot4\cdot0]-[1\cdot(-3)\cdot0]-[3\cdot6\cdot2]=$$

$$=0+45+0-0-0-36=9.$$

Приклад 6. Знайти алгебраїчні доповнення до елементів a_{21} та a_{33} визначника $\begin{vmatrix}2&3&-1\\1&4&2\\-3&1&4\end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Алгебраїчні доповнення до елементів a_{21} та a_{33} позначимо A_{21} та A_{33}, відповідно. Згідно з означенням маємо:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}; \quad A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = M_{33}. \qquad (*)$$

Мінори M_{21} та M_{33} знайдемо згідно з означенням:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 \\ 1 & \mathbf{3} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & 1 & 4 & 2 \\ 3 & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 = 12 + 1 = 13,$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} & 1 & 2 & \mathbf{3} \\ 1 & \mathbf{2} & \mathbf{3} & -1 \\ 2 & \mathbf{1} & \mathbf{4} & 2 \\ \mathbf{3} & -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 8 - 3 = 5.$$

Підставимо ці значення мінорів у відповідні рівності (*), одержимо шукані алгебраїчні доповнення: $A_{21} = -13; \quad A_{33} = 5$.

Приклад 7. Нехай заданий визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. Обчислити визначник користуючись властивістю визначників 7 та теоремою 1.

Розв'язання.

Перетворимо визначник таким чином:

1) до елементів другого рядка визначника Δ додамо відповідні елементи першого рядка, помножені на (–3);

2) до елементів третього рядка визначника Δ додамо відповідні елементи першого рядка, помножені на (–2).

У результаті таких перетворень отримаємо визначник, який позначимо через Δ_1, де $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Переконаємось, що $\Delta_1 = \Delta$. Для цього обчислимо ці визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot 4\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 2\cdot 2 - 4\cdot 3\cdot 3 = \text{-16};$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -8 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot(-4)\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot(\text{-4}) + (\text{-8})\cdot 0\cdot 1 - (\text{-4})\cdot(\text{-4})\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 0 - (\text{-8})\cdot 2\cdot 0 = \text{-16}.$$

Приклад 8. Обчислити визначник 4-го порядку $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

Перетворимо цей визначник таким чином, щоб зробити якомога більше нулів у якомусь стовпчику. Краще у першому, бо там вже є один нуль. Для цього до елементів третього рядка додамо відповідні елементи першого рядка, помножені на 3 та додамо до елементів четвертого рядка відповідні елементи першого рядка, помножені на (–5). При цьому одержимо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 8 & -5 & 14 \\ 0 & -9 & 9 & -12 \end{vmatrix}.$$

Тепер визначник доцільно розгорнути за елементами першого стовпця та використали наслідок 1 властивості 4. Маємо

$$\Delta = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 8 & -5 & 14 \\ -9 & 9 & -12 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 8 & -5 & 14 \\ -3 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 3\cdot(20 - 96 - 84 + 60 - 42 + 64) = -234\cdot$$

Приклад 9. Знайти обернену матрицю до матриці A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Спочатку перевіримо, що матриця A має обернену A^{-1}. Для цього обчислюємо її визначник

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 5 + 2\cdot(-4)\cdot 2 + 3\cdot(-1)\cdot(-3) - 2\cdot 2\cdot(-3) - 3\cdot 2\cdot 5 - (-1)\cdot(4)\cdot 1 = -19 \neq 0.$$

Отже, матриця A має обернену A^{-1}, яку знайдемо за формулою (11). У даному випадку алгебраїчними доповненнями до елементів матриці A є:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 6; \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -23; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 11; \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Формуємо обернену матрицю A^{-1} та перевіряємо правильність її обчислення:

$$A^{-1} = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} 6 & -7 & -2 \\ -23 & 11 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{19} & \frac{7}{19} & \frac{2}{19} \\ \frac{23}{19} & -\frac{11}{19} & \frac{5}{19} \\ \frac{7}{19} & -\frac{5}{19} & \frac{4}{19} \end{pmatrix}, \quad A^{-1}\cdot A = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} 6 & -7 & -2 \\ -23 & 11 & -5 \\ -7 & 5 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} 6-21-4 & 12-14+2 & -18+28-10 \\ -23+33-10 & -46+22+5 & 69-44-25 \\ -7+15-8 & -14+10+4 & 21-20-20 \end{pmatrix} = \frac{-1}{19}\begin{pmatrix} -19 & 0 & 0 \\ 0 & -19 & 0 \\ 0 & 0 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад 10. Знайти обернену матрицю до матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Задана матриця A квадратна третього порядку, її визначник:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 10 + 2\cdot 7\cdot 3 + 2\cdot 7\cdot 3 - 3\cdot 3\cdot 5 - 2\cdot 2\cdot 10 - 7\cdot 7\cdot 1 = 0.$$

Отже, ця матриця оберненої не має.

Приклад 11. Знайти обернену матрицю до матриці $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Оскільки задана матриця квадратна другого порядку, визначник якої $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 4 \cdot 1 = 12 - 4 = 8 \neq 0$, то для знаходження A^{-1} застосовуємо формулу (1.11). Одержимо: $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Перевірка: $A^{-1} \cdot A = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 12-4 & 6-6 \\ -8+8 & -4+12 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні поняття

Системою *n* лінійних рівнянь з *n* невідомими називається система вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}, \qquad (12)$$

де a_{ij} – коефіцієнти системи, x_j – невідомі, b_i – вільні члени, $i, j = 1..n$ – дискретні змінні.

Система рівнянь (12) називається *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

Упорядкований набір *n* чисел $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ називається *розв'язком системи* (12), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Система рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.

8. Матричний метод розв'язання системи лінійних рівнянь

Нехай задано систему рівнянь (12). Введемо позначення:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

де A – основна матриця системи; X – матриця-стовпчик невідомих; B – матриця-стовпчик вільних членів. Тоді згідно з правилом множення матриць систему (12) запишемо у матричному вигляді

$$A \cdot X = B. \tag{13}$$

Якщо $|A| \neq 0$, то розв'язок системи можна знайти за формулою

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{14}$$

Щоб розв'язати систему рівнянь (12) матричним методом, треба знайти матрицю, обернену до матриці A, і помножити її (справа) на матрицю B.

9. Розв'язання системи лінійних рівнянь методом Крамера

Нехай задано систему рівнянь (1.13). Введемо позначення:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\dots,\Delta_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix},$$

де Δ – основний визначник системи; $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n}$ – визначники, які отримують з Δ заміною відповідно $1, 2, \dots, n$- го стовпчиків на стовпчик вільних членів.

Теорема (Крамера). *Якщо основний визначник системи рівнянь* $\Delta \neq 0$ *то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами*:

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta} \quad (i = 1,2,\cdots,n). \tag{15}$$

При розв'язуванні системи (12) можуть бути такі випадки:

1) якщо $\Delta \neq 0$, то система рівнянь (12) має єдиний розв'язок, що знаходять за формулами (15);
2) якщо $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \dots, \Delta_{x_n} \neq 0$, то система рівнянь (12) не має розв'язків;

3) якщо $\Delta = 0$, $\Delta_{x_1} = 0, \Delta_{x_2} = 0, \ldots, \Delta_{x_n} = 0$, то система рівнянь (12) має безліч розв'язків.

10. Розв'язання системи лінійних рівнянь методом Гаусса

Одним із найбільш універсальних і ефективних методів розв'язання систем лінійних рівнянь є *метод послідовного виключення невідомих*, або *метод Гаусса*, який будемо реалізовувати шляхом еквівалентних перетворень системи рівнянь.

Розглянемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь третього порядку

$$\begin{cases} a_{11}^0 x_1 + a_{12}^0 x_2 + a_{13}^0 x_3 = b_1^0, \\ a_{21}^0 x_1 + a_{22}^0 x_2 + a_{23}^0 x_3 = b_2^0, \\ a_{31}^0 x_1 + a_{32}^0 x_2 + a_{33}^0 x_3 = b_3^0, \end{cases} \tag{16}$$

де для зручності записів введемо позначення: $a_{ij}^0 = a_{ij}$, $b_i^0 = b_i$, $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$.

Метод виключення Гаусса, прийнято реалізовувати за два ходи: *прямого* і *зворотного*. На прямому ході, за допомогою еквівалентних перетворень, систему (16) зводять до верхнього трикутного вигляду, а на зворотному ході, з одержаної системи знаходять, значення невідомих, тобто розв'язок системи.

Прямий хід методу Гаусса. Нехай $a_{11}^0 \neq 0$. Розділивши обидві частини першого рівняння із (1.16) на a_{11}^0 , одержимо нове рівняння

$$x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 = b_1^1, \tag{17}$$

де $a_{1j}^1 = \frac{a_{1j}^0}{a_{11}^0}$, $b_1^1 = \frac{b_1^0}{a_{11}^0}$, $j = 2,3$.

Рівняння (17) використаємо для виключення невідомого x_1 із другого і третього рівнянь системи (16). Для виключення x_1 із другого рівняння додамо до нього перше, помножене на $(-a_{21}^0)$. Потім, помноживши рівняння (17) на $(-a_{31}^0)$ і додавши результат до третього рівняння, виключимо з нього x_1. В результаті одержимо систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 = b_1^1, \\ 0 + a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 = b_2^1, \\ 0 + a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 = b_3^1, \end{cases} \tag{18}$$

де $a_{22}^1 = a_{22}^0 - a_{12}^1 \cdot a_{21}^0$, $a_{23}^1 = a_{23}^0 - a_{13}^1 \cdot a_{21}^0$, $b_2^1 = b_2^0 - b_1^1 \cdot a_{21}^0$;

$a_{32}^1 = a_{32}^0 - a_{12}^1 \cdot a_{31}^0$, $a_{33}^1 = a_{33}^0 - a_{13}^1 \cdot a_{31}^0$, $b_3^1 = b_3^0 - b_1^1 \cdot a_{31}^0$.

На наступному кроці виключаємо невідому x_2 із системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{22}^1 x_2 + a_{23}^1 x_3 = b_2^1, \\ a_{32}^1 x_2 + a_{33}^1 x_3 = b_3^1, \end{cases} \tag{19}$$

яка є частиною системи (18).

Нехай тепер $a_{22}^1 \neq 0$. Розділимо обидві частини першого рівняння (19) на a_{22}^1. В результаті цього дістанемо рівняння вигляду

$$x_2 + a_{23}^2 x_3 = b_2^2, \tag{20}$$

де $a_{23}^2 = \dfrac{a_{23}^1}{a_{22}^1}$, $b_2^2 = \dfrac{b_2^1}{a_{22}^1}$.

Віднімемо від другого рівняння системи (19) рівняння (20), помножене на a_{32}^1. Одержимо рівняння

$$a_{33}^2 x_3 = b_3^2, \tag{21}$$

де $a_{33}^2 = a_{33}^1 - a_{23}^1 \cdot a_{32}^1$, $b_3^2 = b_3^1 - b_2^1 \cdot a_{32}^1$.

Нарешті, якщо $a_{33}^2 \neq 0$, то, розділивши на нього рівняння (21), зведемо це рівняння до вигляду

$$x_3 = b_3^3, \tag{22}$$

де $b_3^3 = \dfrac{b_3^2}{a_{33}^2} - b_2^1 \cdot a_{32}^1$.

Таким чином, в результаті реалізації прямого ходу, приходимо до системи рівнянь трикутного вигляду

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^1 x_2 + a_{13}^1 x_3 = b_1^1, \\ x_2 + a_{23}^2 x_3 = b_2^2, \\ x_3 = b_3^3. \end{cases} \tag{23}$$

Зворотній хід методу Гаусса. Невідомі x_1, x_2, x_3 знаходяться явно із системи (23) за формулами:

$$x_3 = b_3^3, \quad x_2 = b_2^2 - a_{23}^2 x_3, \quad x_1 = b_1^1 - a_{12}^1 x_2 - a_{13}^1 x_3. \tag{24}$$

Зауваження. Якщо $a_{11}=0$, то, при умові, що система має єдиний розв'язок $(|A|\neq 0)$, серед коефіцієнтів при x_1 (першого стовпчика матриці A) існує хоча б один відмінний від нуля. Тоді рівняння, що містить x_1 потрібно поміняти місцями із першим. Аналогічно можна зробити і для інших невідомих.

Розв'язування завдань

Приклад 1. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою матричного методу:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 3x_2 = 5; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Запишемо систему в матричному вигляді:

$$Ax = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо визначник $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$ і за формулою (11) знаходимо

$A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$. За формулою (14) знаходимо

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} + \frac{5}{7} \\ -\frac{3}{7} + \frac{10}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отже, $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

б) Запишемо систему в матричному вигляді:

$$Ax = B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо визначник матриці *A*:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 4 - 3\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 2\cdot 2 = 10 \neq 0.$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то розв'язок системи знаходимо за формулою $X = A^{-1}\cdot B$, де A^{-1} – обернена матриця.

Далі знаходимо алгебраїчні доповнення A_{ij} кожного елемента матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5.$$

Формуємо обернену матрицю та знаходимо розв'язок системи:

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 \\ -2 & 5 & -1 \\ -10 & 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & -\frac{5}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{5}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{10}{10} & \frac{5}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix};$$

$$X = A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & -\frac{5}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & \frac{5}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{10}{10} & \frac{5}{10} & \frac{5}{10} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{40}{10} - \frac{5}{10} - \frac{15}{10} \\ -\frac{10}{10} + \frac{5}{10} - \frac{15}{10} \\ -\frac{50}{10} + \frac{5}{10} + \frac{75}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Розв'язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Крамера:

$$\text{а)}\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7; \end{cases} \quad \text{б)}\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5; \\ -4x_1 + x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання.

а) Знаходимо визначники: Δ, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 = 7, \ \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 7 = 7, \ \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 0 = 14.$$

За формулами (15) знаходимо: $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{7}{7} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{14}{7} = 2$.

б) Знаходимо визначники: Δ, Δ_{x_1}, Δ_{x_2}, Δ_{x_3}:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 46, \quad \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 46,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -4 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 92, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ -4 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 138.$$

За формулами (15): $x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{46}{46} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{92}{46} = 2$, $x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{138}{46} = 3$.

Приклад 3. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими за допомогою правила Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ -4x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Розв'язання.

Знайдемо визначник матриці коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + (-4) \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 1 \cdot 4 - 2 \cdot (-4) \cdot 2 - 1 \cdot (-3) \cdot 2 = 26,$$

Так як $\Delta \neq 0$, то задана система рівнянь сумісна, має єдиний розв'язок. Обчислимо визначники:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot 5 - (-1) \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \cdot 2 - 1 \cdot (-3) \cdot 3 = 26,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 78, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 130.$$

За формулами Крамера знаходимо розв'язок системи:

$x_1 = \frac{\Delta x1}{\Delta} = \frac{26}{26} = 1$, $x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3$, $x_3 = \frac{\Delta x3}{\Delta} = \frac{130}{26} = 5$.

Отже, єдиний розв'язок даної системи: $x_1 = 1$; $x_2 = 3$; $x_3 = 5$.

Приклад 4. Використовуючи метод Крамера, розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Розв'язання.

Знаходимо визначник матриці коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 6 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot(-1) + 1\cdot(-3)\cdot 1 + (-3)\cdot 3\cdot 6 - 1\cdot 2\cdot 6 - 3\cdot(-3)\cdot 5 - 1\cdot(-3)\cdot(-1) = -37$$

Знайдений визначник відмінний від нуля, тобто задана система є сумісною, то вона має єдиний розв'язок. Далі обчислюємо визначники:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2\cdot(-1) + 1\cdot(-3)\cdot 1 + (-3)\cdot 3\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot(-3)\cdot(-2) - 1\cdot(-3)\cdot(-1) = -53$$

$$\Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot 3\cdot 1 + (-2)\cdot 3\cdot 6 - 1\cdot 1\cdot 6 - 3\cdot 3\cdot 5 - 1\cdot(-2)\cdot(-1) = -91$$

$$\Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot(-3)\cdot(-2) + (-3)\cdot 1\cdot 6 - (-2)\cdot 2\cdot 6 - 1\cdot(-3)\cdot 5 - 1\cdot(-3)\cdot 3 = 66$$

Після цього знаходимо розв'язок даної системи за формулами:

$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{53}{37},\ x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = \frac{91}{37},\ x_3 = \frac{\Delta_{x3}}{\Delta} = -\frac{66}{37}.$

Зауваження: метод Крамера доцільно використовувати, коли кількість рівнянь та невідомих системи $n \leq 3$. Даний метод можна застосовувати і для великих значень, але він потребує більшої кількості розрахунків. Якщо $n > 3$ доцільно використовувати метод Гаусса, основна ідея якого полягає у приведенні матриці до трикутного вигляду.

Приклад 5. Задані системи лінійних рівнянь розв'язати методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 15; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$

Розв'язування.

а) Оскільки коефіцієнт $a_{11}=3\neq 0$, то перше рівняння розділимо на $a_{11}=3$. Одержимо рівняння

$$x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=\frac{5}{3}. \qquad (25)$$

Скориставшись одержаним рівнянням зробимо нульові коефіцієнти при x_1 у другому і третьому рівняннях. Для цього від другого рівняння віднімемо рівняння (25), помножене на 2, а від третього рівняння віднімемо рівняння (25), помножене на 3. В результаті одержимо систему $\begin{cases} \frac{5}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=-\frac{7}{3}, \\ -\frac{5}{3}x_2+\frac{5}{3}x_3=\frac{25}{3}, \end{cases}$ яка після спрощення набуде вигляду

$$\begin{cases} 5x_2+x_3=-7, \\ -x_2+x_3=5. \end{cases} \qquad (26)$$

В одержаній системі розділимо перше рівняння на 5 і дістаємо рівняння

$$x_2+\frac{1}{5}x_3=-\frac{7}{5}. \qquad (27)$$

Для вилучення змінної x_2, до другого рівняння системи (26) додамо рівняння (27). Одержимо рівняння $\frac{6}{5}x_3=\frac{18}{5}$, з якого знаходимо $x_3=3$.

Після цього можемо записати остаточну трикутну систему прямого ходу:

$$\begin{cases} x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3=\frac{5}{3}, \\ x_2+\frac{1}{5}x_3=-\frac{7}{5}, \\ x_3=3. \end{cases}$$

Для одержання розв’язку виконаємо обернений хід:

$$x_3=3,\ \ x_2=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}x_3=-\frac{7}{5}-\frac{1}{5}\cdot 3=-2,\ \ x_1=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x_2-\frac{1}{3}x_3=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\cdot(-2)-\frac{1}{3}\cdot 3=\frac{6}{3}=2.$$

Таким чином: $x_1=2,\ x_2=-2,\ x_3=3$.

б) Оскільки коефіцієнт $a_{11}=1\neq 0$, то перше рівняння залишимо без зміни. На наступному кроці зробимо нульові коефіцієнти при x_1 у другому і третьому рівняннях. Для цього від другого рівняння віднімемо перше, а від третього

рівняння віднімемо перше, помножене на (–2). В результаті одержимо систему $\begin{cases} -3x_3 = 9, \\ -x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$ Оскільки у першому рівнянні відсутня змінна x_2, то поміняємо місцями перше і друге рівняння. При цьому одержимо трикутну систему $\begin{cases} -x_2 - 3x_3 = 6, \\ -3x_3 = 9. \end{cases}$, яку легко звести до стандартного вигляду, помноживши перше рівняння на (–1), а друге поділивши на (–3). Після цього можемо записати трикутну систему прямого ходу

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_2 + 3x_3 = -6, \\ x_3 = -3. \end{cases}$$

Для одержання розв'язку виконаємо обернений хід:

$x_3 = -3$, $x_2 = -6 - 3x_3 = -6 - 3 \cdot (-3) = 3$, $x_1 = -1 - 2x_2 - 3x_3 = -1 - 2 \cdot 3 - 3 \cdot (-3) = 2$.

Таким чином: $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -3$.

Приклад 6. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими за допомогою методу Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4 \end{cases}$$

Розв'язання.

Виключаємо невідому x_1 з другого і третього рівняння. Робимо елементарні перетворення – для цього спочатку перше рівняння помножимо на (–2) і додаємо до другого рівняння, потім перше рівняння помножимо на (–1) і додаємо до третього рівняння:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -6x_2 + 3x_3 = 3 \\ -2x_2 = -4 \end{cases}$$

Бачимо, що рівняння в такому вигляді можна розв'язувати оберненим ходом методу Гаусса. Для цього з останнього рівняння виразимо x_2:

$$x_2 = \frac{-4}{-2} = 2$$

Підставимо отримане значення в попереднє рівняння і знайдемо x_3:

$$-6 \cdot 2 + 3x_3 = 3$$

$$x_3 = 5$$

З першого рівняння знаходимо x_1:

$$x_1 + 2 - 5 = 0$$

$$x_1 = 3$$

Отже, розв'язок даної системи: $x_1 = 3, x_2 = 2, x_3 = 5.$

Зауваження. У випадках систем великих розмірів часто на практиці використовують іншу схему розв'язування. Замість перетворень над системою виконують відповідні перетворення над матрицею, складеною з коефіцієнтів при невідомих і стовпця вільних членів, який виокремлюють вертикальною лінією. Таку матрицю називають *розширеною матрицею системи*.

Приклад 7. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою методу Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

Розв'язання.

Виписуємо розширену матрицю даної системи:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Зведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень.

1. Поміняємо місцями перший і другий рядки.

2. Додамо до елементів другого, третього і четвертого рядків елементи першого рядка, помножені відповідно на –5; –3; –4.

3. Поміняємо місцями другий і третій рядки. Додамо до елементів третього і четвертого рядків елементи другого рядка, помножені відповідно на 4; 1.

4. Від четвертого рівняння помноженого на 11 віднімаємо третє рівняння помножене на –3.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 2 & -8 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -3 & -13 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 30 \end{array}\right)$$

Такій розширеній матриці відповідає наступна система рівнянь, зведена до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ -11x_3 - 9x_4 = 1 \\ 5x_4 = 30 \end{cases}$$

Знаходимо із четвертого рівняння невідому $x_4 = 6$. Підставляємо її у третє рівняння системи і знайдемо $x_3 = -5$. Далі підставимо у друге рівняння: $x_2 = -8$, і в перше рівняння: $x_1 = 7$.

Отже, розв’язок системи рівнянь наступний $x_1 = 7$; $x_2 = -8$; $x_3 = -5$; $x_4 = 6$.

Приклад 8. Розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь за допомогою правила Крамера та методу Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

Розв’язання.

I. Метод Крамера.

Задана неоднорідна система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими. Знаходимо визначник матриці коефіцієнтів при невідомих:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1\cdot1 + 2\cdot2\cdot1 + 3\cdot3\cdot3 - 1\cdot1\cdot3 - 3\cdot2\cdot2 - 1\cdot2\cdot3 = 12 \neq 0$$

Знайдений визначник відмінний від нуля, тобто задана система є сумісною, то вона має єдиний розв'язок. Далі обчислюємо визначники:

$$\Delta_{x1} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 12; \qquad \Delta_{x2} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -12; \qquad \Delta_{x3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 12.$$

Після цього знаходимо розв'язок даної системи за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x1}}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta_{x2}}{\Delta} = -\frac{12}{12} = -1,\ x_3 = \frac{\Delta_{x3}}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1.$$

II. Метод Гаусса. Складаємо розширену матрицю з коефіцієнтів системи рівнянь та виконаємо елементарні перетворення, тобто робимо нулі у першому стовпчику:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Звідси випливає

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = -2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

Отже, розв'язком даної системи буде (1; –1; 1).

Приклад 9. Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими за допомогою правила Крамера та методу Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 = 1 \end{cases}$$

Розв'язання.

1. Метод Крамера. Знайдемо визначник матриці:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & -6 & 2 \\ 2 & -3 & -11 \end{vmatrix} = 2\cdot(-6)\cdot(-11) + 4\cdot(-3)\cdot 5 + (-3)\cdot 2\cdot 2 - 5\cdot(-6)\cdot 2 - (-3)\cdot 2\cdot 2 - 4\cdot(-3)\cdot(-11) = 0$$

Оскільки визначник рівний нулю, то система лінійних алгебраїчних рівнянь має безліч розв'язків або не має їх взагалі.

2. Розв'яжемо дану систему методом Гаусса. Записуємо розширену матрицю і за допомогою елементарних перетворень зведемо її до трикутного (східчастого) вигляду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 4 & -6 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -11 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Оскільки, в розширеній матриці отримали нульовий рядок, то система лінійних алгебраїчних рівнянь має безліч розв'язків.

Завдання для самостійної роботи

1. Задані матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix};$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Знайти:

1) Розмір кожної з цих матриць;

2) Матриці $F = 2\cdot A + 3\cdot B$ та $R = 3\cdot A - B$;

3) Визначити, коли виконуються рівності: a) AX = C; b) AX = Y; c) BY = Z ?

4) За допомогою якої матриці можна представити матрицю Z через матрицю ***X,*** якщо ***Z = BY, Y = AX*** **?**

5) Обчислити $D^2 - H^2$ та (D – H)(D + H) і показати, що

$D^2 - H^2 \neq (D - H)(D+H)$.

2. Знайти добуток матриць **A·B** і **B·A.**

1) $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}4 & -4 & -1\end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\3 & -1 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix}3 & 4 & -1\\4 & -5 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}2 & -1\\-3 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 4 & 1\\-2 & 0 & 3 & -1\\1 & 3 & 4 & 2\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\3 & 1\\4 & -2\\-2 & 5\end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix}5 & 8 & -4\\6 & 9 & -5\\4 & 7 & -3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 5\\4 & -1 & 3\\9 & 6 & 5\end{pmatrix}$.

3. Обчислити визначники:

1) $\begin{vmatrix}2 & -4\\-1 & 5\end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix}2 & -3\\-1 & 5\end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix}2 & -3\\2 & -4\end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix}3 & -4\\2 & 5\end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix}1 & -3\\2 & 5\end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix}1 & -3\\3 & -4\end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & -1\end{vmatrix}$;

9) $\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\4 & 3 & 2\\1 & 4 & 3\end{vmatrix}$; 10) $\begin{vmatrix}5 & 1 & 6\\1 & 6 & 5\\6 & 5 & 1\end{vmatrix}$; 11 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\3 & 8 & 9\end{vmatrix}$; 12) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\4 & 9 & 16\\8 & 27 & 64\end{vmatrix}$;

13) $\begin{vmatrix}-5 & 8 & 4\\7 & 5 & 2\\5 & 3 & 7\end{vmatrix}$; 14) $\begin{vmatrix}9 & 7 & 5\\-7 & 5 & 3\\4 & 8 & -8\end{vmatrix}$; 15) $\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\-2 & 0 & 3\\1 & 3 & 4\end{vmatrix}$; 16) $\begin{vmatrix}-1 & 4 & 1\\0 & 3 & -1\\3 & 4 & 2\end{vmatrix}$;

17) $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\2 & 0 & 2 & 0\\3 & 1 & 4 & 5\\5 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}$; 18) $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\2 & 1 & 3 & 4\\4 & 1 & 9 & 16\\8 & 1 & 27 & 64\end{vmatrix}$; 19) $\begin{vmatrix}2 & 3 & 11 & 5\\1 & 1 & 5 & 2\\-3 & 1 & 3 & 2\\-3 & 1 & 3 & 4\end{vmatrix}$; 20) $\begin{vmatrix}2 & 2 & 11 & 5\\1 & 1 & 5 & 2\\2 & -3 & 3 & 2\\1 & -3 & 3 & 4\end{vmatrix}$;

21) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 11 & 2\\1 & 1 & 5 & 1\\1 & 2 & 3 & -3\\1 & 1 & 3 & -3\end{vmatrix}$; 22) $\begin{vmatrix}3 & 2 & 2 & 2\\9 & -8 & 5 & 10\\5 & -8 & 5 & 8\\6 & -5 & 4 & 7\end{vmatrix}$; 23) $\begin{vmatrix}6 & -5 & 8 & 4\\9 & 7 & 5 & 2\\7 & 5 & 3 & 7\\-4 & 8 & -8 & -3\end{vmatrix}$; 24) $\begin{vmatrix}8 & 1 & 1 & 1\\2 & 3 & 3 & 4\\4 & -2 & 9 & 16\\1 & 1 & 27 & 64\end{vmatrix}$.

4. Знайти обернену матрицю до заданої:

1) $\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\2 & 1 & 3\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\1 & 0 & -2\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}3 & 2\\-1 & 1\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

5. Розв’язати системи лінійних алгебраїчних рівнянь: матричним методом, методами Крамера та Гаусса.

№	Система рівнянь	№	Система рівнянь	№	Система рівнянь
1.	$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \\ x+3z=1 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=3 \end{cases}$	11.	$\begin{cases} 2x+3y+z=7 \\ -x+y+z=-8 \\ 3x+y+4z=3 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y-2z=1 \\ x+y+3z=2 \end{cases}$	7.	$\begin{cases} 5x+8y+z=2 \\ 3x-2y+6z=-7 \\ 2x+y-z=5 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 3x-2y-2z=-13 \\ y+4z=11 \\ 2x+y-5z=-11 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 3x+2y+2z=5 \\ x+3y+z=2 \\ 5x+3y+4z=9 \end{cases}$	13.	$\begin{cases} 3x+2y+z=8 \\ x+4y+5z=18 \\ 2y+z=2 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-3y-z=5 \\ x+y-z=7 \end{cases}$	9.	$\begin{cases} 3x+y+2z=-3 \\ 4x+3y-2z=12 \\ 8x+y-5z=6 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 2x+y+3z=5 \\ 4x+5y+2z=12 \\ 3x-z=-1 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 5x+3y+2z=1 \\ 4x+y+9z=23 \\ 2x+6z=16 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x+3y+2z=4 \\ 4x+5z=7 \\ 5x+2y+4z=7 \end{cases}$	15.	$\begin{cases} -x+2y+z=1 \\ y+5z=-1 \\ 6x+y-3z=-19 \end{cases}$

ПРЯМА ЛІНІЯ НА ПЛОЩИНІ

Різні види рівнянь прямої на площині

Різним способам задання прямої у прямокутній системі координат відповідають різні види її рівнянь:

1. $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – *рівняння прямої, яка проходить через задану точку* $M(x;\ y)\in l$ *перпендикулярно заданому вектору.*

2. $Ax+By+C=0$ – *загальне рівняння прямої.*

3. $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$ – *канонічне рівняння прямої.*

4. $y-y_0=k\cdot(x-x_0)$ – *рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямку.* Число $k=tg\alpha$ називається *кутовим коефіцієнтом прямої.*

5. $y=k\cdot x+b$ – *рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.*

6. $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – *рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки* $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$.

7. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ – *рівняння прямої у відрізках на осях.*

Розв’язування завдань

Приклад 1. Скласти рівняння прямої, якщо вона відтинає на осях координат відрізки довжиною відповідно 5 і –3 одиниць.

Розв’язання.

Скористаємося рівнянням прямої у відрізках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, підставивши замість a і b задані величини відрізків відповідно 5 і –3. Отримаємо

$$\frac{x}{5}-\frac{y}{3}=1$$

Приклад 2. Пряма задана загальним рівнянням: $3x-4y-8=0$.
Записати рівняння цієї прямої: а) з кутовим коефіцієнтом; б) у відрізках на осях.

Розв’язання.

а) Рівняння з кутовим коефіцієнтом має вигляд $y = kx + b$.

Отже, $3x - 4y - 8 = 0$;

$-4y = -3x + 8$;

$y = \frac{3}{4}x - 2; \quad k = \frac{3}{4}; \; b = -2.$

б) Рівняння у відрізках на осях має вигляд $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Щоб визначити величини відрізків, необхідно задане рівняння привести до вигляду рівняння у відрізках так, щоб у правій частині була одиниця. Перший доданок у чисельнику містив тільки *x*, а другий – тільки *y*.

$$3x - 4y - 8 = 0$$

$$3x - 4y = 8$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{4}{8}y = 1$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{2}y = 1$$

$$\frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{-2} = 1$$

Приклад 3. Загальне рівняння має вигляд $2x - y + 2 = 0$. Записати її рівняння: а) з кутовим коефіцієнтом; б) рівняння прямої, що проходить через дві точки (–1; 0) та (0; 2).

Розв'язання.

а) Запишемо рівняння з кутовим коефіцієнтом. Виразимо *y*:

$$y = 2x + 2$$

б) Рівняння прямої, що проходить через дві точки має вигляд

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x+1}{0+1} = \frac{y-0}{2-0} \qquad \frac{x+1}{1} = \frac{y}{2}$$

Приклад 4. Визначити величини відрізків, які відтинає пряма $4x - 5y - 8 = 0$ на осях координат.

Розв'язання.

Поділимо рівняння на 8 і перенесемо вільні члени в праву частину. Порівнявши отримане рівняння з рівнянням у відрізках на осях, знайдемо величини a і b.

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-\frac{8}{5}}=1; \qquad a=2; \quad b=-\frac{8}{5}.$$

Приклад 5. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(1; 2)$; $B(5;7)$ та записати його у загальному вигляді.

Розв'язання.

Підставимо координати точок у формулу прямої

$$\frac{x-1}{5-1}=\frac{y-2}{7-2} \qquad\qquad \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}$$

Запишемо його у загальному вигляді:

$$5(x-1)=4(y-2)$$

$$4y-5x-3=0$$

Приклад 6. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $K(3; -2)$ та точку перетину двох прямих $2x+5y-7=0$ і $3x+8y-12=0$.

Розв'язання.

Знайдемо точку перетину прямих, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x+5y-7=0 \\ 3x+8y-12=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x+5y=7 \\ 3x+8y=12 \end{cases}$$

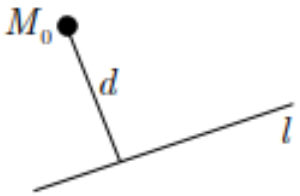
Координати точки перетину $O(-4; 3)$. Рівняння шуканої прямої знаходимо, підставивши координати точок K і O в рівняння прямої, що проходить через дві точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-3}{-4-3}=\frac{y+2}{3+2} \qquad\qquad \frac{x-3}{-7}=\frac{y+2}{5}$$

Отже, $5x+7y-1=0$.

Відстань від точки до прямої обчислюємо за формулою:



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

де $M_0(x_0\ ;\ y_0)$ – це координати точки, від якої обчислюється відстань, $Ax + By + C = 0$ – загальне рівняння прямої l, до якої обчислюється відстань.

Приклад 7. У трикутнику ABC задано рівняння сторони AB:

$$\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$$

і координати вершини $C(-2; -5)$. Знайти довжину висоти CN.

Розв'язання.

Перетворимо рівняння прямої до загального вигляду $3x - 4y - 12 = 0$

Знайдемо довжину висоти CN як відстань від точки C до прямої AB:

$$CN = \frac{|3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-5) + (-12)|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}$$

Умови паралельності та перпендикулярності двох прямих

Якщо дві прямі паралельні або співпадають, то їх кутові коефіцієнти рівні, тобто виконується умова:

$$k_2 = k_1.$$

І навпаки, якщо $k_2 = k_1$, то прямі паралельні.

Якщо прямі перпендикулярні, то виконується умова:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Приклад 8. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1; 3)$ та паралельна прямій $3x - 2y - 1 = 0$.

Розв'язання.

Зведемо рівняння прямої до рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$.

$$3x - 2y - 1 = 0$$

$$2y = 3x - 1$$

$$y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

Оскільки прямі паралельні, то їх кутові коефіцієнти рівні $k_1 = k_2 = \frac{3}{2}$.

Використаємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямку:

$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$.

Отримаємо рівняння шуканої прямої:

$y - 3 = \frac{3}{2}(x + 1);$ $\qquad$ $y = \frac{3}{2}x + \frac{9}{2}.$

Приклад 9. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3; -5)$ і нахилена під кутом 45^0 до осі абсцис.

Розв'язання.

Обчислимо кутовий коефіцієнт прямої $k = \text{tg}\, 45^0 = 1$.

Використаємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку A з кутовим коефіцієнтом k:

$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$.

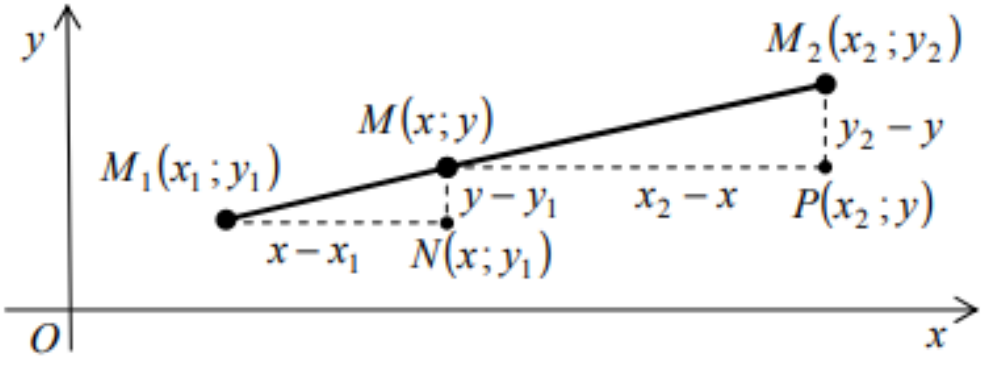
Отримаємо рівняння шуканої прямої:

$y + 5 = 1(x - 3);$ $\qquad$ $y = x - 8.$

Координати середини відрізка

Якщо точка M ділить відрізок M_1M_2 навпіл, то координати середини відрізка визначаються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



Приклад 10. Записати рівняння прямої, яка рівновіддалена від точок $A(2; 5)$ і $B(8; 11)$.

Розв'язання.

Рівновіддалена від двох точок, означає, що пряма проходить посередині відстані між A і B та перпендикулярна до вектора AB. Знайдемо координати середини $C(x; y)$ відрізка AB за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+8}{2} = 5; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5+11}{2} = 8$$

Отже, точка $C(5; 8)$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки A і B:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$\frac{x-2}{8-2} = \frac{y-5}{11-5} \qquad \frac{x-2}{6} = \frac{y-5}{6}$$

$$y = x + 3 \qquad (*)$$

Щоб записати рівняння шуканої прямої, використаємо умову перпендикулярності двох прямих

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}$$

Для прямої (*) кутовий коефіцієнт $k_1 = 1$, тоді $k_2 = -1$.

Запишемо рівняння прямої, що проходить через точку C і має $k_2 = -1$:

$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$.

Отримаємо рівняння шуканої прямої:

$y - 8 = -1(x - 5);$ $\qquad y = -x + 13.$

Гострий кут між двома прямими на площині обчислюється за формулою

$$tg\varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right|.$$

де k_1 і k_2 – кутові коефіцієнти прямих, які утворюють кут φ.

Приклад 11. У тупокутному трикутнику *ABC* задано рівняння сторін

AB: $y = -3x + 5$; *AC*: $y = 2x - 10$

і координати вершини *C*(2; –6). Знайти кут *A*.

Розв'язання.

Знайдемо гострий кут між прямими *AB* і *AC*, записавши відповідно кутові коефіцієнти кожної прямої:

$k_1 = -3$ і $k_2 = 2$.

Тоді згідно формули знаходження кута між прямими, отримаємо:

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2 \cdot (-3)}\right| = 1$$

Тоді, зовнішній кут $A = arctg1 = \frac{\pi}{4} = 45°$

Внутрішній кут $A = 180° - 45° = 135°$.

Приклад 12. У тупокутному трикутнику *ABC* задано рівняння сторін

AB: $y = -3x + 5$; *AC*: $y = 2x - 10$.

і координати вершини *C*(2; –6). Скласти рівняння середньої лінії *ML*, що паралельна стороні *AB*, якщо *M* – середина *AC*.

Розв'язання.

Знайдемо координати вершини *A* трикутника, розв'язавши систему, складену із рівнянь сторін *AB* і *AC*:

$$\begin{cases} y = -3x + 5 \\ y = 2x - 10 \end{cases}$$

A(3; –4). *M* – середина *AC*, тому

$$x_{\text{M}} = \frac{x_A + x_{\text{C}}}{2} = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2}; \quad y_{\text{M}} = \frac{y_A + y_{\text{C}}}{2} = \frac{-4 - 6}{2} = -5$$

Отже, $\text{M}\left(\frac{5}{2}; -5\right)$. З умови паралельності двох прямих маємо $ML||AB$: $k_1 = k_2 = -3$.

Використаємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку *M* з кутовим коефіцієнтом *k*:

$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$.

Отримаємо рівняння шуканої прямої:

$y + 5 = -3(x - \frac{5}{2})$; $y = -3x + \frac{5}{2}$.

Приклад 13. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $K(3; -2)$ та перпендикулярна до прямої $2x + 5y - 7 = 0$.

Розв'язання.

Зведемо рівняння прямої до рівняння з кутовим коефіцієнтом $y = kx + b$. Та застосуємо умову перпендикулярності двох прямих:

$$2x + 5y - 7 = 0$$

$$5y = -2x + 7$$

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5}$$

$$k_1 = -\frac{2}{5}$$

Тоді $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{2}$

Використаємо рівняння прямої, яка проходить через задану точку K з кутовим коефіцієнтом k:

$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$.

Отримаємо рівняння шуканої прямої:

$y + 2 = \frac{5}{2}(x - 3)$; $y = \frac{5}{2}x - \frac{19}{2}$.

Приклад 14. Трикутник ABC задано координатами вершин $A(-3; 4)$, $B(7; -2)$, $C(5; 6)$. Знайти: а) довжину медіани AM; б) точку E перетину медіан. Побудувати трикутник ABC в системі координат.

Розв'язання.

а) Знайдемо координати точки M – середина сторони BC:

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{7 + 5}{2} = 6; \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

точка $M(6; 2)$

Обчислимо відстань між двома точками (тобто довжину медіани) за формулою:

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(6 - (-3))^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{85}$$

б) За властивістю точки перетину медіан трикутника

$$\lambda = \frac{AE}{EM} = \frac{2}{1} = 2$$

Тоді знаходимо координати точки *E* за формулами:

$$x_{\mathrm{E}} = \frac{x_{\mathrm{A}} + \lambda x_{\mathrm{M}}}{1 + \lambda} = \frac{-3 + 2 \cdot 6}{1 + 2} = 3; \quad y_{\mathrm{E}} = \frac{y_{\mathrm{A}} + \lambda y_{\mathrm{M}}}{1 + \lambda} = \frac{4 + 2 \cdot 2}{1 + 2} = \frac{8}{3}$$

$$\mathrm{E}\left(3;\ \frac{8}{3}\right)$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(3;-1)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2;1)$.
2. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(1;-2)$:
   1) паралельно осі *OX*; 2) паралельно осі *OУ*; 3) під кутом $\alpha = 135°$.
3. Записати рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(3;1)$ і $M_2(5;4)$.
4. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(4;-1)$ і перпендикулярна до прямої $2x + 3y + 4 = 0$. Побудувати цю пряму.
5. Записати рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2;4)$ паралельно прямій $2x - 3y + 6 = 0$.
6. Знайти відстань між двома паралельними прямими (AB): $4x + 3y - 8 = 0$ і (CD): $4x + 3y - 33 = 0$.
7. Обчислити відстань між точками $M_1(-2;3)$, $M_2(-8;5)$ та відстань від точки M_1 до початку координат.
8. На осях координат знайти точки, рівновіддалені від точок $A(1;1)$ і $B(3;7)$.
9. Три послідовні вершини паралелограма мають координати $A(1;-3)$, $B(-1;1)$, $C(1;6)$. Знайти координати четвертої точки *D*.

10. Дано координати середин сторін трикутника $E(7;8)$, $F(-4;5)$, $K(1;-4)$. Визначити координати вершин трикутника.
11. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(3;-5)$, $B(-3;3)$, $C(-1;-2)$. Знайти координати середин сторін трикутника ABC.
12. Знайти координати точки перетину медіан трикутника, якщо вершинами його є точки $A(7;4)$, $B(-1;8)$, $C(-12;-1)$.
13. Визначити площу S та периметр P трикутника утвореного прямою $3x-4y-12=0$ і осями координат.
14. Обчислити величну кута між прямими:

    1) $y=3x$ і $y=-2x+5$; 2) $y=4x-7$ і $y=-\frac{x}{4}+2$; 3) $y=5x-3$ і $y=5x+8$.
15. Визначити величину кута між гіпотенузою, яка лежить на прямій $y=-\sqrt{3}x+1$, і катетом прямокутного трикутника, який лежить на прямій $y=\sqrt{3}x-5$.
16. Задані рівняння двох сторін прямокутника $2x-3y+5=0$, $3x+2y-7=0$ та одна з його вершин $A(2;-3)$. Скласти рівняння двох інших сторін даного прямокутника.
17. Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку $M(-1;8)$.
18. Дано вершини трикутника $A(1;-2)$, $B(5;4)$ і $C(-2;0)$. Записати рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.
19. Встановити, які з пар прямих паралельні, співпадають або перетинаються (в останньому випадку знайти їх точки перетину):

    1) $x+y-3=0$ і $2x+3y-8=0$; 2) $y=x+5$ і $2x-2y+3=0$; 3) $y=\frac{1}{2}x+2$ і $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}y=1$.
20. Знайти точку перетину прямих $4x+3y-5=0$ і $8x-5y+23=0$.
21. На прямій $2x+y-6=0$ знайти точку M, рівновіддалену від точок $A(3;5)$ і $B(2;6)$.
22. Знайти відстань від точки $M(-1;5)$ до прямої $4x+3y-5=0$.
23. Знайти відстань між паралельними прямими: $3x+4y-18=0$ та $3x+4y+43=0$.
24. Через точки $M_1(-1;2)$ і $M_2(2;3)$ побудували пряму. Знайти точки перетину цієї прямої з осями координат.
25. При яких значеннях параметра a, пряма $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$:

    1) паралельна осі OX; 2) паралельна осі OY; 3) проходить через початок координат.

26. Записати рівняння прямих на яких розміщені сторони трикутника ABC, знаючи координати вершини $A(1;3)$ та рівняння двох його медіан $y-1=0$ і $x-2y+1=0$.
27. Записати рівняння сторін трикутника ABC, якщо задано координати однієї із його вершин $B(-4;-5)$ і рівняння прямих, на яких лежать дві його висоти: $5x+3y-4=0$, $3x+8y+13=0$.
28. Залежність врожаю картоплі y (ц/га) від фотосинтетичного потенціалу x (%) задається прямою, що проходить через початок координат та точку $A(2;450)$. Запишіть рівняння залежності.
29. Для визначення калорійності молока використовують рівняння $y=107{,}2x+304{,}8$, де x – відсоток жиру в молоці, y – кількість кілокалорій на 1 кг молока. Побудуйте графік рівняння та знайдіть калорійність 1 кг молока при $x=3{,}6;\ 3{,}8;\ 4{,}0;\ 4{,}2$.
30. Маса y 1 м^3 сіна визначається при рівних умовах зберігання після укладки протягом часу x. Нехай через місяць після укладки 1 м^3 сіна важив 52 кг, а через три місяці – 62 кг. Припустимо, що на проміжку часу від 0 до 3 місяців залежність між x та y графічно задається прямою. 1) Запишіть рівняння цієї прямої і побудуйте її графік; 2) Визначте масу 1 м^3 сіна після 1,5; 2 та 2,5 місяців зберігання.

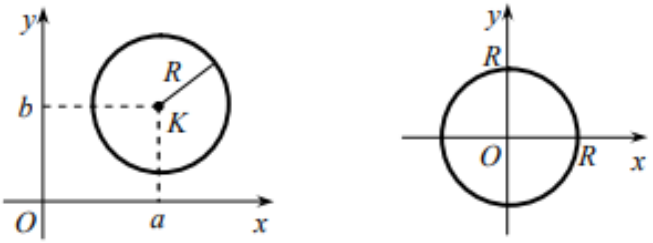
КРИВІ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Означення 1. *Коло* – це геометричне місце точок площини, які рівновіддалені від деякої точки, яка називається *центром кола*.

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (1)$$

де $O'(x_0;y_0)$ – центр кола, R – радіус кола.

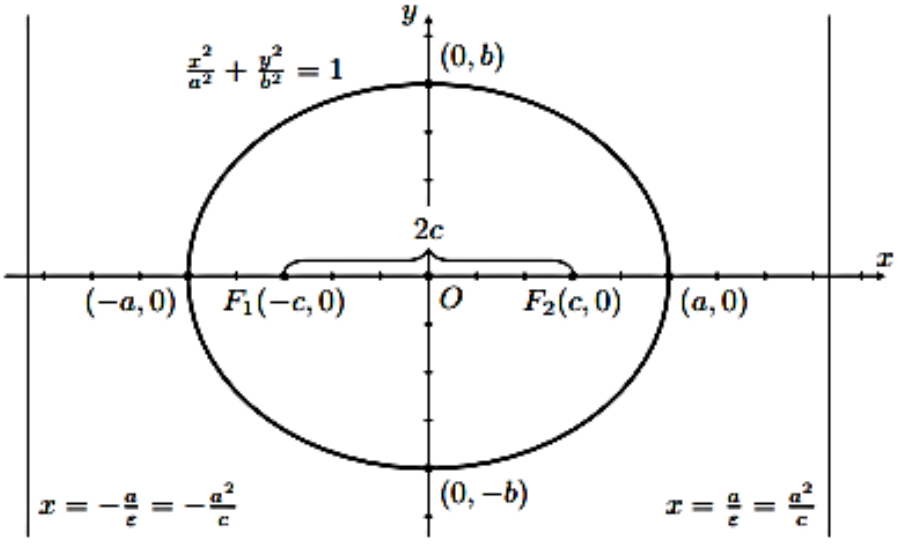
Якщо центр кола міститься в початку координат, тобто $x_0=y_0=0$, то рівняння (1) має вигляд $x^2+y^2=R^2$.

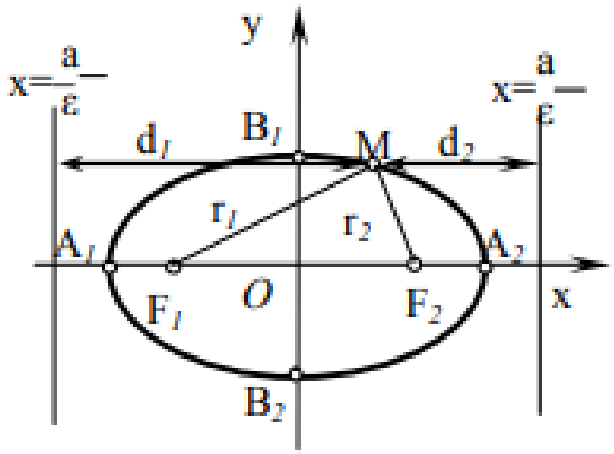


Означення 2. *Еліпс* – це геометричне місце точок площини, сума відстаней яких від двох фіксованих точок цієї площини, що називаються *фокусами*, є величина стала і більша від відстані між фокусами.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (2)$$

Рівняння (2) – *канонічне рівняння еліпса*, де $b^2=a^2-c^2$.



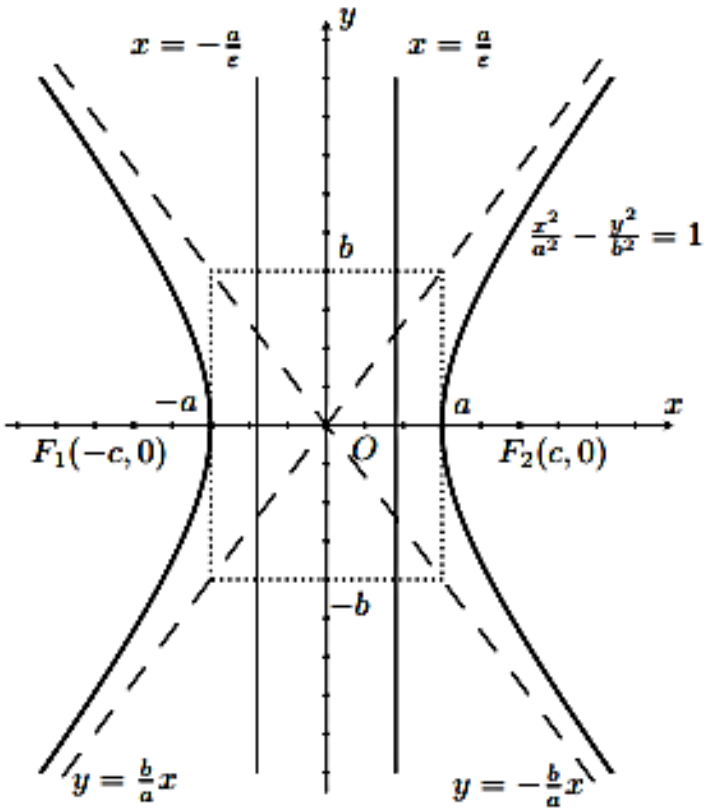


де $r_1 + r_2 = 2a$; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$. Для кола $\varepsilon = 0$, а для еліпса $0 < \varepsilon < 1$.

Означення 3. *Гіпербола* – це геометричне місце точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини, що називаються *фокусами*, є величиною сталою і меншою за відстань між фокусами.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (3)$$

Рівняння (3) – *канонічне рівняння гіперболи*, де $b^2 = c^2 - a^2$.

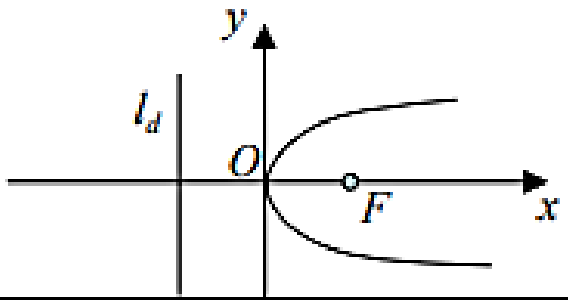
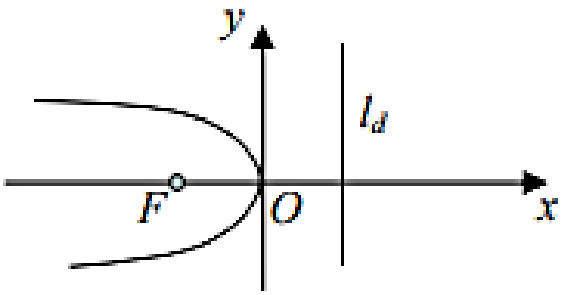
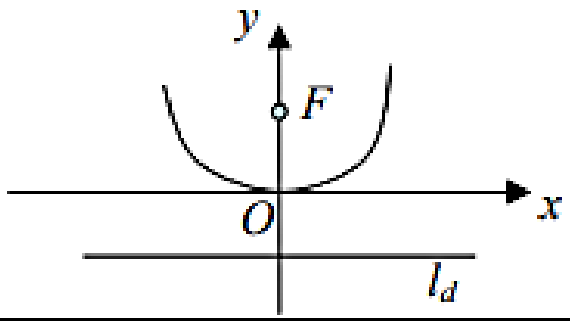
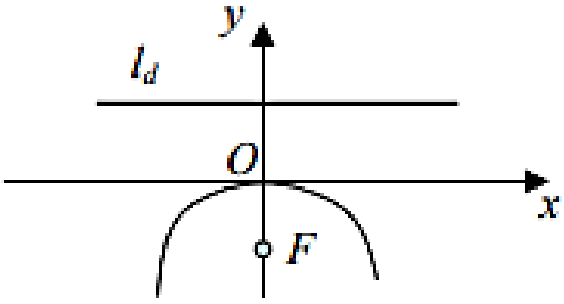


$|r_1 - r_2| = 2a$; $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$. Для гіперболи $\varepsilon > 1$.

Означення 4. *Парабола* – це геометричне місце точок площини, рівновіддалених від фіксованої точки F та фіксованої прямої d, що не проходить через точку F. Точка F називається *фокусом параболи,* а пряма d – *директрисою*.

$$y^2 = 2px. \tag{4}$$

Рівняння (4) – *канонічне рівняння параболи*.

$y^2 = 2px$		$l_d : x = -\frac{p}{2}$, $F\left(\frac{p}{2};0\right)$.
$y^2 = -2px$		$l_d : x = \frac{p}{2}$, $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$
$x^2 = 2py$		$l_d : y = -\frac{p}{2}$, $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$
$x^2 = -2py$		$l_d : y = \frac{p}{2}$, $F\left(0;-\frac{p}{2}\right)$

Розв'язування завдань

Приклад 1. Скласти рівняння кола, центр якого знаходиться у точці $A(3; 2)$, а точка $B(-1; 0)$ належить колу.

Розв'язання.

Рівняння кола має вигляд $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

Знайдемо радіус кола:

$$R = AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} = \sqrt{(-1-3)^2+(0-2)^2} = \sqrt{20}.$$

Отже, рівняння кола має вигляд $(x-3)^2+(y-2)^2=20$.

Приклад 2. Скласти рівняння лінії, кожна точка якої знаходиться на відстані від точки $A(3; 2)$, втричі більшій, ніж до точки $B(-1; 0)$.

Розв'язання.

Нехай $O(x; y)$ – точка, яка належить шуканій лінії.

За умовою задачі маємо: $|AO| = 3|BO|$. Оскільки

$$|AO| = \sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2}; \quad |BO| = \sqrt{(x+1)^2+y^2},$$

То, підставивши, отримаємо:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2+y^2}$$

Піднесемо обидві частини до квадрату і виділимо повні квадрати:

$$8x^2+24x+8y^2+y-4=0$$

$$x^2+3x+y^2+\frac{1}{8}y-\frac{1}{2}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{1}{16}\right)^2-\frac{1}{256}-\frac{1}{2}=0$$

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{16}\right)^2=\frac{705}{256}$$

Отримали рівняння кола з центром у точці $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{16}\right)$ і радіусом $R=\frac{\sqrt{705}}{16}$.

Приклад 3. Скласти рівняння кола l з діаметром AB, якщо відомі координати точок $A(2; -3)$, $B(-6; 1)$.

Розв'язання.

Центром кола є середина C діаметра AB, а радіус кола $R = \frac{AB}{2}$. Тоді

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2 + (-6)}{2} = -2; \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

$$C(-2; -1)$$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(2 - (-6))^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$R = 2\sqrt{5}$$

Рівняння кола має вигляд:

$$(x+2)^2 + (y+1)^2 = 20.$$

Приклад 4. Знайти центр і радіус кола та побудувати його

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0$$

Розв'язання.

Згрупуємо доданки із змінною x та змінною y і доповнимо одержані вирази до повних квадратів:

$$x^2 + 4x + y^2 - 6y - 23 = 0$$

$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 - 23 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 36$$

Отже, центр кола знаходиться у точці $(-2; 3)$, а радіус кола $R = 6$.

Приклад 5. Знайти параметри a, b, c і ε еліпса, заданого рівнянням $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Розв'язання.

Зведемо задане рівняння до канонічного вигляду $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

З одержаного рівняння маємо:

$a = 4, b = 3, \ c = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}, \varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Приклад 6. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо велика піввісь дорівнює 3, а фокус міститься у точці $F(\sqrt{5};0)$. Побудувати еліпс.

Розв'язання.

Канонічне рівняння еліпса має вигляд $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

За умовою задачі

$$a=3, \qquad c=\sqrt{5}$$

Для еліпса виконується рівність

$b^2=a^2-c^2$

Підставимо значення a і c, знайдемо величину b:

$b^2=a^2-c^2=3^2-\sqrt{5}^2=4$

Запишемо рівняння еліпса:

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Приклад 7. Скласти канонічне рівняння кола, яке проходить через фокуси еліпса $x^2+4y^2=4$ і має центр у верхній вершині еліпса.

Розв'язання.

Зведемо дане рівняння еліпса до канонічного вигляду

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$$

Відповідно $a=2,\ b=1$, знайдемо величину $b^2=a^2-c^2$;

$c^2=a^2-b^2=4-1=3;\ c=\sqrt{3}.$

Верхня вершина має координати А(0; 1).

Фокуси знаходяться у точках $F_1\left(-\sqrt{3};0\right);\ F_2(\sqrt{3};0).$

Оскільки радіус кола – це відстань від центра кола до точки, що знаходиться на колі, обчислимо радіус R кола за формулою відстані між двома точками:

$$R=|AF_1|=|AF_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{\left(\pm\sqrt{3}-0\right)^2+(0-1)^2}=\sqrt{4}$$

$$=2$$

Запишемо шукане рівняння кола:

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$(x-0)^2+(y-1)^2=2^2$

$x^2+(y-1)^2=4$.

Приклад 8. Довести, що рівняння

$$9x^2+100y^2-900=0$$

є рівнянням еліпса. Зобразити ескіз еліпса.

Розв'язання.

Зведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду:

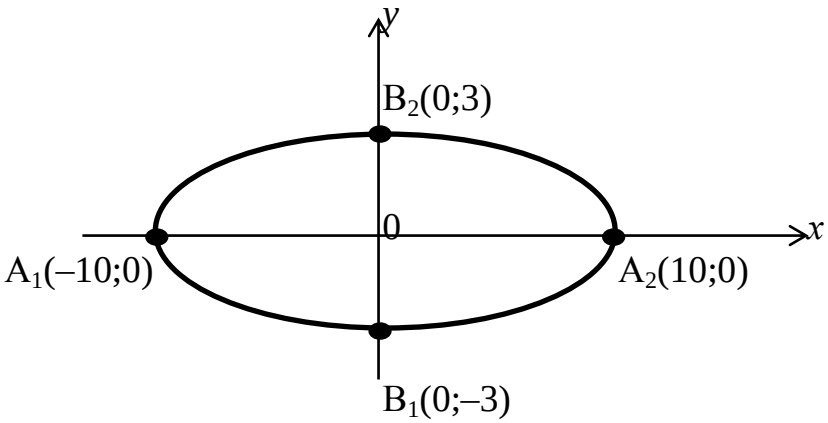
$$9x^2+100y^2=900$$

$$\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$$

Вершини еліпса знаходяться у точках

$$A_1(-10;0);\ A_2(10;0);\quad B_1(0;-3);\ B_2(0;3)$$



Приклад 9. Скласти канонічне рівняння еліпса, мала піввісь якого $b=4\sqrt{3}$, а лівий фокус знаходиться у точці $F_1(-4;0)$. Знайти його ексцентриситет і написати рівняння директрис.

Розв'язання.

За умовою задачі $b=4\sqrt{3},\ c=4$. Тоді

$$c^2=a^2-b^2;\ a^2=c^2+b^2=\left(4\sqrt{3}\right)^2+4^2=64;\quad a=8$$

Звідси, канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1,$$

ексцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$, рівняння директрис $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}=\pm\frac{8}{\frac{1}{2}}=\pm 16$.

Приклад 10. Скласти канонічне рівняння еліпса, фокуси якого розміщені на осі *OX* симетрично початку координат, якщо відстань між фокусами дорівнює 14, а ексцентриситет дорівнює $\frac{7}{9}$.

Розв'язання.

Оскільки $2c=4$; то $c=7$.

З формул $\varepsilon=\frac{c}{a}$ і $c^2=a^2-b^2$ отримаємо, що $a=9$ і $b^2=32$. Отже, шукане рівняння еліпса має вигляд:

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{32}=1.$$

Приклад 11. Скласти канонічне рівняння гіперболи, якщо її уявна піввісь дорівнює 2, а ексцентриситет $\varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$. Побудувати дану гіперболу.

Розв'язання.

За умовою задачі $b=2,\ \varepsilon=\frac{\sqrt{13}}{3}$. Тоді використовуючи формули $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $c^2=a^2+b^2$, отримаємо систему рівнянь:

$$\frac{\sqrt{13}}{3}=\frac{c}{a},$$
$$c^2=a^2+2^2.$$

Розв'язавши її, знайдемо $a=3,\ c=13$.

Отже, канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$$

Приклад 12. Скласти канонічне рівняння гіперболи, фокуси якої розміщені на осі *OX* симетрично початку координат, якщо дійсна вісь дорівнює 6, а ексцентриситет дорівнює $\varepsilon=\frac{5}{3}$.

Розв'язання.

Оскільки $2a = 6$; то $a = 3$.

Тоді використовуючи формули $\varepsilon = \frac{c}{a},\ c^2 = a^2 + b^2$, знаходимо, що $b = 4$.

Отже, канонічне рівняння гіперболи має вигляд:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Приклад 13. Дано рівняння гіперболи $12x^2 - 24y^2 - 144 = 0$. Визначити величини півосей, координати вершин, координати фокусів, ексцентриситет та записати рівняння асимптот.

Розв'язання.

Приведемо рівняння гіперболи до канонічного вигляду:

$$12x^2 - 24y^2 = 144$$

$$\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{6} = 1$$

$a^2 = 12;\ b^2 = 6,$ тоді півосі гіперболи: $a = \sqrt{12} = 2\sqrt{3};\ \ b = \sqrt{6}.$

Вершини гіперболи знаходяться у точках

$$A_1\left(-2\sqrt{3}; 0\right);\ A_2\left(2\sqrt{3}; 0\right);\quad B_1\left(0; -\sqrt{6}\right);\ B_2\left(0; \sqrt{6}\right)$$

Для знаходження координат фокусів, обчислимо *c*:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 6 = 18$$

Фокуси знаходяться у точках $F_1\left(-3\sqrt{2}; 0\right);\ \ F_2(3\sqrt{2}; 0).$

Знайдемо ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{12}} = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1.$

Запишемо рівняння асимптот у вигляді: $y = \pm\frac{b}{a}x.$

У нашому випадку: $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}x.$

Приклад 14. Обчислити ексцентриситет гіперболи, якщо її асимптотами є прямі $y = \pm 3x$.

Розв'язання.

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Рівняння асимптот гіперболи : $y = \pm\frac{b}{a}x$. Отже, $\frac{b}{a} = 3, \quad b = 3a.$

Ексцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Таким чином,

$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2+9a^2}}{a} = \sqrt{10}.$

Приклад 15. Скласти рівняння параболи, якщо рівняння її директриси $x = -5$.

Розв'язання.

Канонічне рівняння параболи у даному випадку має вигляд

$$y^2 = 2px$$

Рівняння її директриси $x = -\frac{p}{2}$. Отже, параметр параболи $p = 10.$

А рівняння параболи має вигляд $y^2 = 20x.$

Приклад 16. Знайти координати фокусів і рівняння директриси параболи, заданої рівнянням $y^2 = 8x$.

Розв'язання.

Даному рівнянню відповідає канонічне рівняння параболи

$$y^2 = 2px$$

для якого координати фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ і рівняння її директриси $x = -\frac{p}{2}$.

Отже, потрібно знайти величину p.

Знайдемо її з рівності: $2px = 8x, \ p = 4$. Підставивши отримане значення у формули, будемо мати: $F(2; 0), \ x = -2.$

Приклад 17. Скласти канонічне рівняння параболи симетричної відносно осі OX з вершиною в початку координат, що проходить через точку $C(-3; -9)$.

Розв'язання.

Оскільки парабола симетрична відносно осі *OX* і проходить через точку *C*(–3; –9), що належить четвертій чверті, то рівняння параболи має вигляд:

$$y^2 = -2px$$

Підставляємо в нього координати точки *C*, знайдемо величину *p*:

$$(-9)^2 = -2p \cdot (-3)$$

$$p = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

Отримаємо канонічне рівняння параболи $y^2 = -9x$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Записати рівняння кола з центром у точці $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ і з радіусом, що дорівнює 2. Побудувати це коло.
2. Записати рівняння кола що має центр у точці $(5; -7)$ і проходить через точку $(2; -3)$.
3. Записати рівняння кола, що проходить через точки $A(3;1)$, $B(-2;6)$ і $C(-5; -3)$.
4. Записати рівняння кола, центр якого знаходиться в точці $C(1; -1)$ і пряма $5x - 12y + 9 = 0$ є дотичною до кола.
5. Записати рівняння кола, яке дотикається до осей координат і проходить через точку $A(18; -9)$.
6. Записати канонічне рівняння еліпса, що проходить через точку $M(5;0)$, якщо фокальна відстань дорівнює 6.
7. Довести, що рівняння $36x^2 + 100y^2 = 3600$ є рівнянням еліпса. Знайти координати фокусів та фокальну відстань.
8. Записати рівняння еліпса, фокусами якого є точки $(-\sqrt{5}; 0)$ *і* $(\sqrt{5}; 0)$, а велика вісь дорівнює 6.
9. Визначити точки еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$, відстань від яких до правого фокуса дорівнює 14.
10. Записати рівняння еліпса з фокусами на осі *OX*, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, а ексцентриситет $\varepsilon = 0{,}6$.

11. Побудувати еліпси: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1,\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$ Для кожного еліпса обчислити ексцентриситет.

12. Знайти координати точок перетину еліпса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$ з прямою $x+2y-14=0$.

13. Яку лінію визначає рівняння $7x^2-9y^2=63$?

14. Дано асимптоти гіперболи $y=\pm\frac{1}{2}x$ і відстань між фокусами $2c=10$. Записати рівняння гіперболи.

15. Перевірити, чи точка $M\left(-5;\frac{9}{4}\right)$ лежить на гіперболі $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$, знайти її фокальні радіуси.

16. Записати рівняння гіперболи, фокус якої лежить на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо дано точку $M(-5;3)$, що лежить на гіперболі та її ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{2}$.

17. Знайти відстань від фокуса гіперболи $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ до її асимптот та кут між асимптотами.

18. На гіперболі $9x^2-16y^2=144$ знайти точку, відстань якої від лівого фокуса вдвічі менше, ніж від правого.

19. Задана рівностороння гіпербола $x^2-y^2=8$. Знайти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в фокусах гіперболи, якщо відомо, що еліпс проходить через точку $A(4;6)$.

20. Написати рівняння параболи: а) що проходить через точки $(0;0)$ та $(-1;2)$ і симетричної відносно осі OX; б) що проходить через точки $(0;0)$ та $(2;4)$ і симетричної відносно осі *OУ*.

21. На параболі $y^2=6x$ знайти точки, фокальні радіуси яких дорівнюють 4,5.

22. Визначити область розташування кривої $y=-\sqrt{-x}$. Побудувати криву.

23. Середній урожай люцерни в залежності від глибини зрошення x характеризується рівнянням $y=0.0028x^2+0.253x+3.520$, x – в см, y – ц/га. Побудувати криву урожайності на інтервалі $[0;30]$. Визначити за графіком, при яких значеннях x урожай буде найбільший на заданому інтервалі.

24. Залежність урожаю кукурудзи y від запасів продуктивної вологи x описується рівнянням $y=-0.006x^2+1.100x-4.200$. Побудувати криву на інтервалі $[0;100]$, за

допомогою якої визначити наближено, при якому значенні x урожайність дорівнює нулю і максимальна.

25. Залежність добового надою y (в літрах) від віку корів x (років) описується рівнянням $y = -9.53 + 6.86x - 0.49x^2$. Побудувати криву на інтервалі $[2;14]$. При якому віці корів надої найбільші?

26. Залежність приросту висоти рослини (паростків) грястиці збірної від початкової вологості до поливу в межах $25-60\%$ найменшої вологості ґрунту описується рівнянням $y = -215 + \frac{12940}{x}$, де x – в %, y – мм. Побудувати криву на інтервалі $[25;60]$.

27. Залежність приросту висоти рослини (паростків) конюшини червоної від початкової вологості ґрунту до поливу (у %) в межах від 35 до 60% найменшої вологості описується рівнянням $y = -240 + \frac{15500}{x}$. Побудувати криву на інтервалі $[25;60]$ разом із графіком попередньої задачі. Що росте швидше?

ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

1. Поняття множини

Множина – це сукупність деяких об'єктів, виділених за певною ознакою з інших об'єктів. Об'єкти, які утворюють множину, називають *елементами множини*.

Множини позначаються великими літерами латинської абетки: $A, B, C, \ldots, Y, Z$, а елементи, з яких складаються множини – малими: $a, b, c, \ldots, y, z$.

Якщо елемент x належить множині X, то записують $x \in X$, а якщо x не є елементом множини X, тоді записують $x \notin X$.

Універсальна множина (Ω) містить усі елементи розглядуваної задачі. *Порожня множина* ($\varnothing$) не містить жодного елемента з універсальної множини Ω. Наприклад, множина дійсних коренів рівняння $x^2+1=0$ є порожня множина.

Якщо множина складається з елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то використовується запис: $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$. Наприклад, запис $A = \{1; 5; 10\}$ означає, що множина A складається з трьох чисел: 1, 5 і 10.

Множина, що складається зі скінченої кількості елементів, називається *скінченою*, у протилежному випадку – *нескінченою*.

Нескінченими множинами є числові множини – це множини, елементами яких є числа. Прикладами *числових множин* є:

Множина натуральних чисел N – це множина $N = \{1; 2; \ldots; n; \ldots\}$.

Множина цілих чисел Z – це множина $Z = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots; \pm n; \ldots\}$.

Множина раціональних чисел Q – це множина $Q = \left\{ \frac{m}{n} : m \in Z, n \in N \right\}$.

Множина ірраціональних чисел I – це числа вигляду ($\pi = 3{,}1415926\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$; e=2,7182818...).

Множина дійсних чисел R – це множина раціональних та ірраціональних множин, тобто $R = Q \cup I$, де символ $\cup$ означає об'єднання елементів двох множин.

Між множинами N, Z, Q і R має місце співвідношення $N \subset Z \subset Q \subset R$. Тут символ $\subset$ означає "є підмножиною".

Дві множини рівні між собою, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто множини містять однакові елементи.

2. Числові проміжки. Окіл точки

Нехай a і b – дійсні числа, причому $a < b$. Підмножину $X \in R$, елементи якої задовольняють:

$X = \{x: a \le x \le b\}$, називають *відрізком* і позначають $[a; b]$;

$X = \{x: a < x < b\}$, називають *інтервалом* і позначають $(a; b)$;

$X = \{x: a \le x < b\}$ або $X = \{x: a < x \le b\}$, називають *піввідрізками* або *півінтервалами* і відповідно позначають $[a; b)$ або $(a; b]$.

Поряд із цим розглядають нескінчені інтервали або півінтервали:

$(-\infty; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$, а також нескінчені піввідрізки $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$.

Будь-який інтервал, який містить точку a, називається *околом точки a*.

Інтервал $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, тобто множина точок x таких, що $x \in (a-\varepsilon; a+\varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається *ε-околом точки a* (рис.1).

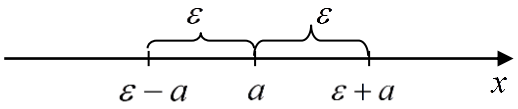


Рис. 1.

3. Числова послідовність

Означення 1. Якщо кожному натуральному числу $n \in N$ за певним правилом ставиться у відповідність число x_n, то множину чисел $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ називають ***числовою послідовністю*** (або ***послідовністю***) і позначають $\{x_n\}$.

Окремі числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ називають ***членами*** або ***елементами послідовності***: x_1 – перший член послідовності, x_2 – другий і т. д. x_n – n-ний, або ***загальний член послідовності***.

Числова послідовність – це функція натурального аргументу $x_n = f(n)$.

Означення 2. Якщо всі елементи послідовності $\{x_n\}$ дорівнюють одному й тому самому числу, то її називають ***сталою***.

Прикладами послідовностей є арифметична та геометрична прогресія.

Приклад 1. Написати перших п’ять членів послідовності заданої її загальним членом $\left\{x_n = \frac{1}{1+n^2}\right\}$.

Розв’язання. Підставляючи у формулу n-го члена послідовно числа 1,2,3,4,5 отримаємо $\left\{x_n = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{10}; \frac{1}{17}; \frac{1}{26}; \ldots\right\}$

Границя числової послідовності

Нехай змінна x_n приймає значення послідовності $\{x_n\}$.

Означення 3. Число x_0 називається ***границею послідовності*** $\{x_n\}$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - x_0| < \varepsilon$.

Якщо x_0 є границею послідовності $\{x_n\}$, то пишуть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ *або* $\lim x_n = x_0$, $n \to \infty$ і кажуть, що *послідовність* $\{x_n\}$ *має границю, яка дорівнює числу* x_0 або *прямує до* x_0.

Означення 4. Послідовність, яка має границю x_0, називається ***збіжною до*** x_0 (або просто збіжною). Послідовність, яка не є збіжною, називається ***розбіжною***.

Приклади. Знайти границі: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{2n+5}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+8n+7}{\sqrt{81n^4-5n^3+9}}$.

Розв'язання. а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-1}{2n+5} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\left(3-\dfrac{1}{n}\right)}{n\left(2+\dfrac{5}{n}\right)} = \dfrac{3}{2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+8n+7}{\sqrt{81n^4-5n^3+9}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2\left(1+8\dfrac{1}{n}+\dfrac{7}{n^2}\right)}{n^2\sqrt{\left(81-\dfrac{5}{n}+\dfrac{9}{n^4}\right)}} = \dfrac{1}{9}$.

4. Поняття функції. Область визначення та множина значень функції

Означення 1. Величина, числове значення якої при розглядуваних умовах не змінюється, називається *постійною*.

Означення 2. Величина, числове значення якої при розглядуваних умовах може змінюватись, називається *змінною***.**

Множина всіх значень змінної *x* утворює деяку числову множину значень змінної *X*.

Означення 3. Якщо кожному елементу *x* з множини *X* ($x \in X$) ставиться у відповідність певний елемент *y* з множини *Y* ($y \in Y$), *то говорять, що на множині X задано функцію y = f*(*x*).

Множина *X* називається *областю визначення* (або існування) функції і позначається $D(f)$, а множина *Y – областю значень функції* і позначається $E(f)$

При цьому *x* називається *незалежною змінною* (або *аргументом*), *y – залежною змінною* (або *функцією*), а буква *f* означає закон відповідності.

Якщо спеціально не обумовлено, то під областю визначення функції розуміють область допустимих значень незалежної змінної *x*, при яких функція $y = f(x)$ має зміст.

Означення 4. *Множиною значень функції* $y = f(x)$ називається сукупність усіх значень *y*, коли *x* змінюється в області визначення функції.

5. Способи задання функції

Існує декілька способів задання функції: аналітичний, табличний, графічний та мовний.

1) *Аналітичний спосіб* – якщо функція задана формулою у вигляді однієї або декількох рівностей, що зв'язують незалежну та залежну змінні.

Наприклад, *a*) $3x^2 - 4y^2 - 5 = 0$; *b*) $y = 2x^3 - 4$; *c*) $y = \begin{cases} 2x - 1, & x \le 0 \\ x + 4, & x > 0 \end{cases}$.

Якщо рівняння, що зв'язує аргумент *x* із функцією *y* не розв'язано відносно *y*, а задано у вигляді *F*(*x; y*)=0 (випадок а), то кажуть, що функцію *y* задано *неявно*.

2) *Табличний спосіб* полягає в тому, що функція задається таблицею, яка містить значення аргументу *x* і відповідні значення функції $y = f(x)$, наприклад,

x	0	0.5	1	1.5	2
y	1	1.75	2	2.5	3.5

3) *Графічний спосіб* полягає в зображені функціональної залежності за допомогою лінії, яку називають *графіком функції*.

Графічним способом задання функції широко користуються при дослідженнях, пов'язаних з такими приладами як барограф (для запису змін атмосферного тиску), електрокардіограф (для реєстрації електричних явищ, пов'язаних із серцевою діяльністю людини або тварини) та ін.

Слід зауважити, що не всяка крива в прямокутній системі координат *xOy* задає функцію $y = f(x)$. Функцією буде тільки така крива, яку кожна пряма, паралельна осі *Oy*, перетинає не більше ніж в одній точці (рис. 2).

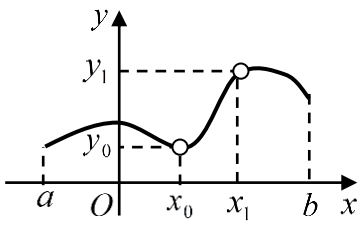


Рис. 2.

Графік функції $y = f(x)$ часто можна побудувати за допомогою перетворень (зсуву, розтягування) графіка деякої уже відомої функції.

Зокрема:

1. Графік функції $y = f(x - a)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ зсувом вздовж осі *Ox* на $|a|$ одиниць (вправо, якщо $a > 0$ і вліво, якщо $a < 0$).

2. Графік функції $y = f(x) + b$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ зсувом вздовж осі Oy на $|b|$ одиниць (уверх, якщо $b > 0$ і вниз, якщо $b < 0$).

3. Графік функції $y = f(kx)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ розтягуванням (стисненням) вздовж осі Oy в k раз, якщо $k > 1$ та $1/k$ раз, якщо $(k \in (0;1))$.

4. Графік функції $y = kf(x)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ стисненням (розтягуванням) вздовж осі Ox в k раз, якщо $k > 1$ та $1/k$ раз, якщо $(k \in (0;1))$.

5. Графік функції $y = f(-x)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ симетричним відображенням відносно осі Oy.

6. Графік функції $y = -f(x)$ одержується з графіка функції $y = f(x)$ симетричним відображенням відносно осі Ox.

6. Парність, непарність і періодичність функцій

Означення 1. Функція називається *парною*, якщо для довільного $x \in D(f)$ справедлива рівність $f(-x) = f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (див. рис. 3).

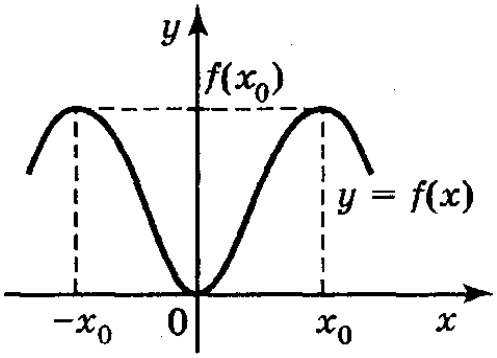


Рис. 3.

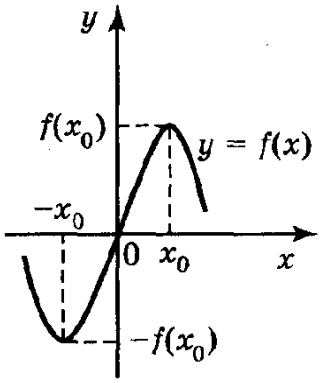


Рис. 4.

Означення 2. Функція називається *непарною*, якщо для довільного $x \in D(f)$ справедлива рівність $f(-x) = -f(x)$ (див. рис. 4).

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

Функція, яка є ні парною, ні непарною, називається *функцією загального вигляду*.

Означення 3. Функція називається *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що для всіх $x \in D(f)$ справджуються умови: $x + T \in D(f)$; $f(x + T) = f(x)$.

Число T називається *періодом* функції.

7. Основні елементарні функції та їх графіки

Основними елементарними функціями називаються такі функції:

1. Степенева функція $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.

2. Показникова функція $y = a^x,\ a > 0,\ a \neq 1$.

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x,\ a > 0,\ a \neq 1$.

Для логарифмічної функції справедливі формули:

а) $a^{\log_a x} = x$ – *основна логарифмічна тотожність*;

б) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ – перехід до іншої основи.

Для додатних u і v справедливі такі рівності:

а) $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$; б) $\log_a\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v$; в) $\log_a u^b = b \cdot \log_a u$.

Якщо $a = 10$, то функція $\log_{10} x = \lg x$ називається *десятковим логарифмом*. Якщо $a = e$, де $e = 2{,}71828...$ відоме ірраціональне число, $\log_e x = \ln x$ називається *натуральним логарифмом.*

4. Тригонометричні функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tg\ x$, $y = ctg\ x$.

5. Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctg\ x$, $y = arcctg\ x$.

Розв'язування завдань

Приклад 1. Знайти значення функції:

1) $f(x) = \dfrac{x+1}{x}$ у точках 1; –1; 5.

2) $f(x) = \sqrt{x-3}$ у точках 3; 12; 52.

Розв'язання.

1) $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2;\quad f(-1) = \frac{-1+1}{-1} = 0;\quad f(5) = \frac{5+1}{5} = 1{,}2.$

2) $f(3) = \sqrt{3-3} = 0;\quad f(12) = \sqrt{12-3} = 3;\quad f(52) = \sqrt{52-3} = 7.$

Приклад 2. Знайти область визначення функції:

1) $y = \frac{x-2}{x+1}$; 2) $y = \sqrt{x-2}$.

Розв'язання.

1) Оскільки знаменник дробу не може дорівнювати нулю, то областю визначення функції є множина усіх значень x, для яких $x + 1 \neq 0$, тобто $x \neq -1$. Отже, $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2) Оскільки підкореневий вираз має бути невід'ємним, то областю визначення функції є множина всіх тих значень x, для яких $x-2 \geq 0$, тобто $x \geq 2$. Отже, $D(y) = [2; +\infty)$.

Приклад 3. Знайдіть область визначення функції:

а) $y = x^2 + x^3$; б) $y = \frac{x+2}{x-3}$; в) $y = \frac{x^3+1}{x(x+2)}$; г) $y = \frac{x+6}{x^2-5x+4}$; д) $y = \sqrt{x+6}$.

Відповідь*:*

а) $D(y) = R$; б) $D(y) = (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$; в) $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$; г) $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; 4) \cup (4; +\infty)$; д) $D(y) = [-6; +\infty)$.

Приклад 4. Знайти область значень $E(y)$ функції :

а) $y = \sqrt{x^2+4}$; б) $y = \sqrt{x^2+4} - 1$.

Розв'язання.

а) Знайдемо функцію обернену до даної. Для цього виразимо змінну x через y, піднесемо ліву і праву частину функції до квадрату: $y^2 = x^2 + 4$;

$x^2 = y^2 - 4$;

$x = \sqrt{y^2-4}$; підкореневий вираз має бути невід'ємним, з умови $y > 0$, тому $y^2 - 4 > 0$. Отже, $E(y) = [2; +\infty)$.

б) аналогічно розв'язуємо даний приклад і знаходимо, що $E(y) = [1; +\infty)$.

Приклад 5. Функцію задано формулою $y = \frac{x+3}{x-5}$.

1) Знайти значення функції для $x = 4$.

2) Порівняти $y(0)$ і $y(1)$.

3) Знайти, при якому значенні аргументу значення функції дорівнює 0.

Розв'язання.

1) $y(4) = \frac{4+3}{4-5} = \frac{7}{-1} = -7$.

2) Оскільки $y(0) = \frac{0+3}{0-5} = -0{,}6$, а $y(1) = \frac{1+3}{1-5} = -1$, то $y(0) > y(1)$.

3) Оскільки $y = 0$, маємо рівняння $\frac{x+3}{x-5} = 0$, звідки $x = -3$.

Приклад 6. Формула описує зміну температури води у баку (p°C) залежно від часу t (у хв.)

$$p(t) = \begin{cases} 2t + 20, & \text{якщо } 0 \le t < 40 \\ 100, & \text{якщо } 40 \le t < 50 \\ -0{,}8t + 140, & \text{якщо } 50 \le t \le 120 \end{cases}$$

Знайти: 1) p(10); 2) p(45); 3) p(80).

Розв'язання.

1) Оскільки $0 < 10 < 40$, то $p(10)$ обчислюємо за формулою $p(t) = 2t + 20$. Отже, $p(10) = 2*10 + 20 = 40$.

2) Оскільки $40 < 45 < 50$, то $p(45) = 100$.

3) Оскільки $50 < 80 < 120$, то $p(80) = -0{,}8*80+140 = 76$.

Приклад 7. Дослідити чи функція $f(x) = x^4 + x^2$ є парною?

Оскільки $D(f) = R$ *і* $f(-x) = (-x)^4 + (-x)^2 = x^4 + x^2 = f(x)$, функція парна.

Приклад 8. Чи є парною функція $f(x) = x^2 + x$?

Оскільки $D(f) = R$, але $f(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x \neq f(x)$, то функція не є парною.

Приклад 9. Дослідити чи функція $f(x) = x^3 - x^5$ є непарною?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x^5 = -(x^3 - x^5) = -f(x)$, функція непарна.

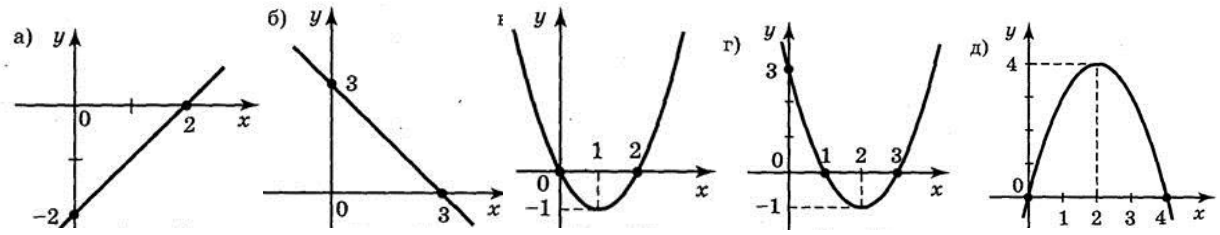
Приклад 10. Чи непарна функція $f(x) = x^3 - x^2$?

Оскільки $D(f) = R$ і $f(-x) = (-x)^3 - (-x)^2 = -x^3 - x^2 = -(x^3 + x^2) \neq f(x) = -x^3 + x^2$, функція не є непарною.

Приклад 11. Побудуйте графіки функцій

а) $y = x - 2$; б) $y = 3 - x$; в) $y = x^2 - 2x$; г) $y = x^2 - 4x + 3$; д) $y = 4x - x^2$

Відповідь:

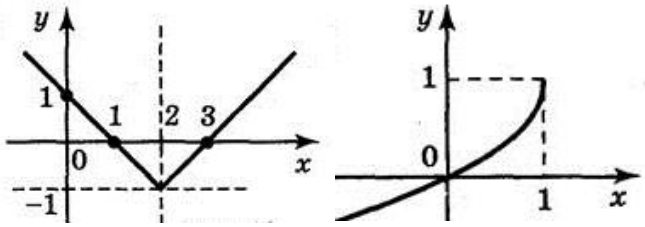


Приклад 12. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = |x - 2| - 1$; б) $y = 1 - \sqrt{1 - x}$;

Відповідь:

а) б)



Завдання для самостійної роботи:

1. Дано функцію $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Знайти:

1) $f(-1)$; 2) $f(0)$; 3) $f\left(\frac{1}{2}\right)$; 4) $f(1)$; 5) $f(2)$.

2. Дано функції $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $\varphi(x) = \frac{|x-1|}{x+2}$. Знайти:

1) $f(0)$; 2) $f(-1)$; 3) $f(1)$; 4) $f(2)$; 5) $\varphi(0)$; 6) $\varphi(1)$; 7) $\varphi(2)$; 8) $\varphi(-1)$.

3. Дано функцію $\varphi(t) = t^2 + 2$. Знайти:

1) $\varphi(2)$; 2) $\varphi(a)$; 3) $\varphi\left(\frac{1}{a}\right)$; 4) $\varphi(a+1)$; 5) $\varphi(a^2-1)$.

4. Дано функцію $g(x)=\frac{2-x}{2+x}$. Знайти: 1) $g(-1)$; 2) $g(x)=-5$.

5. Знайдіть область визначення функцій:

1) $f(x)=x-2$; 2) $f(x)=\frac{2-x}{3}$; 3) $f(x)=\frac{3}{2-x}$; 4) $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$; 5) $f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}$;

6) $f(x)=\sqrt{x+3}$; 7) $y=1+2x$; 8) $y=\sqrt{2x+3}$; 9) $y=\frac{x}{x-1}$; 10) $y=\sqrt{x^2+1}$,

11) $y=\ln(x+5)$; 12) $y=\frac{1}{x^2+2}$; 13) $y=\frac{1}{x^2-3}$; 14) $y=\sqrt{-x}+\sqrt{4+x}$;

15) $y=\frac{1}{1-x}+\sqrt{x^2-1}$; 16) $y=\log_2(-x)$; 17) $y=\frac{1}{x^2-5x+6}$; 18) $y=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$,

19) $y=\ln\sqrt{1-x}$; 20) $y=\frac{1+x^2}{4-x^2}$; 21) $y=\sqrt{x}-\lg_2(2x-3)$.

6. На малюнках функції задано графіками. Для кожної з них встановіть?

1) область визначення; 2) область значень;

3) координати точок перетину з осями координат.

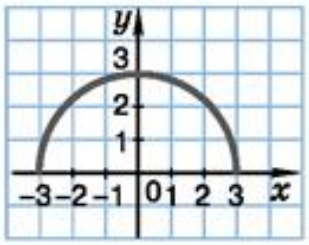


Рис.1

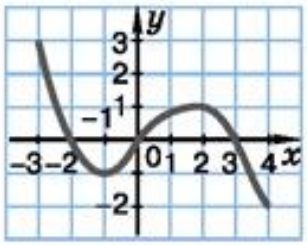


Рис. 2

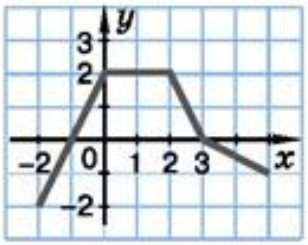


Рис. 3

7. Дано функцію

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4, \text{якщо } x<1,\\ x-3, \text{якщо } x\geq 1\end{cases}.$$

Знайти $f(-2)$; $f(0)$; $f(3)$.

8. Знайдіть множину значень функції:

1) $f(x)=x^2$; 2) $f(x)=x^2-3$; 3) $f(x)=x^2+4$; 4) $f(x)=\sqrt{x}$;

5) $f(x)=\sqrt{x}-2$; 6) $f(x)=\sqrt{x}+3$; 7) $f(x)=|x|$; 8) $f(x)=|x|+5$.

9. Дослідити на парність та непарність функції:

1) $y=x^4-x$, 2) $y=x^3-3x^2$, 3) $y=x^4+2x^2$, 4) $y=\sqrt{x^2+1}$.

10. Побудувати графіки функцій:

1) $y=-2x^2$, 2) $y=-2(x-3)^2$, 3) $y=-2(x+2)^2+1$, 4) $y=-2x^2+5x-2$, 5) $y=\frac{3}{x}$,

6) $y=-\frac{3}{x}$, 7) $y=\frac{3}{x-1}$, 8) $y=\frac{3}{x-1}-2$.

11. Рівняння $y(x)=1{,}114\cdot x^2$ визначає кількість людей, які захворіли під час епідемії протягом дня на 10 тис. населення. а) Визначити на основі даної аналітичної залежності кількість захворівши на 10 тис. населення на другий, третій, п'ятий, восьмий, 11-й та 15-й день від початку розвитку епідемії. б) Визначити у який день кількість захворівши на 10 тис. населення перевищить поріг 1000 чоловік/день.

12. Після викиду отруйної речовини її концентрація (мл/л) у воді змінювалася згідно рівняння $y(t) = -0{,}04t^3 + 0{,}8t^2 - 5{,}3t + 12{,}5$, де t – час (години). Визначити концентрацію речовини через годину, 3 години, 5 годин, 8 годин та 10 годин з моменту викиду речовини. Отримані значення записати у наступну таблицю:

Час з моменту викиду (год.)	1	3	5	8	10
Концентрація речовини (мг/л)					

13. Побудувати графіки функцій, користуючись перетвореннями графіків основних елементарних функцій:

1) $y = -2x^2$; 2) $y = -2(x-3)^2$; 3) $y = -2(x+2)^2 + 1$; 4) $y = 1 - 2x$; 5) $y = \left|2 - x^2\right|$; 6) $y = -\frac{3}{x}$

7) $y = -(x+1)^3$; 8) $y = \frac{3}{x-1}$; 9) $y = \frac{3}{x-1} - 2$; 10) $y = \ln(x-5)$; 11) $y = 2^{x-1}$; 12) $y = \frac{3}{x}$

13) $y = 3^{-x} + 1$; 14) $y = \left|\log_5 x\right|$; 15) $y = \log_2(x+2) - 1$; 16) $y = 1 + \sin x$.

14. Знайти координати вершини параболи та побудувати її графік:

1) $y = x^2 - 2x + 5$, 2) $y = -0{,}05x^2 + 40x - 200$;

3) $y = 3x^2 - 120x + 250$, 4) $y = -x^2 + 10x + 12$.

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Границя змінної величини. Стале число a є границею змінної величини x, якщо для кожного наперед заданого довільно малого числа $\varepsilon > 0$ можна вказати таке значення змінної x, що всі наступні значення змінної будуть задовольняти нерівність $|x - a| < \varepsilon$.

Якщо число a є границею змінної величини x, то кажуть, що x прямує до границі a, і пишуть $x \to a$ або $\lim x = a$.

Якщо порівняти означення границі послідовності й границі змінної, то в означенні границі послідовності йдеться про номер n того члена послідовності $\{f_n\}$, починаючи з якого виконується нерівність $|f_n - a| < \varepsilon$, а в означенні границі змінної x йдеться про числове значення цієї змінної, починаючи з якого виконується нерівність $|x - a| < \varepsilon$.

Границя функції в точці

Нехай функція $y = f(x)$ задана в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0.

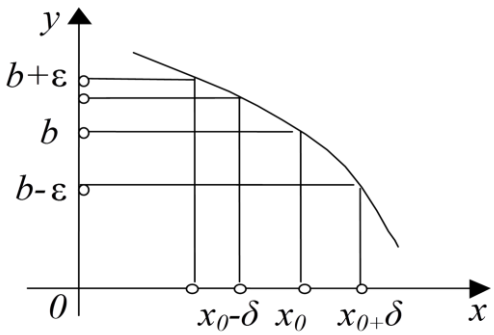


Рис. 1

Означення. *Число b* називається *границею функції* $y = f(x)$ при *x,* що прямує до x_0 (або в точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ (як завгодно малого), знайдеться таке додатне число $\delta = \delta(\varepsilon)$, що для всіх *x,* таких, що $|x - x_0| < \delta$ виконується нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Коротко це означення записують так $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$.

На рис. 1 показано геометричну інтерпретацію границі функції в точці: число *b* є границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$, якщо для довільного ε-околу точки *b* знайдеться δ-окіл точки x_0, такий, що коли значення аргументу *x* взяти з множини $(x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$, то відповідні значення функції $f(x)$ лежатимуть в ε-околі точки *b*.

Основні теореми про границі функції

У наведених раніше прикладах ми бачили, що знаходження границі функції на основі означення границі досить громіздке. Наведемо теореми, які значно полегшують знаходження границі функції.

Теорема 1 (про границю суми, різниці, добутку і частки). *Якщо кожна із функцій* $f(x)$ *та* $g(x)$ *має скінчену границю при* $x \to x_0$ *або при* $x \to \infty$, *то*

при $x \to x_0 (\infty)$*, існують також границі функцій* $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

(остання за умови, що $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} g(x) \neq 0$*) і справедливі формули*:

1) $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} g(x)$,

2) $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} g(x)$,

3) $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} g(x)}$.

Наслідки. *Якщо* $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} f(x)$ *існує, то виконуються рівності*:

1) $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} (Cf(x)) = C \cdot \lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} f(x)$, де C – стала;

2) $\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} \left(f(x)\right)^n = \left(\lim\limits_{x \to x_0 (\infty)} f(x) \right)^n$, n – натуральне число.

Приклад 1. Знайти границю функції $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x - 3}{x^3 - 2x}$ у будь-якій точці x_0, де знаменник не дорівнює нулю.

Розв'язання. Згідно з теоремою 1 та наслідків до неї, маємо:

$$\lim_{x \to x_0} (x^2 + 5x - 3) = \lim_{x \to x_0} x^2 + \lim_{x \to x_0} 5x - \lim_{x \to x_0} 3 = x_0^2 + 5x_0 - 3,$$

$$\lim_{x \to x_0} (x^3 - 2x) = \lim_{x \to x_0} x^3 - \lim_{x \to x_0} 2x = x_0^3 - 2x_0,$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 + 5x - 3}{x^3 - 2x} = \lim_{x \to x_0} \frac{x_0^2 + 5x_0 - 3}{x_0^3 - 2x_0} = f(x_0).$$

Зокрема, при $x_0 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5x - 3}{x^3 - 2x} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1^2 + 5 \cdot 1 - 3}{1^3 - 2 \cdot 1} = -1$.

Розкриття деяких невизначеностей

Як бачимо з прикладу, у найпростіших випадках знаходження границі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ зводиться до підстановки у функцію граничного значення аргументу x_0. Але часто така підстановка приводить до невизначених виразів. Це такого типу вирази:

1) відношення двох нескінченно малих величин – це невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$;

2) відношення двох нескінченно великих величин – це невизначеність вигляду $\frac{\infty}{\infty}$;

3) різниця двох нескінченно великих величин – це невизначеність вигляду $\infty-\infty$ та інші.

Операцію знаходження границі у цих випадках називають розкриттям невизначеності.

Розглянемо деякі окремі випадки.

1. *Невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$, задана відношенням двох многочленів*

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-5x^2+4x}{x^2-7x+6}$.

Розв'язування. Маємо:

границя чисельника $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-5x^2+4x\right)=1^3-5\cdot 1^2+4\cdot 1=0$,

границя знаменника $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-7x+6\right)=1^2-7\cdot 1+6=0$,

тому застосувати теорему про границю частки не можна, оскільки маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Щоб розкрити дану невизначеність, застосуємо загальний прийом; розкладемо чисельник і знаменник на множники, серед яких обов'язково буде множник (x–1):

$$x^3-5x^2+4x=x(x-1)(x-4),\ \ x^2-7x+6=(x-1)(x-6).$$

Підставивши, одержані розклади в границю дістанемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-5x^2+4x}{x^2-7x+6}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-6)}=\lim_{x\to 1}\frac{x(x-4)}{(x-6)}=\frac{-3}{-5}=\frac{3}{5}.$$

2. *Невизначеність вигляду $\frac{0}{0}$, задана ірраціональними виразами*

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}$.

Розв'язування. При $x=2$ маємо невизначеність $\frac{0}{0}$, отже $x-2$ – критичний множник. Позбудемося ірраціональності в чисельнику. Маємо

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2x^2+1}-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{2x^2+1}-3\right)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(2x^2+1-9\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{2\left(x^2-4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)\left(\sqrt{2x^2+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{2(x+2)}{\sqrt{2x^2+1}+3}=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}.$$

3. ***Невизначеність вигляду*** $\frac{\infty}{\infty}$***, задана відношенням двох многочленів***

Нехай потрібно знайти границю дробово-раціональної функції

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_{m-1}x+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_{n-1}x+b_n}.$$

Розглянемо такі випадки:

1) Нехай $m<n$, тоді, розділивши чисельник і знаменник на x^m, знаходимо

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{a_m}{x^m}}{b_0x^{n-m}+b_1x^{n-m-1}+\ldots+\frac{b_{n-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_n}{x^m}}.$$

Якщо тепер перейти до границі у кожному доданку чисельника і знаменника, то у чисельнику дістанемо число a_0, а у знаменнику – нескінченність. Відношення скінченого числа до нескінченної величини є нескінченно мала величина, тобто $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$.

2) Нехай $m=n$, тоді, розділивши чисельник і знаменник на $x^m=x^n$, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+\frac{a_1}{x}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{a_m}{x^m}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_{m-1}}{x^{m-1}}+\frac{b_m}{x^m}}=\frac{a_0}{b_0}.$$

3) Нехай $m>n$, тоді, розділивши чисельник і знаменник на x^n, знаходимо

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^{m-n}+a_1x^{m-n-1}+\ldots+\frac{a_{m-1}}{x^{n-1}}+\frac{a_m}{x^n}}{b_0+\frac{b_1}{x}+\ldots+\frac{b_{n-1}}{x^{n-1}}+\frac{b_n}{x^n}}.$$

Якщо тепер перейти до границі у кожному доданку чисельника і знаменника, то у чисельнику дістанемо нескінченність, а у знаменнику – число b_0. Таке відношення дає нескінченно велику величину, тобто $\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

Отже,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n} = \begin{cases} 0, & якщо \quad m < n \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & якщо \quad m = n \\ \infty, & якщо \quad m > n \end{cases}.$$

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 4x}{5x^3 - 7x + 6}$.

*Розв'язання***.** Маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$. Поділимо чисельник і знаменник дробу на x^3.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 4x}{5x^3 - 7x + 6} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{5}{x} + \frac{4}{x^2}}{5 - \frac{7}{x^2} + \frac{6}{x^3}} = \frac{2}{5}.$$

Дві важливі (чудові) границі

Перша важлива границя: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = 1$, при $a \neq 0$.

Розв'язання. Зведемо розглядувану границю до першої важливої границі, помноживши та поділивши дріб на a та ввівши позначення $a \cdot x = y$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{a \cdot \sin ax}{a \cdot x} = a \cdot \lim_{a\cdot x\to 0} \frac{\sin ax}{a \cdot x} = a \cdot \lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = a \cdot 1 = a.$$

Друга важлива границя $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e.$

Доведено, що e – ірраціональне число і не є коренем ніякого алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами. Його наближене значення з точністю до 10^{-15} дорівнює 2,718281828459045.

При обчисленні границь, пов'язаних з числом e, часто застосовують таке твердження: якщо існують границі $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, причому $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) > 0$, то існує також границя $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}$, яка обчислюється за формулою

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)} = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)}.$$

Розв'язування завдань

Границя функції. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на множині *D*(*f*). Число *A* називають границею функції $y = f(x)$ в точці x_0, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для всіх $x \epsilon D(f)$, які задовільнять нерівність $|x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$. Записують: $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$.

Приклад 1. Знайти границю $\lim_{x \to 6} \frac{4x^2-1}{2x-1}$.

Розв'язання. $\lim_{x \to 6} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \lim_{x \to 6} \frac{4 \cdot 36-1}{2 \cdot 6-1} = 13.$

Приклад 2. Знайти границю $\lim_{x \to 0,5} \frac{4x^2-1}{2x-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \to 0,5} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 0,5} \frac{(2x-1)(2x+1)}{2x-1} = \lim_{x \to 0,5} (2x+1) = 2 \cdot 0,5 + 1 == 2$$

Приклад 3. Знайти границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0.$

Приклад 4. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 2} (5x^2 - 13x + 5)$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 2} (5x^2 - 13x + 5) = 5 \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + 5 = -1.$

Приклад 5. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{2x-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x+1}{2x-1} = \frac{1+1}{2 \cdot 1-1} = 2.$

Приклад 6. Знайти границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Розділимо чисельник і знаменник на *x* у найвищому степені:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3+2x+5}{3x^3+x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+\frac{2}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = \frac{1+0+0}{3+0+0} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 7. Знайти границю $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+1}{3x^2+5}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+1}{3x^2+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{5}{x^2}} = \frac{0+0}{3+0} = 0.$

Приклад 8. Знайти границю $\lim\limits_{x \to 0,5} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

$\lim\limits_{x \to 0,5} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \frac{8 \cdot 0,5^3-1}{6 \cdot 0,5^2-5 \cdot 0,5+1} = \frac{0}{0}$;

Розкладемо на множники чисельник і знаменник:

$8x^3 - 1 = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1);$

$6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{1}{3}\right) = (2x - 1)(3x - 1).$

Звідси

$$\lim_{x\to 0,5} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1} = \lim_{x\to 0,5} \frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{(2x-1)(3x-1)} = \lim_{x\to 0,5} \frac{(4x^2+2x+1)}{(3x-1)} = \frac{4\cdot 0,5^2+2\cdot 0,5+1}{3\cdot 0,5-1} = \frac{3}{0,5} = 6$$

Приклад 9. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$.

Домножимо чисельник і знаменник функції на спряжений вираз до чисельника:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x^2-1}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x\cdot\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)} = \frac{0}{2} = 0$$

Приклад 10. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\infty - \infty$.

Домножимо чисельник і знаменник функції на спряжений вираз до чисельника:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right) = \infty - \infty = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-x^2}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right)} = \frac{\infty}{\infty} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}+\frac{x}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = 1$$

Приклад 11. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sin3x}{x}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу першої важливої границі $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3sin3x}{3x} = 3\lim_{x\to 0} \frac{sin3x}{3x} = 3\cdot 1 = 3$$

Приклад 12. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \frac{tgx}{x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 0} \frac{tgx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{cosx\cdot x} = \lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{cosx} = 1\cdot \frac{1}{cos0} = 1$$

Приклад 13. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}$.

Розв'язання. Застосуємо тригонометричну формулу $sin^2x=\frac{1-cos2x}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sin\ \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot sin\ \frac{x}{2}=\lim_{x\to 0}sin\ \frac{x}{2}=sin0=0$$

Приклад 14. Знайти границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Розв'язання.

Застосуємо другу важливу границю $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-1\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-2}{3}}\right)^{(2x-1)\cdot\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}=e^{\frac{\infty}{\infty}}=e^6$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Користуючись теоремами про границі, обчислити:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\left(3(x+2)-\frac{x}{x-2}\right)$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-5x+9}{x^2-7x+1}$, 3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\right)$,

4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+9}{x-1}$, 5) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\sqrt{x^2+12}-x\right)^3$.

2. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $\left[\frac{0}{0}\right]$:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-6x+8}{x-2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{5x^2-8x+3}$, 3) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-6x+4}{x^3-8}$, 4) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^3-8}$,

5) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$, 6) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

3. Знайти границі функцій, позбувшись ірраціональності:

1) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}-2}$, 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{16-x^2}{3-\sqrt{5+x}}$, 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x}-1}$, 4) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-9}$,

5) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

4. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+8}{x-2}$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-10x^2-6x+5}{5x^2+8x+3}$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-6x+4}{x^3-8}$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-10x-4x^2+5}{8x+3}$,

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{2x^2}$.

5. Знайти границі функцій, розкривши невизначеності типу $[\infty-\infty]$:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}-x\right)$.

6. Знайти границі функцій, застосувавши першу важливу границю:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$, 2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$, 3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 6x}{x^2}$, 4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}$, 5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,5x}{x}$.

7. Знайти границі функцій, застосувавши другу важливу границю:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$, 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^x$, 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+2}\right)^x$, 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{1-4x}$,

5) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, 6) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x+1}{3x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$, 7) $\lim\limits_{x\to5}(2x-9)^{\frac{3}{x-5}}$, 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{x^2-4}\right)^{x^2+2}$.

ПОХІДНА ФУНКЦІЇ

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено на проміжку $X = (a, b)$ (можливо нескінченому). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Тоді функція $y = f(x)$ в точці x_0 дістане приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення 1. *Похідною функції* $y = f(x)$ *у точці* x_0 називають границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля.

Позначають похідну одним із символів: $y'(x_0)$, $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$. Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то цю похідну позначають y', $f'(x)$ або $\frac{d}{dx} f(x)$.

Означення 2. Функцію $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називають *диференційованою в точці* x_0. Функцію, диференційовану в кожній точці $x \in X$ називають *диференційованою на проміжку X.* Операцію відшукання похідної називають ***диференціюванням***.

Правила диференціювання

1. Диференціювання суми, різниці, добутку й частки

Теорема 1. *Якщо функції* $u = u(x)$ *і* $v = v(x)$ *диференційовані в точці* $x \in X$, *то функції* $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ *(в останньому випадку вважається, що* $v(x) \neq 0$*) також диференційовані в цій точці й справедливі такі рівності:*

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

2) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

2. Диференціювання складної функції

Теорема 2. *Нехай* $y = f(\varphi(x))$ *– складна функція, де* $y = f(u)$ *і* $u = \varphi(x)$ *– диференційовані функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція* $y = f(u)$ *в точці* $u = \varphi(x)$ *має похідну (по* u*)* $y'_u(u) = f'_u(u)$, *а внутрішня функція* $u = \varphi(x)$ *у*

точці x *– похідну (по* x*)* $u'_x = \varphi'(x)$. *Тоді складна функція* $y = f(\varphi(x))$ *диференційована в точці* x*, причому її похідна обчислюється за формулою*

$$f'_x(\varphi(x)) = f'_u(u)\cdot\varphi'(x) \text{ або } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

	Похідна основної елементарної функції	**Похідна складеної елементарної функції** $u = u(x)$	**Частинний випадок**
1	$(C)' = 0$		
2	$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\alpha \in R$	$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'_x$, $\alpha \in R$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
3	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0, a \neq 1$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'_x$, $a > 0, a \neq 1$	$(e^x)' = e^x$
4	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'_x$, $a > 0, a \neq 1$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
5	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'_x$	
6	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'_x$	
7	$(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(tg\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'_x$	
8	$(ctg\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(ctg\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'_x$	
9	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\lvert x\rvert < 1)$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$	
10	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\lvert x\rvert < 1)$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'_x$	
11	$(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(arctg\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$	
12	$(arcctg\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(arcctg\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'_x$	

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x, тобто існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$. Тоді для досить малого околу точки x має місце рівність $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x)$, де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Означення 3. ***Диференціалом функції*** $y = f(x)$ ***у точці*** x називають головну, лінійну відносно Δx частину приросту функції в цій точці

$$dy = f'(x)\Delta x \quad \textit{або} \quad dy = f'(x)dx. \tag{1}$$

Означення 4. ***Другим диференціалом*** d^2y ***або диференціалом другого порядку*** називається диференціал від диференціала першого порядку

$$d^2y = d(dy) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2. \tag{2}$$

Приклад 1. Зайти диференціали першого і другого порядків функції $y = arctg\, x$.

За формулами (1), (2) знаходимо: $dy = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, $d^2y = \dfrac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx^2$.

Геометричне застосування похідної

Якщо крива задана рівнянням $y = f(x)$, то $f'(x_0) = tg\alpha$, де α – кут, який утворює з додатнім напрямком осі Ox дотична до кривої в точці з абсцисою x_0.

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0, \text{ де } y_0 = f(x_0). \tag{3}$$

Нормаллю до кривої називається пряма, перпендикулярна до дотичної, яка проходить через точку дотику.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці дотику $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0. \tag{4}$$

Застосування диференціалу функції до наближених обчислень функцій

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована в точці x.

Теорема 1. *Якщо* $y'_x(x) = f'(x) \neq 0$, *то* $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{dy} = 1$, *тобто* Δy *і* dy *є еквівалентними нескінченно малими.*

На підставі означення диференціалу та сформульованої теореми дістанемо наближені формули:

$$\Delta y \approx dy \text{ або } f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x. \quad (5)$$

Якщо в рівності (1) покласти $x_0 = 0$, а $\Delta x = x$, то вона набуває вигляду

$$f(x) \approx f(0) + f'(0) \cdot x. \quad (6)$$

Формули (5), (6) часто використовуються для наближених обчислень.

Приклад 2. Наближено обчислити значення $arctg(1.05)$.

Розв'язання. Для наближеного обчислення значення $arctg(1.05)$ скористаємось формулою (5), згідно з якою $arctg(x_0 + \Delta x) \approx (arctg\, x_0)' \cdot \Delta x + arctg(x_0)$.

Поклавши $x_0 = 1,\ \Delta x = 0.05,$ одержимо

$$arctg(1.05) \approx \frac{1}{1+1^2} \cdot 0.05 + \frac{\pi}{4} = 0.025 + 0.78539816 = 0.81039816.$$

Розв'язування завдань

Похідні простих функцій

Правила диференціювання

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = x^2 + x - 2.$

Розв'язання.

Застосовуючи правило похідної суми функцій та таблицю похідних, отримаємо $y' = (x^2 + x - 2)' = (x^2)' + (x)' - (2)' = 2x + 1.$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = x^3 sinx.$

Розв'язання.

Застосовуючи правило похідної добутку функцій та таблицю похідних, отримаємо

$$y' = (x^3 sinx)' = (x^3)' \cdot sinx + x^3 \cdot (sinx)' = 3x^2 \cdot sinx + x^3 \cdot cosx.$$

Приклад 3. Знайти похідну функції $y = 5tgx.$

Розв'язання.

Застосовуючи таблицю похідних, отримаємо

$$y' = (5tgx)' = 5(tgx)' = 5 \cdot \frac{1}{cos^2 x} = \frac{5}{cos^2 x}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = xe^x sinx$

Розв'язання.

Згідно формули похідної добутку декількох диференційованих функцій $y' = (uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, отримаємо

$$y' = (xe^x sinx)' = (x)'e^x sinx + x(e^x)'sinx + xe^x(sinx)' =$$
$$= e^x sinx + xe^x sinx + xe^x cosx = e^x(sinx + xsinx + xcosx)$$

Приклад 5. Знайти похідну функції $y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

Розв'язання. Застосовуючи правило похідної частки функцій та таблицю похідних, отримаємо

$$y' = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' = \frac{(x^2-1)' \cdot (x^2+1) - (x^2-1) \cdot (x^2+1)'}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{2x \cdot (x^2+1) - 2x \cdot (x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$$

Приклад 6. Знайти похідну функції $y = \frac{5}{sinx}$.

Розв'язання. Застосовуючи таблицю похідних, отримаємо

$$y' = \left(\frac{5}{sinx}\right)' = \frac{5' \cdot sinx - (sinx)' \cdot 5}{(sinx)^2} = \frac{-5cosx}{(sinx)^2} = \frac{-5ctgx}{sinx}$$

Похідні складених функцій

Приклад 7. Знайти похідну функції $y = (x^2+1)^4$.

Розв'язання.

Маємо складну степеневу функцію. Застосовуючи формулу $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ та таблицю похідних, отримаємо

$$y' = ((x^2+1)^4)' = 4 \cdot (x^2+1)^3 \cdot (x^2+1)' = 4 \cdot (x^2+1)^3 \cdot 2x = 8x \cdot (x^2+1)^3$$

Приклад 8. Знайти похідну функції $y = sin3x$.

Розв'язання.

Маємо складну функцію, так як аргументом синуса є не x, а $3x$. Застосовуючи формулу $(sinu)' = cosu \cdot u'$, отримаємо

$$y' = (sin3x)' = cos3x \cdot (3x)' = 3cos3x.$$

Приклад 9. Знайти похідну функції $y = 3^{sinx}$.

Розв'язання.

Застосовуючи формулу $(a^u)' = a^u \cdot lna \cdot u'$, отримаємо

$$y' = \left(3^{sinx}\right)' = 3^{sinx} \cdot ln3 \cdot (sinx)' = 3^{sinx} \cdot ln3 \cdot cosx.$$

Приклад 10. Знайти похідну функції $y = ln^4 2x$.

Розв'язання.

Застосовуючи формули $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ отримаємо

$$y' = (ln^4 2x)' = 4ln^3 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = \frac{4ln^3 2x}{x}.$$

Приклад 11. Знайти похідну функції $y = arctgx^2$.

Розв'язання.

Застосовуючи формулу $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$, отримаємо

$$y = (arctgx^2) = \frac{1}{1 + (x^2)^2} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{1 + x^4}$$

Приклад 12. Знайти похідну функції $y = e^{\sqrt{lnx}}$.

Розв'язання.

Застосовуючи поступово формули $(e^u)' = e^u \cdot u'$, $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$, $(lnu)' = \frac{1}{u} \cdot u'$, отримаємо

$$y' = \left(e^{\sqrt{lnx}}\right)' = e^{\sqrt{lnx}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{lnx}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{e^{\sqrt{lnx}}}{2x \cdot \sqrt{lnx}}$$

Приклад 13. Знайти похідну функції $y = (sin^2x + 1)^4$.

Розв'язання.

Маємо складну степеневу функцію

$$y' = ((sin^2x + 1)^4)' = 4(sin^2x + 1)^3 \cdot 2sinx \cdot cosx = 4(sin^2x + 1)^3 \cdot sin2x$$

Приклад 14. Знайти похідну функції $y = log_3(x^2 - 1)$.

Розв'язання.

Маємо складну логарифмічну функцію, використовуємо формулу $(log_a u)' = \frac{1}{u \cdot lna} \cdot u'$:

$$y' = \frac{1}{(x^2 - 1)ln3} \cdot (x^2 - 1)' = \frac{2x}{(x^2 - 1)ln3}$$

Приклад 15. Знайти похідну функції $y = ln^4(sinx)$.

Розв'язання.

Маємо складну логарифмічну функцію:

$$y' = \left(ln^4(sinx)\right)' = 4ln^3(sinx) \cdot \frac{1}{sinx} \cdot cosx = 4ln^3(sinx) \cdot ctgx$$

Приклад 16. Обчислити похідну функції $y = (x+1)(x^3+3)$.

Розв'язання.

Згідно правила похідної добутку та формул з таблиці похідних маємо:

$y' = (x + 1)' \cdot (x^3 + 3) + (x + 1) \cdot (x^3 + 3)' = (x^3 + 3) + (x + 1) \cdot 3x^2 =$
$= x^3 + 3 + 3 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 = 4x^3 + 3x^2 + 3.$

Приклад 17. Обчислити похідну функції $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

Розв'язання.

$y' = \frac{1}{x^2+1} \cdot (x^2 + 1)' = \frac{2x}{x^2+1}$.

Приклад 18. Обчислити похідну функції $y = 2^{\frac{x}{lnx}}$.

Розв'язання.

$$y' = \left(2^{\frac{x}{lnx}}\right)' = 2^{\frac{x}{lnx}} \cdot ln2 \cdot \left(\frac{x}{lnx}\right)' = 2^{\frac{x}{lnx}} \cdot ln2 \cdot \frac{x' \cdot lnx - x \cdot (lnx)'}{ln^2 x} =$$

$$= 2^{\frac{x}{lnx}} \cdot ln2 \cdot \frac{1 \cdot lnx - x \cdot \frac{1}{x}}{ln^2 x} = 2^{\frac{x}{lnx}} \cdot ln2 \cdot \frac{lnx - 1}{ln^2 x}$$

Приклад 19. Знайти похідну функції $y = 3sin^2 x - sin^3 x$.

Розв'язання.

Маємо складну степеневу функцію, диференціюючи почленно, отримаємо

$$y' = (3sin^2 x)' - (sin^3 x)' = 3 \cdot 2sinx \cdot cosx - 3sin^2 x \cdot cosx =$$

$$= 3 \cdot sin2x - 3sin^2 x \cdot cosx$$

Приклад 20. Обчислити похідну функції $y = tg(\ln x)$.

Розв'язання.

$y' = \frac{1}{cos^2(lnx)} \cdot (lnx)' = \frac{1}{xcos^2(lnx)}$.

Приклад 21. Знайти похідну функції $y = e^{-x^2} \cdot lnx$.

Розв'язання.

Маємо складну функцію, диференціюючи за правилом добутку, отримаємо

$$y' = \left(e^{-x^2} \cdot lnx\right)' = \left(e^{-x^2}\right)' \cdot lnx + e^{-x^2} \cdot (lnx)' = e^{-x^2} \cdot (-2x) \cdot lnx + e^{-x^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$== e^{-x^2} \cdot \left(\frac{1}{x} - 2xlnx\right)$$

Приклад 22. Обчислити похідну функції $y = log_3(x^2 - sinx)$.

Розв'язання.

$$y' = \left(log_3(x^2 - sinx)\right)' = \frac{1}{(x^2 - sinx) \cdot ln3} \cdot (x^2 - sinx)' =$$

$$= \frac{1}{(x^2 - sinx) \cdot ln3} \cdot (2x - cosx)$$

Приклад 23. Обчислити похідну функції $y = 5tg\frac{x}{5} + tg\frac{\pi}{8}$.

Розв'язання.

$$y' = \left(5tg\frac{x}{5}\right)' + \left(tg\frac{\pi}{8}\right)' = 5 \cdot \frac{1}{cos^2\frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{5} + 0 = \frac{1}{cos^2\frac{x}{5}}$$

Приклад 24. Обчислити похідну функції $y = x^3 arctgx^3$.

Розв'язання.

$$y' = (x^3 arctgx^3)' = (x^3)' arctgx^3 + x^3 (arctgx^3)' =$$

$$= 3x^2 arctgx^3 + x^3 \cdot \frac{1}{1+(x^3)^2} \cdot 3x^2 = 3x^2 arctgx^3 + \frac{3x^5}{1+x^6}$$

Обчислення диференціалів функції

Знаходження диференціала, по суті, зводиться до знаходження похідної цієї функції, помноженої на диференціал незалежної змінної.

Знайти диференціали даних функцій.

Приклад 25. $y = \frac{1}{1-x^2}$.

Розв'язання. Застосуємо формулу $dy = y'dx$.

$$dy = \left(\frac{1}{1-x^2}\right)' dx = \frac{-2x}{(1-x^2)^2} dx$$

Приклад 26. $y = e^{-7x}$.

Розв'язання. $dy = (e^{-7x})' dx = -7e^{-7x} dx$.

Приклад 27. $y = \sqrt{x} + 3$.

Розв'язання. $dy = \left(\sqrt{x} + 3\right)' dx = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

Приклад 28. $y = tg^2 x$.

Розв'язання. $dy = (tg^2 x)' dx = 2tgx \cdot \frac{1}{cos^2 x} dx = \frac{2tgx}{cos^2 x} dx$.

Приклад 29. $y = 5^{\ln(tgx)}$.

Розв'язання. $dy = \left(5^{\ln(tgx)}\right)' dx = 5^{\ln(tgx)} ln5 \cdot \frac{1}{tgx} \cdot \frac{1}{cos^2 x} dx = \frac{5^{\ln(tgx)} ln5}{tgx cos^2 x} dx$.

Приклад 30. $y = lntg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)$.

Розв'язання.

За формулами зведення отримаємо $tg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right) = ctg\frac{x}{4}$.

Отже,

$$dy = \left(lntg\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4}\right)\right)' dx = \left(lnctg\frac{x}{4}\right)' dx = \frac{1}{ctg\frac{x}{4}} \cdot \left(-\frac{1}{sin^2\frac{x}{4}}\right) \cdot \frac{1}{4} dx =$$

$$= -\frac{dx}{4ctg\frac{x}{4} sin^2\frac{x}{4}}$$

Приклад 31. Обчислити наближено $arctg\ 0{,}97$.

Розв'язання.

Нехай $arctg\ 0{,}97$ є частинне значення функції $f(x) = arctg\ x$ при $x = 0{,}97$. Нехай $x_0 = 1$. Тоді $\Delta x = x - x_0 = 0{,}97 - 1 = -0{,}03$;

$f(x_0) = f(1) = arctg1 = \frac{\pi}{4}$.

Диференціюючи функцію $f(x) = arctg\, x$, знаходимо $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

При $x_0 = 1, \quad f'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

Застосовуючи формулу $\Delta y \approx dy \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, отримаємо

$arctg\ 0{,}97 \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot (-0{,}03) \approx 0{,}785 - 0{,}015 = 0{,}77.$

Приклад 32. Обчислити наближено $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$

Розв'язання.

Нехай $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}}$ є частинне значення функції $f(x) = \sqrt{\frac{(x)^2-3}{(x)^2+5}}$ при x = 2,037.

Поклавши $x_0 = 2$, $f(x_0) = f(2) = \sqrt{\frac{(2)^2-3}{(2)^2+5}} = \frac{1}{3}$;

$\Delta x = x - x_0 = 2{,}037 - 2 = 0{,}037.$

Знайдемо похідну функції $f(x) = \sqrt{\frac{(x)^2-3}{(x)^2+5}}$, а також її значення при $x_0 = 2$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{(x)^2-3}{(x)^2+5}}} \cdot \frac{2x(x^2+5) - 2x(x^2-3)}{(x^2+5)^2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(x)^2-3}{(x)^2+5}}} \cdot \frac{8x}{(x^2+5)^2}$$

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{16}{27}$$

Отже, маємо $\sqrt{\frac{(2{,}037)^2-3}{(2{,}037)^2+5}} \approx \frac{1}{3} + \frac{16}{27} \cdot 0{,}037 \approx 0{,}333 + 0{,}022 = 0{,}355.$

Похідні вищих порядків

Приклад 33. Знайти похідну другого порядку y'', якщо $y = (x^2+1)^3$

Розв'язання.

Маємо явно задану функцію. Спочатку знаходимо похідну першого порядку $y' = 3(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$; потім знову знаходимо похідну першого порядку від похідної:

$$y'' = (y')' = (6x(x^2+1)^2)' =$$
$$= 6(x^2+1)^2 + 6x \cdot 2(x^2+1) \cdot 2x = 6(x^2+1) \cdot (x^2+1 +\cdot 4x^2)$$
$$= 6(x^2+1)(5x^2+1) = 6(5x^4+6x^2+1)$$

Приклад 34. Знайти похідну третього порядку y''', якщо $y = cos^2x$

Розв'язання.

Маємо явно задану функцію. Диференціюючи послідовно три рази, знаходимо

$$y' = (cos^2x)' = 2cosx(-sinx) = -sin2x$$

$$y'' = (y')' = (-sin2x)' = -cos2x \cdot 2 = -2cos2x$$
$$y''' = (y'')' = (-2cos2x)' = -2(-sin2x) \cdot 2 = 4sin2x$$

Приклад 35. Знайти похідну другого порядку y'' в точці $x_0 = 0$, якщо $y(x) = e^{2x-1}$.

Розв'язання.

Диференціюючи дану функцію двічі, знаходимо $y''(x)$:

$$y'(x) = (e^{2x-1})' = 2e^{2x-1}$$
$$y''(x) = (2e^{2x-1})' = 4e^{2x-1}$$

При $x_0 = 0$ отримаємо $y''(0) = (2e^{2\cdot 0-1})' = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$.

Приклад 36. Знайти диференціал другого порядку функції $y = \sqrt[3]{x^2}$.

Розв'язання.

Диференціюючи дану функцію двічі та враховуючи, що $d^2y = y''dx^2$, одержимо $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}},\ y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}},\ d^2y = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}dx^2$.

Приклад 37. Знайти диференціал третього порядку d^3y, якщо $y = sin^2x$.

Розв'язання.

Диференціюючи дану функцію тричі, знаходимо похідні:

$y' = 2sinxcosx = sin2x,\ y'' = 2cos2x,\ y''' = -4sin2x.$

Тоді, за формулою $d^3y = y'''dx^3 = -4sin2xdx^3$.

Приклад 38. Знайти рівняння дотичної і нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0 ; y_0)$:

1) $y = x^2 - 4x,\ \ M_0(1;\ -3)$;

2) $y = e^x,\ \ M_0(0;\ 1)$;

3) $y = 3lnx - 4,\ \ M_0(1;\ -1)$.

Розв'язання.

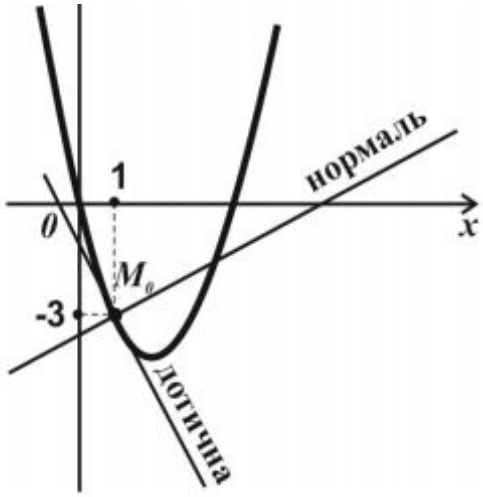
Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$, де $y_0 = f(x_0)$.

Рівняння нормалі до кривої $y = f(x)$ в точці дотику $M_0(x_0, y_0)$ має вигляд

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0.$$

1) Знайдемо похідну $y' = 2x - 4$. Потім обчислимо похідну в заданій точці $M_0(1;\ -3)$: $y'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$. Маючи на увазі, що $x_0 = 1, y_0 = -3$ запишемо рівняння дотичної $y + 3 = -2(x - 1) \Longrightarrow y = -2x - 1$.

Запишемо рівняння нормалі $y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Longrightarrow y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.



На рисунку зображено параболу $y = x^2 - 4x$, дотичну і нормаль, які проведені до кривої в точці $M_0(1; -3)$.

2) Розв'язання аналогічне: $y = e^x;\ y' = e^x;\ y'(0) = e^0 = 1.$
Запишемо рівняння дотичної $y - 1 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 1.$
Запишемо рівняння нормалі $y - 1 = -x \Rightarrow y = -x + 1.$

3) Для функції $y = 3lnx - 4$, знайдемо похідну $y' = \frac{3}{x}$ та її значення в точці $M_0(1; -1)$: $y'(1) = \frac{3}{1} = 3.$
Запишемо рівняння дотичної $y + 1 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 4.$
Запишемо рівняння нормалі $y + 1 = -\frac{1}{3}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$

Завдання для самостійної роботи:

№	**Знайти похідну** y'	**Знайти** y', dy, y'', d^2y
1	$y = x^2 \sin x + \frac{\ln x}{x^3}$	$y = \cos^2 \frac{x}{2}$
2	$y = x^2 tg\,2x + \frac{x}{e^x}$	$y = \left(5x - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^4$
3	$y = (x^2 - 1)\sin 3x + \frac{2^x}{x}$	$y = tg^4 \frac{x}{4}$
4	$y = x^5(x^3 - \frac{5}{\sqrt[3]{x}}) + \frac{2x}{3^x}$	$y = \sin\left(3\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)$
5	$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + (x^3 - 1)\cos 3x$	$y = tg^3 \frac{x}{6}$
6	$y = \frac{2x}{x^2 + 4} + x \arccos 3x$	$y = \ln\left(3x + \frac{1}{\ln x}\right)$

7	$y=\frac{\sin x}{x^2}+x^3(\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+6\sqrt{x})$	$y=\left(3x-\frac{1}{e^x}\right)^{10}$
8	$y=\frac{4x}{x^2-6}+2xarctgx$	$y=\log_3(x^2-1)$
9	$y=\frac{\sin 2x}{\sqrt{x^2+1}}+e^x\ln x$	$y=ctg^2\frac{x}{8}$
10	$y=\frac{x}{2x-1}+xarcctgx$	$y=\ln\left(x^2+\ln x\right)$
11	$y=(x^3-\frac{10}{\sqrt{x}})tgx+\frac{2x}{e^x+4}$	$y=10e^{\sin(5x^2+x)}$
12	$y=x^2\sin x+\frac{\ln x}{x^3}$	$y=\sqrt{tg\frac{x}{2}}$
13	$y=\frac{2x}{\cos x}+x\arcsin 4x$	$y=2^{\frac{x}{\ln x}}$
14	$y=\frac{tgx}{x^2}+x^3(\frac{1}{x^8}+\sqrt[4]{x})$	$y=\sin\sqrt{\frac{x^2}{3}+1}$

2. Знайти рівняння дотичної та нормалі до кривої *f*(*x*):

1) $f(x)=x^3$ у точці $M_0(2;\ 2)$;

2) $f(x)=\frac{x^2}{4}+1$ у точці $M(2;\ 2)$;

3) $f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}$ у точці $M(1;1)$;

4) $f(x)=\sqrt{x}$ у точці $M_0(4;\ 4)$.

ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

1. Зростання і спадання функції. Екстремуми функції

Означення 1. Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються *критичними точками,* або *критичними точками першого роду.*

Означення 2. Зростаюча або спадна функція називається *монотонною*. Проміжки, на яких задана функція зростає або спадає називаються *проміжками монотонності*.

Правило знаходження проміжків монотонності функції $y = f(x)$:

1) знайти область визначення функції $y = f(x)$;
2) знайти похідну $f'(x)$;
3) знайти критичні точки з рівняння $f'(x) = 0$ та з умови, що $f'(x)$ не існує;
4) розділити критичними точками область визначення функції $f(x)$ на інтервали і у кожному з них визначити знак похідної $f'(x)$;
5) за одержаними знаками похідної зробити висновки: де похідна додатна, в тих інтервалах функція зростає, а де від'ємна – спадає.

Приклад 1. Знайти проміжки монотонності функції $f(x) = 2x^3 - 6x + 7$.

Розв'язання.

1) Область визначення заданої функції $x \in (-\infty; +\infty)$.

2) Знайдемо похідну: $f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1)$.

3) Знайдемо стаціонарні точки з рівняння $f'(x) = 6(x^2 - 1) = 0$: $x_1 = -1;\quad x_2 = 1$.

Ці точки поділяють область визначення на інтервали $(-\infty; -1)$, $(-1; 1)$ і $(1; +\infty)$. В кожному з цих інтервалів досліджуємо знак похідної $f'(x)$:

при $x \in (-\infty; -1)$ $\quad f'(x) > 0$,

при $x \in (-1; 1)$ $\quad f'(x) < 0$,

при $x \in (1; +\infty)$ $\quad f'(x) > 0$.

Отже, функція зростає на інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(1; +\infty)$, а спадає на інтервалі $(-1; 1)$.

Локальний екстремум функції

Означення 3. Точка x_0 називається *точкою локального максимуму (мінімуму) функції* $y = f(x)$, якщо в деякому околі точки x_0 виконується нерівність $f(x) \le f(x_0)$ – для максимуму ($f(x) \ge f(x_0)$ – для мінімуму).

Узагальненим терміном поняття максимуму та мінімуму є *екстремум***.** Значення аргументу $x = x_0$ (тобто точка x_0), при якому функція $y = f(x)$ має екстремум (максимум чи мінімум) називають *точкою екстремуму функції.*

Зауважимо, що екстремальні точки, згідно з означенням, це такі точки, в яких функція набуває відповідно найбільшого чи найменшого значень порівняно із значеннями функції, що їх вона набуває в точках, досить близьких до екстремальної точки. Такий екстремум функції часто називають *локальним* (від лат. lokalis, що означає "місцевий").

Повна необхідна умова існування локального екстремуму:

Для того, щоб функція $y = f(x)$ *мала локальний екстремум в точці* x_0, *необхідно, щоб її похідна в цій точці дорівнювала нулю (* $f'(x_0) = 0$*) або не існувала.* Таким чином, точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, є *критичними* (або *стаціонарними*) і тому їх іноді називають *точками можливого екстремуму*.

Приклад 2. Знайти критичні точки наступних функцій і переконатися в наявності або відсутності локального екстремуму в цих точках:

1) $y = x^2$, $y' = 2x = 0$. Точка $x = 0$ – критична точка (точка мінімуму).

2) $y = x^3$, $y' = 3x^2 = 0$. Точка $x = 0$ – критична точка (екстремум відсутній).

3) $y = \sqrt[3]{x}$, $y' = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, $y'(0) = \infty$. Точка $x = 0$ – критична точка (екстремум відсутній).

Правило дослідження функції на екстремум

Для дослідження функції $y = f(x)$ на екстремум доцільно дотримуватись такого порядку дій:

1) знайти область визначення функції;

2) знайти похідну $y' = f'(x)$;

3) знайти критичні точки, тобто точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує;

4) дослідити знак похідної зліва і справа від кожної критичної точки;

5) якщо при переході зліва направо через критичну точку x_0 знак похідної $f'(x)$ змінюється з плюса на мінус, то точка x_0 є точкою максимуму функції $y = f(x)$, а якщо з мінуса на плюс – то точкою мінімуму.

6) знайти екстремуми функції.

Приклад 3. Дослідити на екстремум функцію $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 7$.

*Розв'язання***.**

Використаємо правило.

Область визначення функції: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Похідна функції $y' = 6x^2 - 18x + 12$.

Знаходимо критичні точки, розв'язавши рівняння $6x^2 - 18x + 12 = 0$. Такими точками є: $x_1 = 1, x_2 = 2.$ Інших критичних точок немає.

Будуємо таблицю, за допомогою якої досліджуємо знак похідної і знаходимо екстремуми функції. Графік досліджуваної функції подано на рис. 1.

x	$(-\infty;\ 1)$	1	$(1;\ 2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	**max**	↘	**min**	↗

$y_{\max} = f(1) = 2 - 9 + 12 + 7 = 12.$

$y_{\min} = f(2) = 2 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 7 =$
$= 16 - 36 + 24 + 7 = 11.$

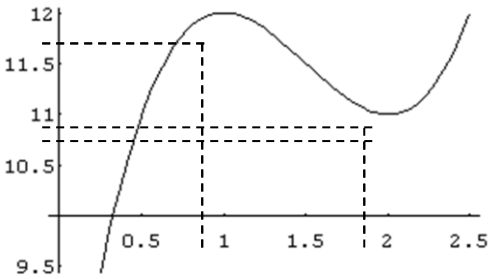


Рис. 1

Приклад 4. Залежність добового надою y (в літрах) від віку корів x (в роках) описується рівнянням $y = -9.53 + 6.86x - 0.49x^2$, $x > 2$. Знайти вік дійних корів, при якому добові надої будуть найбільшими.

Розв'язання.

Знаходимо похідну функції $y' = 6.86 - 0.98x$ та критичну точку $x = \dfrac{6{,}86}{0{,}98} = 7$.

Складаємо таблицю і досліджуємо знаки на проміжках $(2;\ 7)$ і $(7;\ +\infty)$:

x	$(2;\ 7)$	7	$(7;\ +\infty)$
$f'(x)$	+	0	–
$f(x)$	↗	**max**	↘

Бачимо, що функція y в точці $x = 7$ має максимум.

Отже, у віці корів семи років надої будуть найбільшими: $y = -9.53 + 6.86 \cdot 7 - 0.49 \cdot 7^2 = 14{,}48$ літрів.

Найбільше і найменше значення функції

Нехай на відрізку $[a; b]$ задано неперервну функцію $f(x)$.

Правило знаходження найбільшого і найменшого значень функції $f(x)$ на відрізку $[a; b]$:

1) знайти всі критичні точки функції $f(x)$, які належать інтервалу $(a; b)$;

2) обчислити значення функції $f(x)$ у знайдених критичних точках і на кінцях відрізка;

3) із одержаних значень вибрати найменше та найбільше.

Приклад 5. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x)=x^4-8x^2$ на відрізку $[-1;\,3]$.

Розв'язання.

Знаходимо критичні точки заданої функції. Для цього знаходимо похідну $f'(x)=4x^3-16x$ і розв'язуючи рівняння $4x^3-16x=0$ знайдемо критичні точки: $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$.

Відрізку $[-1;\,3]$ належать тільки точки $x_2=0$ та $x_3=2$. Обчислимо значення функції в цих точках і на кінцях відрізка:

$f(-1)=-7$, $f(0)=0$, $f(2)=-16$, $f(3)=9$.

Отже, найбільше значення функції дорівнює $f(3)=9$, а найменше – $f(2)=-16$.

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти інтервали зростання і спадання функцій:

1) $y=(x-1)^2$, 2) $y=2-x^3$, 3) $y=x\ln x+3x$, 4) $y=(x-2)\sqrt{x}$,

5) $y=x^4-2x^2-3$, 6) $y=\sqrt{x^3-3x}$, 7) $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

2. Знайти локальні екстремуми функцій:

1) $y=4x-x^2$, 2) $y=2x^3+6x^2-12x+100$, 3) $y=\dfrac{4}{x}+x$, 4) $y=3x^4-4x^3$,

5) $y=(x+1)\sqrt{x}$, 6) $y=x^4(x-12)^2$, 7) $y=x\sqrt[3]{x-3}$.

3. Знайти найбільше і найменше значення функцій:

1) $y=\dfrac{1}{3}x^3-2x^2+3$ на відрізку $[-1;\,2]$, 2) $y=x^4-8x^2+3$ на відрізку $[-2;\,2]$,

3) $y=\dfrac{1}{3}x^3-6x^2+32x$ на відрізку $[0;\,9]$.

4. Залежність між віком корів x (роки) та добовим надоєм y (літри) описується функцією $y=-9{,}53+6{,}86x-0{,}49x^2$. Як зміняться середньодобові надої корів, якщо їхній вік збільшився від трьох до п'яти років?

5. Потрібно викопати силосну яму об'ємом $V=32$ м^3 з квадратним дном таких розмірів, щоб на обробку її дна та стін витратили найменшу кількість матеріалів. Знайдіть розміри ями.

6. Швидкість розмноження y популяції x описується функцією $y=0{,}001x\cdot(100-x)$. При якому значенні x швидкість розмноження популяції буде максимальною?

НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла

Означення 1. *Функція* $F(x)$ називається *первісною для функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, якщо $F(x)$ диференційована на $(a;b)$ і в кожній точці $x \in (a;b)$ $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1. *Якщо функція* $F(x)$ *є первісною для функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, *то всяка інша первісна функції* $f(x)$ *на цьому самому проміжку має вигляд* $F(x)+C$, *де* C *– довільна стала*.

Означення 2. Сукупність усіх первісних $F(x)+C$ для заданої функції $f(x)$ називають *невизначеним інтегралом* і позначають $\int f(x)dx$, отже

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \qquad (1)$$

Тут символ $\int$ – це знак інтеграла, $f(x)dx$ – підінтегральний вираз, $f(x)$ – підінтегральна функція, x – змінна інтегрування, C – стала інтегрування.

2. Основні властивості невизначеного інтеграла

1. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3. $\int dF(x) = F(x) + C$.

4. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)\,du = F(u) + C$.

5. $\int C\,f(x)\,dx = C\int f(x)\,dx$, де C – стала.

6. $\int [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + \ldots + C_n f_n(x)]dx = C_1\int f_1(x)\,dx + C_2\int f_2(x)\,dx + \ldots + C_n\int f_n(x)\,dx$.

3. Таблиця основних інтегралів

№ п/п	$\int f(x)\,dx = F(x) + C$	Перевірка умовою $\left(F(x)+C\right)' = f(x)$
1	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = x^n$
2	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$	$(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$
3	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\left(\frac{a^x}{\ln a} + C\right)' = \frac{\ln a \cdot a^x}{\ln a} = a^x$
4	$\int e^x dx = e^x + C$	$(e^x + C)' = e^x$
5	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$(\sin x + C)' = \cos x$

6	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$(-\cos x + C)' = \sin x$
7	$\int tg\,x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\left(-\ln\lvert\cos x\rvert + C\right)' = tg\,x$
8	$\int ctg\,x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	$\left(\ln\lvert\sin x\rvert + C\right)' = ctg\,x$
9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x}\,dx = tg\,x + C$	$(tg\,x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x}\,dx = -ctg\,x + C$	$(-ctg\,x + C)' = \frac{1}{\sin^2 x}$
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\left(\arcsin\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
12	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a} + C$	$\left(\frac{1}{a}\,arctg\,\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{x^2 + a^2}$
13	$\int \frac{dx}{\sin x}\,dx = \ln\left\lvert tg\,\frac{x}{2}\right\rvert + C$	
14	$\int \frac{dx}{\cos x}\,dx = \ln\left\lvert tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\rvert + C$	
15	$\int \sqrt{a + x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a + x^2} + \frac{a}{2}\ln\left\lvert x + \sqrt{a + x^2}\right\rvert + C$	
16	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$	
17	$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x - a}{x + a}\right\rvert + C$	
16	$\int \frac{dx}{\sqrt{A + x^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 + A}\right\rvert + C$	

4. Методи інтегрування

4.1. Метод безпосереднього інтегрування

Обчислення інтегралів за допомогою основних властивостей невизначеного інтеграла та таблиці основних інтегралів називають *безпосереднім інтегруванням.*

4.2. Метод заміни змінної. Внесення функції під знак диференціала

Суть цього методу полягає у введені під знак інтеграла нової змінної, що після підстановки і заміни диференціала заданої змінної на диференціал нової змінної дістають табличний інтеграл, або інтеграл, який легко зводиться до табличних. Обґрунтування такого методу дається теоремою.

Теорема. *Нехай* $F(x)$ *– первісна функції* $f(x)$ *на проміжку* $(a;b)$, *тобто* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ *і нехай функція* $x = \varphi(t)$, $(dx = \varphi'(t)\,dt)$ *визначена і*

диференційована на проміжку $(\alpha;\beta)$, *причому множина значень цієї функції є проміжок* $(a;b)$. *Тоді справедлива формула*

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + C. \qquad (2)$$

***Наслідок* 1**. *Якщо підінтегральний вираз можна розкласти на множники* $f(\varphi(x))$ *та* $\varphi'(x)dx$, *то доцільно зробити заміну* $\varphi(x) = t$. *Тоді* $\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int f(t)dt$.

***Наслідок* 2**. *Якщо підінтегральна функція має вигляд* $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, *тобто, у чисельнику є похідна від знаменника, то за допомогою заміни* $\varphi(x) = t$, $\varphi'(x)dx = dt$ *інтеграл зводиться до табличного.*

Справді, $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{dt}{t} = \ln t + C = \ln(\varphi(x)) + C$.

4.3. Метод інтегрування частинами

Цей метод застосовується, якщо під інтегралом є добуток функцій.

Нехай $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді $d(u \cdot v) = u \cdot dv + v \cdot du$. Інтегруємо обидві частини $\int d(u \cdot v) = \int u \cdot dv + \int v du$. Звідки, з врахуванням властивості 3^0 невизначеного інтеграла, отримаємо формулу для інтегрування частинами

$$\int u dv = uv - \int v du. \qquad (3)$$

Розв'язування завдань

Обчислити інтеграли методом безпосереднього інтегрування

Безпосереднє обчислення невизначених інтегралів ґрунтується на тотожних перетвореннях підінтегральної функції, властивостях невизначеного інтеграла та використання формул з таблиці інтегралів.

Обчислити невизначені інтеграли:

Приклад 1. Довести, що $\int dx = x + C$.

Розв'язання. $\int dx = \int 1dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$.

Приклад 2. Довести, що $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$.

Розв'язання. $\int x\,dx = \int x^1\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2} + C$.

Приклад 3. Довести, що $\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$.

Розв'язання. $\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \frac{x^3}{3} + C$.

Приклад 4. Довести, що $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x^2} = \int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$.

Приклад 5. Довести, що $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$.

Приклад 6. Обчислити $\int \sqrt{x}\, dx$.

Розв'язання. $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$.

Приклад 7. Обчислити $\int \frac{dx}{x^3}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3}\, dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$.

Приклад 8. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$.

Приклад 9. Обчислити $\int 2^x\, dx$.

Розв'язання. $\int 2^x\, dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Приклад 10. Обчислити $\int \frac{dx}{2^x}$.

Розв'язання. $\int \frac{dx}{2^x} = \int \frac{1}{2^x}\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}} + C = \frac{\frac{1}{2^x}}{-\ln 2} + C = -\frac{1}{2^x \ln 2} + C$

Приклад 11. Обчислити $\int \frac{dx}{x^2+9}$.

Розв'язання. Зведемо до табличного інтеграла при $a = 3$:

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{dx}{x^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + C.$$

Приклад 12. Обчислити $\int \frac{dx}{x^2-5}$.

Розв'язання. Зведемо до табличного інтеграла ($a = \sqrt{5}$):

$$\int \frac{dx}{x^2-5} = \int \frac{dx}{x^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x-\sqrt{5}}{x+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Приклад 13. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}}$.

Розв'язання. Використаємо табличний інтеграл ($a = -5$):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+(-5)}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+(-5)}\right| + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-5}\right| + C.$$

Приклад 14. Обчислити $\int \frac{dx}{4-x^2}$.

Розв'язання. Скористаємося табличним інтегралом при $a = 2$

$$\int \frac{dx}{4-x^2} = \int \frac{dx}{-\left(x^2-4\right)} = -\int \frac{dx}{x^2-2^2} = -\frac{1}{2\cdot 2} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = = -\frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C$$

Приклад 15. Обчислити невизначений інтеграл

$$\int (8x^7 - 3x^2 + 3x + 10)\, dx$$

Розв'язання.

$$\int 8x^7 dx - \int 3x^2\, dx + \int 3x dx + \int 10\, dx$$

$$= 8\int x^7 dx - 3\int x^2\, dx + 3\int x dx + 10\int dx$$

$$= 8\frac{x^8}{8} - 3\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 10x + C = x^8 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 10x + C$$

Приклад 16. Обчислити $\int \left(6x^2 + \pi \sin x\right) dx \qquad (\pi \approx 3{,}14)$.

Розв'язання.

Застосуємо послідовно властивості 6 та 5:

$$\int \left(6x^2 + \pi \sin x\right) dx = \int 6x^2\, dx + \int \pi \sin x\, dx = 6\int x^2\, dx + \pi \int \sin x\, dx.$$

Для обчислення інтегралів у правій частині рівності використовуємо табличні інтеграли ($n = 2$) і дістаємо

$$\int \left(6x^2 + \pi \sin x\right) dx = 6\frac{x^3}{3} + \pi(-\cos x) + C = 2x^3 - \pi \cos x + C.$$

Приклад 17. Обчислити $\int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right) dx$.

Розв'язання.

Застосовуємо властивості та формули з таблиці інтегралів:

$$\int \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{e^x}{2}\right) dx = \int 4\, dx - \int \frac{3}{x} dx + \int \frac{1}{2} e^x\, dx =$$

$$= 4\int dx - 3\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{2}\int e^x\,dx = 4x - 3\ln|x| + 0{,}5\,e^x + C.$$

Приклад 18. Обчислити $\int x\left(8x^2 + \frac{1}{x^3}\right)dx$.

Розв'язання.

Спочатку розкриємо дужки:

$$\int x\left(8x^2 + \frac{1}{x^3}\right)dx = \int\left(8x^2 \cdot x + \frac{x}{x^3}\right)dx = \int\left(8x^3 + \frac{1}{x^2}\right)dx.$$

Далі застосуємо властивості і табличний інтеграл відповідно при $n = 3$ та $n = -2$:

$$\int\left(8x^3 + \frac{1}{x^2}\right)dx = 8\int x^3\,dx + \int\frac{dx}{x^2} = 8\frac{x^4}{4} + \left(-\frac{1}{x}\right) + C = 2x^4 - \frac{1}{x} + C.$$

Приклад 19. Обчислити

$$\int \frac{\sqrt{x} - x^2e^x + x^5}{x^2}dx$$

Розв'язання.

$$\int \frac{\sqrt{x} - x^2e^x + x^5}{x^2}dx = \int\frac{\sqrt{x}}{x^2}dx - \int\frac{x^2e^x}{x^2}dx + \int\frac{x^5}{x^2}dx$$

$$= \int x^{-\frac{3}{2}}dx - \int e^x\,dx + \int x^3\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - e^x + \frac{x^4}{4} + C$$

$$= -2x^{-\frac{1}{2}} - e^x + \frac{x^4}{4} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} - e^x + \frac{x^4}{4} + C$$

Приклад 20. Обчислити

$$\int \left(1 - \sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)dx$$

Розв'язання.

Спочатку відкриємо дужки та зведемо подібні доданки:

$$\left(1 - \sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right) = 1 + \sqrt{x} - \sqrt{x} - x - x - x\sqrt{x} = 1 - 2x - x^{\frac{3}{2}}$$

Тоді

$$\int \left(1 - \sqrt{x} - x\right)\left(1 + \sqrt{x}\right)dx = \int\left(1 - 2x - x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$= \int (1)\,dx - \int (2x)\,dx - \int\left(x^{\frac{3}{2}}\right)dx = x - x^2 - \frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$$

Приклад 21. Обчислити $\int\frac{3x^4 - 2}{x^3}dx$.

Розв'язання.

Спочатку поділимо почленно (окремо) чисельник на знаменник:

$$\int \frac{3x^4-2}{x^3}\,dx = \int\left(\frac{3x^4}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)\,dx = \int\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)\,dx.$$

Далі застосуємо властивості і табличний інтеграл:

$$\int\left(3x-\frac{2}{x^3}\right)\,dx = 3\int x\,dx - 2\int\frac{dx}{x^3} = 3\frac{x^2}{2} - 2\left(-\frac{1}{2x^2}\right)+C = \frac{3}{2}x^2+\frac{1}{x^2}+C.$$

Приклад 22. Обчислити $\int\frac{x^2+5}{x^2-1}dx$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція $\frac{x^2+5}{x^2-1}$ – неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x^2+5}{x^2-1}=\frac{\left(x^2-1\right)+6}{x^2-1}=1+\frac{6}{x^2-1}$. Тоді, застосувавши властивості, матимемо

$$\int\frac{x^2+5}{x^2-1}dx = \int\left(1+\frac{6}{x^2-1}\right)dx = \int 1\,dx + 6\int\frac{1}{x^2-1}dx =$$

$$= x+6\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C = x+3\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$$

Приклад 23. Обчислити $\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx$.

Розв'язання.

Скориставшись відомою з тригонометрії формулою, дістанемо

$$\int\cos^2\frac{x}{2}\,dx = \int\frac{1+\cos x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int\left(1+\cos x\right)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos x\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(x+\sin x\right)+C.$$

Приклад 24. Обчислити $\int\sin 4x\,dx$.

Розв'язання.

Оскільки $\int\sin x\,dx = -\cos x+C$ (табличний інтеграл), то дістанемо

$$\int\sin 4x\,dx = \frac{1}{4}\left(-\cos 4x\right)+C = -\frac{1}{4}\cos 4x+C.$$

Приклад 25. Обчислити $\int\frac{dx}{\sin^2\frac{x}{5}}$.

Розв'язання.

Оскільки $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$ (табличний інтеграл), то дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{5}} = \int \frac{dx}{\sin^2 \frac{1}{5} x} = \frac{1}{\frac{1}{5}} \left(-\operatorname{ctg} \frac{1}{5} x \right) + C = -5 \operatorname{ctg} \frac{x}{5} + C .$$

Приклад 26. Обчислити $\int \frac{dx}{9x^2 + 1}$.

Розв'язання. Оскільки $\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg} x + C$ (табличний інтеграл), то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, маємо

$$\int \frac{dx}{9x^2 + 1} = \int \frac{dx}{(3x)^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3x + C$$

Приклад 27. Обчислити $\int (x-1)^4 \, dx$.

Розв'язання.

Оскільки $\int x^4 \, dx = \frac{x^5}{5} + C$, то

$$\int (x-1)^4 \, dx = \int (x + (-1))^4 \, dx = \frac{(x + (-1))^5}{5} + C = \frac{(x-1)^5}{5} + C .$$

Приклад 28. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x^2}}$.

Розв'язання.

Розглянемо табличний інтеграл, при $a = 2$: $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$.

Тоді, виконавши тотожне перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 - 3x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (\sqrt{3}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\sqrt{3}x}{2} + C .$$

Приклад 29. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x}}$.

Розв'язання. Оскільки $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$, то виконавши тотожні перетворення, дістанемо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-1 \cdot x + 1}} = \frac{1}{-1} \cdot 2\sqrt{-1 \cdot x + 1} + C = -2\sqrt{1 - x} + C$$

Приклад 30. Обчислити $\int \frac{dx}{(4x + 5)^2}$.

Розв'язання. Оскільки $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C$, то маємо

$$\int \frac{dx}{(4x+5)^2} = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4x+5}\right) + C = -\frac{1}{4(4x+5)} + C .$$

Приклад 31. Обчислити $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

Розв'язання.

Спочатку виділимо в знаменнику повний квадрат відносно x:

$$x^2+4x+13 = \left(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2\right)+9 = (x+2)^2+9$$

(скористалися формулою $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$). Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+13} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3} + C$$

(скористалися табличним інтегралом при $a=3$ ($b=2$)).

Приклад 32. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$.

Розв'язання.

Спочатку виділимо повний квадрат відносно x:

$$6x-x^2-8 = -\left(x^2-6x+8\right) = -\left[\left(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2\right)-1\right] =$$

$$= -\left[(x-3)^2-1\right] = 1-(x-3)^2$$

(скористалися формулою $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$). Обчислюємо інтеграл:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-3)^2}} = \arcsin(x-3) + C$$

(скористалися табличним інтегралом ($b=-3$)).

Приклад 33. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}}$$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[5]{2-5x}} = \int \frac{dx}{(2-5x)^{\frac{1}{5}}} = -\frac{1}{5}\int (2-5x)^{-\frac{1}{5}} d(2-5x) = -\frac{1}{5}\frac{(2-5x)^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + \boldsymbol{C}$$

$$= -\frac{\sqrt[5]{(2-5x)^4}}{\mathbf{4}} + \boldsymbol{C}$$

Приклад 34. Обчислити

$$\int \frac{dx}{1+9x}$$

Розв'язання.

Застосуємо спосіб внесення функції під знак диференціалу

$$\int \frac{dx}{1+9x} = \frac{1}{9}\int \frac{d(1+9x)}{1+9x} = \frac{1}{9} ln|1+9x| + C$$

Приклад 35. Обчислити

$$\int cos(4x-5)\,dx$$

Розв'язання.

$$\int cos(4x-5)\,dx = \frac{1}{4}\int \cos(4x-5)\,d(4x-5) = \frac{1}{4}\sin(4x-5) + C$$

Приклад 36. Обчислити $\int \frac{x-3}{5x-4}\,dx$.

Розв'язання.

Підінтегральна функція $\frac{x-3}{5x-4}$ – це неправильний раціональний дріб (степінь чисельника дорівнює степеню знаменника). Тому для інтегрування слід виділити цілу частину: $\frac{x-3}{5x-4} = \frac{\frac{1}{5}(5x-4)-\frac{11}{5}}{5x-4} = \frac{1}{5}\left(1-\frac{11}{5x-4}\right)$. Тоді отримаємо

$$\int \frac{x-3}{5x-4}\,dx = \frac{1}{5}\int\left(1-\frac{11}{5x-4}\right)dx = 0,2\left(\int dx - 11\int \frac{dx}{5x+(-4)}\right) =$$

$$= 0,2\left(x - 11\cdot\frac{1}{5}\ln\left|5x+(-4)\right|\right) + C = 0,2\,x - 0,44\,\ln\left|5x-4\right| + C.$$

Приклад 37. Обчислити $\int \frac{dx}{x^4+x^2}$.

Розв'язання.

Розкладемо підінтегральну функцію на доданки:

$$\frac{1}{x^4+x^2} = \frac{1}{\left(x^2+1\right)x^2} = \frac{\left(x^2+1\right)-x^2}{\left(x^2+1\right)x^2} =$$

$$= \frac{x^2+1}{\left(x^2+1\right)x^2} - \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2+1}.$$

Тоді матимемо

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C.$$

Приклад 38. Обчислити $\int \sin 5x \cos 2x \, dx$.

Розв'язання.

Скориставшись формулою

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$$

та властивостями невизначеного інтеграла, дістанемо

$$\int \sin 5x \cos 2x\, dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin(5x-2x)+\sin(5x+2x)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int(\sin 3x+\sin 7x)\,dx = \frac{1}{3}\left(\int \sin 3x\, dx + \int \sin 7x\, dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x - \frac{1}{7}\cos 7x\right) + C = -\frac{1}{6}\cos 3x - \frac{1}{14}\cos 7x + C.$$

Приклад 39. Обчислити

$\int (5x^3 + \sqrt{x} - \frac{4}{x} + 2sinx)\, dx$

Розв'язання.

Використовуючи властивість лінійності, розіб'ємо даний інтеграл на простіші інтеграли, кожний з яких знайдемо за допомогою таблиці інтегралів.

$$\int (5x^3 + \sqrt{x} - \frac{4}{x} + 2sinx)\, dx = 5\int x^3 dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx - \int \frac{4}{x} dx + 2\int sinx dx =$$

$$= 5\frac{x^4}{4} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4ln|x| - 2cosx + C = \frac{5x^4}{4} + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 4ln|x| - 2cosx + C$$

Приклад 40. Обчислити

$$\int \left(3^x - \frac{5}{sin^2 x}\right) dx$$

Розв'язання.

Використовуючи властивість лінійності, розіб'ємо даний інтеграл на два табличні інтеграли.

$$\int \left(3^x - \frac{5}{sin^2 x}\right) dx = \int 3^x\, dx - \int \frac{5}{sin^2 x} dx = \frac{3^x}{ln3} + 5ctgx + C$$

Приклад 41. Обчислити невизначений інтеграл: $\int \frac{dx}{x^2+5}$.

Розв'язання.

Даний інтеграл є табличним.

$$\int \frac{dx}{x^2+5} = \int \frac{dx}{x^2+\sqrt{5}^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} arctg \frac{x}{\sqrt{5}} + C$$

Приклад 42. Обчислити

$\int \left(sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$

Розв'язання.

Після піднесення підінтегральної функції в квадрат і використання основної тригонометричної тотожності і формули синуса подвійного кута, отримаємо

$$\int \left(sin\frac{x}{2} - cos\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int \left(sin^2\frac{x}{2} - 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} + cos^2\frac{x}{2}\right)dx = \int (1 - sinx)\,dx$$
$$= x + cosx + C$$

Приклад 43. Обчислити

$\int \frac{x^3+3x+5}{\sqrt{x}}dx.$

Розв'язання.

Поділимо почленно чисельник на знаменник і використаємо властивості степеня. Тоді

$$\int \frac{x^3 + 3x + 5}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{x^3}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{3x}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{5}{\sqrt{x}}dx =$$
$$= \int x^{\frac{5}{2}}dx + 3\int x^{\frac{1}{2}}dx + 5\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + 2x^{\frac{3}{2}} + 10x^{\frac{1}{2}} + C$$

Приклад 44. Обчислити інтеграл:

$$\int \frac{dx}{sin^2xcos^2x}$$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{sin^2xcos^2x} = \int \frac{1}{sin^2xcos^2x}dx = \int \frac{sin^2x + cos^2x}{sin^2xcos^2x}dx$$
$$= \int \frac{sin^2x}{sin^2xcos^2x}dx + \int \frac{cos^2x}{sin^2xcos^2x}dx = \int \frac{dx}{cos^2x} + \int \frac{dx}{sin^2x}$$
$$= tgx - ctgx + C$$

Обчислити інтеграли методом підстановки (заміна змінної)

Приклад 45. Обчислити невизначені інтеграли:

а) $\int x^2\sqrt{x-1}dx$; б) $\int \frac{ln^2x}{x}dx$

Розв'язання.

а) Зробимо підстановку $t^2 = x - 1$. Тоді підінтегральний вираз спрощується, тому що $\sqrt{x-1} = \sqrt{t^2} = t$. Знайдемо *x* і *dx*:

$$\int x^2\sqrt{x-1}\,dx = \left|\begin{matrix} t^2 = x-1; x = t^2+1; & t = \sqrt{x-1} \\ dx = 2tdt; & x^2 = (t^2+1)^2 \end{matrix}\right| == \int (t^2+1)^2 \cdot t \cdot 2t\,dt$$

$$= 2\int (t^6 + 2t^4 + t^2)\,dt = \frac{2}{7}t^7 + \frac{4}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C =$$

$$= \frac{2}{7}\left(\sqrt{x-1}\right)^7 + \frac{4}{5}\left(\sqrt{x-1}\right)^5 + \frac{2}{3}\left(\sqrt{x-1}\right)^3 + C$$

б) Помітимо, що $\frac{dx}{x} = \frac{1}{x}dx = (lnx)'dx = d(lnx)$. Внесемо $\frac{1}{x}$ під знак диференціалу:

$$\int \frac{ln^2 x}{x}dx = \int ln^2 x\frac{dx}{x} = \int ln^2 x d(lnx) = |lnx = t| = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}ln^3 x + C$$

Приклад 46. Обчислити

$$\int \frac{x^2}{x^6+16}dx$$

Розв'язання.

Помітимо, що

$$x^2 dx = \frac{1}{3}\cdot 3x^2 dx = \frac{1}{3}(x^3)'dx = \frac{1}{3}d(x^3)$$

Внесемо x^2 під знак диференціалу:

$$\int \frac{x^2}{x^6+16}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{x^6+16}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{(x^3)^2+4^2} = |x^3 = t| = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{(t)^2+4^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}arctg\frac{t}{4} + C$$

$$= \frac{1}{12}arctg\frac{x^3}{4} + C$$

Приклад 47. Обчислити $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Розв'язання.

Оскільки $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то отримаємо

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \left|\begin{matrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx = \frac{dx}{x} \end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln x} + C$$

Приклад 48. Обчислити $\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\cos x\ dx}{\sin^2 x} = \left| \begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\ dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C$$

Приклад 49. Обчислити $\int \frac{x\ dx}{x^2 - 1}$.

Розв'язання.

Оскільки $\left(x^2 - 1\right)' = 2x$, то виконавши тотожне перетворення підінтегральної функції, дістанемо

$$\int \frac{x\ dx}{x^2 - 1} = \int \frac{2x\ dx}{2\left(x^2 - 1\right)} = \left| \begin{matrix} t = x^2 - 1 \\ dt = 2x\ dx \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2 - 1\right| + C.$$

Приклад 50. Обчислити

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \left| \begin{matrix} t^2 = x+1; & t = \sqrt{x+1} \\ x = t^2 - 1; & dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2t}{1+t} dt = 2\int \frac{1+t-1}{1+t} dt$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2\int dt - 2\int \left(\frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= 2t - 2ln|1+t| + C == 2\sqrt{x+1} - 2ln\left|\sqrt{x+1} + 1\right| + C$$

Приклад 51. Обчислити

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x + 1}}$$

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} = \left| \begin{matrix} t^2 = e^x + 1; & e^x = t^2 - 1 \\ 2tdt = e^x dx, & dx = \frac{2tdt}{e^x} = \frac{2tdt}{t^2-1} \end{matrix} \right| =$$

$$= \int \frac{2tdt}{(t^2-1)t} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{(t^2-1)} = 2 \cdot \frac{1}{2} ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right| + C$$

Приклад 52. Обчислити $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-3} = \left|\begin{matrix}\sqrt{x}=t\\ x=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right| = \int \frac{t\cdot 2t\,dt}{t^2-3} = 2\int \frac{t^2dt}{t^2-3} = 2\int \frac{\left(t^2-3\right)+3}{t^2-3}dt =$$

$$= 2\int\left(1+\frac{3}{t^2-3}\right)dt = 2\left(\int dt + 3\int \frac{dt}{t^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\right) =$$

$$= 2\left(t+3\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|\right)+C = 2t+\sqrt{3}\ln\left|\frac{t-\sqrt{3}}{t+\sqrt{3}}\right|+C =$$

$$= 2\sqrt{x}+\sqrt{3}\,\ln\left|\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}\right|+C.$$

Приклад 53. Обчислити інтеграл

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$$

Розв'язання.

Перетворимо вираз, виділяючи повний квадрат за формулою $(a+b)^2 = a^2 +2ab + b^2$. Тоді отримаємо

$$x^2+4x+5=(x^2+2\,2\,x+4)+1=(x+2)^2+1$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1} = \left|\begin{matrix}x+2=t\\ x=t-2\\ dx=dt\end{matrix}\right| = \int \frac{dt}{t^2+1} = arctg\,t+C =$$
$$= arctg(x+2)+C$$

Обчислення інтегралів методом інтегрування частинами

$$\int udv = uv - \int vdu$$

Приклад 54. Обчислити

$$\int arctgx\,dx$$

Розв'язання.

Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int arctgxdx = \left| \begin{matrix} u = arctgx \implies du = \dfrac{1}{1+x^2}dx \\ dv = dx \implies v = \int dx \implies v = x \end{matrix} \right| = xarctgx - \int \frac{x}{1+x^2}dx$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}ln(1+x^2) + C$$

Приклад 55. Обчислити

$$\int xcosx\,dx$$

Розв'язання.

Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int x \cdot cosx\,dx = \left| \begin{matrix} u = x & \implies du = dx \\ dv = cosxdx;\ v = \int cosxdx & \implies v = sinx \end{matrix} \right|$$

$$= xsinx - \int sinxdx = xsinx + cosx + C$$

Приклад 56. Обчислити

$$\int (x^2+1)e^x\,dx$$

Розв'язання.

Застосуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int (x^2+1) \cdot e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2+1 & \implies du = 2xdx \\ dv = e^x dx;\ v = \int e^x dx & \implies v = e^x \end{matrix} \right|$$

$$= (x^2+1) \cdot e^x - 2\int x\,e^x dx$$

Скористаємося ще раз цією формулою:

$$\int x\,e^x dx = \left| \begin{matrix} u = x & \implies du = dx \\ dv = e^x dx;\ v = \int e^x dx & \implies v = e^x \end{matrix} \right| = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

Отже,

$$\int (x^2+1)e^x\,dx = (x^2+1) \cdot e^x - 2 \cdot (xe^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 3) + C$$

Приклад 57. Обчислити

$$\int x^2 sin3x\, dx$$

Розв'язання.

$$\int x^2 \cdot sin3x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 & \Longrightarrow du = 2xdx \\ dv = sin3xdx;\ v = \int sin3xdx & \Longrightarrow v = -\frac{1}{3}cos3x \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x - \int \left(-\frac{1}{3}cos3x\right) \cdot 2xdx$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3}\int xcos3x\, dx$$

Проміжні обчислення розташовуємо між вертикальними дужками. До останнього інтеграла застосовуємо формулу інтегрування частинами:

$$\int xcos3x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x & \Longrightarrow du = dx \\ dv = cos3xdx;\ v = \int cos3xdx & \Longrightarrow v = \frac{1}{3}sin3x \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{1}{3}xsin3x - \frac{1}{3}\int sin3x\, dx = \frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x$$

Таким чином, отримаємо:

$$\int x^2 \cdot sin3x\, dx = -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}xsin3x + \frac{1}{9}cos3x\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}x^2 cos3x + \frac{2}{9}xsin3x + \frac{2}{27}cos3x + C$$

Приклад 58. Обчислити

$$\int x^3 lnx\, dx$$

Розв'язання.

$$\int x^3 \cdot lnx\, dx = \left| \begin{matrix} u = lnx & \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx;\ v = \int x^3 dx & \Longrightarrow v = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right|$$

$$= \frac{x^4 lnx}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4 lnx}{4} - \int x^3 dx = \frac{x^4 lnx}{4} - \frac{1}{16}x^4 + C$$

Приклад 59. Обчислити

$$\int x \cdot arctgx\, dx$$

Розв'язання.

$$\int x \cdot arctgx dx = \left| \begin{matrix} u = arctgx, & du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = xdx, & v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{2} \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{x^2}{1+x^2} dx \right) = \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2 \cdot acrtgx - \int dx + \int \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{1}{2}(x^2 \cdot acrtgx - x + arctgx) + C.$$

Приклад 60. Обчислити $\int (3x-1)e^x\, dx$.

Розв'язання.

Покладемо $u = 3x-1$, $dv = e^x\, dx$. Тоді $du = (3x-1)'\, dx = 3dx$,

$v = \int dv = \int e^x\, dx = e^x$

$$\int (3x-1)e^x\, dx = (3x-1)e^x - \int e^x 3dx = (3x-1)e^x - 3\int e^x\, dx =$$

$$= (3x-1)e^x - 3e^x + C = e^x(3x-4) + C.$$

Приклад 61. Обчислити $\int xe^{2x}\, dx$.

Розв'язання.

Покладемо $u = x$, $dv = e^{2x}\, dx$. Тоді $du = dx$, $v = \int e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int xe^{2x}\, dx = x\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\, dx = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}e^{2x} + C = \frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + C.$$

Приклад 62. Обчислити $\int \ln x\, dx$.

Розв'язання.

Покладемо $u = \ln x$, $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x}\, dx$, $v = \int dx = x$.

$$\int \ln x\ dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\ dx = x\ln x - \int dx =$$

$$= x\ln x - x + C = x\left(\ln x - 1\right) + C\ .$$

Приклад 63. Обчислити невизначений інтеграл

$$\int xlnx\ dx$$

Розв'язання.

$$\int xlnx\ dx = \begin{vmatrix} u = lnx & \Longrightarrow\ du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx;\ v = \int xdx & \Longrightarrow v = \frac{x^2}{2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{x^2 lnx}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^2 lnx}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2 lnx}{2} - \frac{1}{4}x^2 + C$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Знайти загальну первісну:

1) $\int 5dx$;	2) $\int 2x^2 dx$;	3) $\int 2x^{-1}dx$;
4) $\int (3x-4)^{-\frac{1}{4}}dx$;	5) $\int \frac{1}{4}x^3 dx$;	6) $\int (3x^3 + 4x^{\frac{1}{2}} + 5)dx$;
7) $\int (2x-3)^{\frac{1}{3}}dx$;	8) $\int 4x^{-\frac{1}{3}}dx$;	9) $\int (7x - x^{-\frac{3}{4}})dx$;
10) $\int (3x-1)^{-2}dx$;	11) $\int e^{-5x}dx$;	12) $\int 2\cdot 7^{4x-3}dx$;
13) $\int 6\cdot 5^{-2x}dx$;	14) $\int 2^{4x+5}dx$;	15) $\int (2x+3)^2 dx$;
16) $\int 5\sqrt[5]{x^4}$;	17) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;	18) $\int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx$.

2. Застосовуючи підстановку (заміну змінної), знайти інтеграли:

1) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}dx$;	2) $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)}dx$;	3) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$;
4) $\int \frac{\ln xdx}{x\sqrt{1+\ln x}}$;	5) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;	6) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.
7) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$	8) $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx$	9) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$
10) $\int \frac{dx}{2\cdot\sqrt{2-x}}$	11) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-2}}dx$	12) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}dx$

3. Застосовуючи метод інтегрування частинами, знайти наступні інтеграли:

1) $\int \ln x dx$;	2) $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$;	3) $\int \sqrt{x} \ln^2 x dx$;
4) $\int x e^{-x} dx$;	5) $\int x \cos x dx$;	6) $\int x \sin 2x dx$.
7) $\int x \cos^2 x dx$	8) $\int x^3 e^x dx$	9) $\int \ln(x^2+1) dx$
10) $\int x \cdot \cos 4x dx$	11) $\int 3x \cdot \cos x dx$	12) $\int x \cdot \cos 2x dx$

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Означення 1. ***Інтегральною сумою*** для функції $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ називається сума вигляду

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

де $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$

Означення 2. ***Визначеним інтегралом*** від функції $f(x)$ на відрізку $[a,\ b]$ називається границя інтегральної суми (1) при умові, що довжина найбільшого із елементарних відрізків прямує до нуля

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k\ . \tag{2}$$

Геометрично інтегральна сума або визначений інтеграл (у даному випадку) виражають площу криволінійної трапеції.

Основні властивості визначеного інтеграла

1^0. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$;

2^0. $\int_a^a f(x)dx = 0$;

3^0. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$;

4^0. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

5^0. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx, \quad c \in [a;b]$;

6^0. Якщо m та M – відповідно найменше і найбільше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a;b]$ $(a<b)$, тобто $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

7^0. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt$ і т.д.

Правила обчислення визначеного інтеграла

Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$, то визначений інтеграл обчислюється за формулою

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)\cdot \tag{3}$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі. Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$. Зробимо підстановку $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна разом з своєю похідною $\varphi'(t)$ на $\alpha \le t \le \beta$, $\varphi(a)=\alpha$, $\varphi(b)=\beta$. Тоді, якщо складна функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha,\beta]$, то має місце рівність

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (4)$$

Інтегрування частинами. Нехай функції $u=u(x)$ і $v=v(x)$ мають неперервні похідні на відрізку $[a,b]$. Тоді має місце формула

$$\int_a^b udv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (5)$$

Деякі застосування визначеного інтегралу.

1. Обчислення площ плоских фігур

1^0. Площа криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y=f(x)\ge 0$, $y=0$, $x=a$, $x=b$ обчислюється за формулою

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (6)$$

2^0. Площа фігури, обмеженої лініями $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ ($f_2(x)\ge f_1(x)$), $x=a$, $x=b$, знаходиться за формулою

$$S=\int_a^b \big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx. \qquad (7)$$

2. Об'єм тіла обертання

Об'єм тіла, що утворене обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y=f(x)$, прямими $x=a$ і $x=b$ та віссю Ox ($y=0$), обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx. \qquad (8)$$

Якщо фігура, обмежена кривими $y_1=f_1(x)$ і $y_2=f_2(x)$ $(0\le f_1(x)\le f_2(x))$ і прямими $x=a$ і $x=b$, обертається навколо осі Ox, то об'єм тіла обертання обчислюється за формулою

$$V=\pi\int_a^b (y_2^2-y_1^2)dx. \qquad (9)$$

3. Обчислення роботи

Нехай під дією сили $F=F(x)$ матеріальна точка рухається вздовж прямої лінії. Якщо напрям руху збігається з напрямом сили, то робота виконана цією силою при переміщені точки від точки a до точки b, обчислюється за формулою

$$A = \int_a^b F(x)dx. \qquad (10)$$

4. Обчислення шляху при нерівномірному русі

Нехай час руху змінюється від t_0 до T. При рівномірному русі, пройдений шлях дорівнює добутку швидкості v на час руху $T - t_0$, тобто

$$s = v \cdot (T - t_0),\ v - const.$$

У випадку нерівномірного руху ця формула не дійсна. Розіб'ємо інтервал $[t_0; T]$ на частинні інтервали $\Delta t_1 = t_1 - t_0$; $\Delta t_2 = t_2 - t_1$; …, $\Delta t_n = T - t_{n-1}$. При малих Δt_i, $i = 1,2,...,n$ швидкість $v_t = |v(t)|$ буде змінюватися не суттєво, тому її можна вважати сталою. Обчислимо на кожному частинному інтервалі швидкість $|v(c_i)|$, $t_{i-1} \le c_i \le t_i$ і знайдемо величину пройденого шляху: $\Delta S_i \approx |v(c_i)| \cdot \Delta t_i$, $i = 1,2,...,n$. Точне значення отримаємо як границю суми, тобто

$$S = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} |v(c_i)| \cdot \Delta t_i$$

У правій частині знаходиться границя інтегральної суми функції $v(t)$ на інтервалі $[t_0; T]$, що дорівнює відповідному визначеному інтегралу

$$S = \int_{t_0}^{T} v(t)dt \qquad (11)$$

Розв'язування завдань

Приклад 1. Обчислити визначений інтеграл $\int_1^2 x^2 dx$

Розв'язання.

Спочатку знаходимо первісну функцію, потім за формулою Ньютона-Лейбніца обчислюємо визначений інтеграл.

$$\int_1^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

Приклад 2. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^{\pi} sin\, x \ \ dx$

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi} sin\, x \ \ dx = -cosx|_0^{\pi} = -cos\pi - (-cos0) = -(-1) + 1 = 2$$

Приклад 3. Обчислити визначений інтеграл, користуючись властивостями, таблицею інтегралів та формулою Ньютона-Лейбніца.

$$\int_0^1 (3x^2 + 8)dx$$

Розв'язання.

$$\int_0^1 (3x^2+8)dx = \int_0^1 (3x^2)dx + \int_0^1 8dx = \left(3\cdot\frac{x^3}{3}+8\cdot x\right)\Big|_0^1 = 1^3+8\cdot 1-0 =$$
$$= 9$$

Приклад 4. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_{-1}^{2}(2x+3x^2+1)dx$$

Розв'язання.

$$\int_{-1}^{1}(2x+3x^2+1)dx = \left(2\cdot\frac{x^2}{2}+3\cdot\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = (x^2+x^3+x)|_{-1}^{1} =$$
$$= (1^2+1+1)-\big((-1)^2+(-1)^3+(-1)\big) = 4$$

Приклад 5. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_2^3 (5x^2-4x+11)dx$$

Розв'язання.

$$\int_2^3 (5x^2-4x+11)dx = \left(5\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+11x\right)\Big|_2^3 =$$
$$= \left(5\cdot\frac{3^3}{3}-4\cdot\frac{3^2}{2}+11\cdot 3\right)-\left(5\cdot\frac{2^3}{3}-4\cdot\frac{2^2}{2}+11\cdot 2\right) =$$
$$= (45-18+33)-\left(\frac{40}{3}-8+22\right) = \frac{98}{3} = 32\frac{2}{3}$$

Приклад 6. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$$

Розв'язання.

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = arcsin\frac{x}{2}\Big|_1^2 = arcsin1 - arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Приклад 7. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^1 (3x+1)^7 dx$$

Розв'язання.

Застосуємо метод внесення функції під знак диференціалу

$$\int_0^1 (3x+1)^7 dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (3x+1)^7 d(3x+1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x+1)^8}{8}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{24}((3\cdot 1+1)^8 - (3\cdot 0+1)^8) = \frac{1}{24}(4^8 - 1^8) = \frac{65535}{24}$$

Приклад 8. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right) dx$$

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right) dx = -\frac{1}{5}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right) d\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right)$$

$$= -\frac{1}{5}\cdot\left(-cos\left(\frac{3\pi}{4} - 5x\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{5}\cdot\left(cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}\right) - cos\left(\frac{3\pi}{4} - 0\right)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\left(cos\frac{\pi}{2} - cos\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{5}\left(0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Приклад 9. Обчислити визначений інтеграл

$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}} dx$

Розв'язання.

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[5]{(2x-1)^4}} dx = \int_1^3 (2x-1)^{-\frac{4}{5}} dx = \frac{1}{2}\int_1^3 (2x-1)^{-\frac{4}{5}} d(2x-1) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-1)^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}}\Big|_1^3 = \frac{5}{2}\cdot\left((2\cdot 3-1)^{\frac{1}{5}} - (2\cdot 1-1)^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{5}{2}\left(\sqrt[5]{5} - 1\right)$$

Приклад 10. Обчислити визначений інтеграл

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (sinx - 3cosx)\, dx$

Розв'язання.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (sinx - 3cosx)\, dx = (-cosx - 3sinx)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= (-cos\pi - 3sin\pi) - \left(-cos\frac{\pi}{2} - 3sin\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 + 0 + 3 = 4$$

Приклад 11. Обчислити інтеграл методом внесення функції під знак диференціала

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{sinx} cosx\, dx$$

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi/2} e^{\sin x}\cos x dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} d(\sin x) = \int_0^1 e^y dy = e^y\Big|_0^1 = e-1.$$

Обчислення визначеного інтеграла методом заміни змінної

Приклад 12. Обчислити визначений інтеграл

$\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\, dx$

Розв'язання.

Підкореневий вираз замінимо через нову змінну t:

$$\int_1^3 x^3\sqrt{x^2-1}\, dx = \left|\begin{matrix} t = x^2-1; & x^2 = t+1;\ x=1 \Rightarrow t = 1-1 = 0 \\ dt = 2xdx; dx = \dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}dt; & x=3 \Rightarrow t = 3^2-1 = 8 \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_0^8 \frac{\sqrt{t+1}^3\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}} dt = \frac{1}{2}\int_0^8 (t+1)\sqrt{t}\, dt = \frac{1}{2}\int_0^8 (t^{\frac{3}{2}} + t^{\frac{1}{2}})\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^8$$

$$= \frac{464\sqrt{2}}{15}$$

Приклад 13. Обчислити визначений інтеграл

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2sinx}{(1-cosx)^2} dx$

Розв'язання.

За формулою заміни змінної маємо

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2sinx}{(1-cosx)^2} dx = \left|\begin{matrix} t = 1-cosx; & x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1-cos\dfrac{\pi}{2} = 1 \\ dt = sinxdx; dx = \dfrac{1}{sinx}dt; & x = \pi \Rightarrow t = 1-cos\pi = 2 \end{matrix}\right|$$

$$= \int_1^2 \frac{2dt}{t^2} = -2t^{-1}|_1^2 = -1+2 = 1$$

Приклад 14. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{ln6} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx$$

Розв'язання.

$$\int_0^{ln6} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+3}}dx = \left| \begin{matrix} t = e^x + 3, & x = 0 \Rightarrow t = e^0 + 3 = 4 \\ dt = e^x dx, & x = ln6 \Rightarrow t = e^{ln6} + 3 = 9 \end{matrix} \right| = \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{t}}dt$$

$$= 2\sqrt{t}\Big|_4^9 = 2\left(\sqrt{9} - \sqrt{4}\right) = 2$$

Приклад 15. Обчислити визначений інтеграл

$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}dx$

Розв'язання.

$$\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}}dx = \left| \begin{matrix} t^2 = 2x+1;\ t_1 = 1, t_2 = 3 \\ x = \frac{t^2-1}{2} \\ dx = \frac{2t}{2}dt = tdt \end{matrix} \right| = \int_1^3 \frac{t}{1+t}dt =$$

$$= \int_1^3 \frac{t+1-1}{1+t}dt = \int_1^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt = t - ln|t+1|\Big|_1^3 = 3 - ln4 - (1 - ln2)$$

$$= 2 - ln2$$

Обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами

$$\int_a^b udv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Приклад 16. Знайти інтеграл

$$\int_2^4 x \cdot e^{2x}dx$$

Розв'язання.

$$\int_2^4 x \cdot e^{2x}dx = \left| \begin{matrix} u = x & \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}dx;\ v = \int e^{2x}dx & \Rightarrow v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_2^4 - \frac{1}{2}\int_2^4 e^{2x}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x}\Big|_2^4 - \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_2^4 = \frac{7}{4}e^8 - \frac{3}{4}e^4$$

Приклад 17. Знайти інтеграл $\int_0^{\frac{1}{3}} x \cdot arctg3xdx$**.**

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{1}{3}} x \cdot arctg3xdx = \left| \begin{matrix} u = arctg3x \implies du = \dfrac{3}{1+9x^2}dx \\ dv = xdx \implies v = \int xdx \implies v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{x^2}{2} arctg3x\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{x^2}{2} \cdot \frac{3}{1+9x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} arctg1 - \frac{3}{2} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{9} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{9x^2}{1+9x^2} dx = \frac{1}{18} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1+9x^2-1}{1+9x^2} dx =$$

$$= \frac{\pi}{72} - \frac{1}{6} \int_0^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{1+9x^2}\right) dx = \frac{\pi}{72} - \frac{1}{6} \cdot \left(x - \frac{1}{9} \cdot 3arctg3x\right)\Big|_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{72} - \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot arctg3 \cdot \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{\pi}{72} - \frac{1}{18} + \frac{1}{18} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{36} - \frac{1}{18}$$

Приклад 18. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cos2x\, dx$$

Розв'язання.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot cos2x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x \quad \implies du = dx \\ dv = cos2xdx;\ v = \int cos2xdx \implies v = \dfrac{1}{2} sin2x \end{matrix} \right| =$$

$$= \left(\frac{x}{2} sin2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin2xdx = \frac{1}{2}\left(xsin2x + \frac{1}{2} cos2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{2} sin\pi + \frac{1}{2} cos\pi\right) - \left(0 \cdot sin0 + \frac{1}{2} cos0\right)\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

Приклад 19.

$$\int_1^2 x^2 \cdot lnx\, dx$$

Розв'язання.

$$\int_1^2 x^2 \cdot lnx\, dx = \left| \begin{matrix} u = lnx & \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^2 dx;\ v = \int x^2 dx & \Longrightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{matrix} \right| = \frac{x^3 lnx}{3}\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3x}\, dx$$

$$= \frac{x^3 lnx}{3}\Big|_1^2 - \frac{x^3}{9}\Big|_1^2 = \frac{8ln2}{3} - \frac{ln1}{3} - \left(\frac{8}{9} - \frac{1}{9}\right) = \frac{8ln2}{3} - \frac{7}{9}$$

Приклад 20. Обчислити визначений інтеграл

$$\int_0^\pi x \cdot sinx\, dx$$

Розв'язання.

$$\int_0^\pi x \cdot sinx\, dx = \left| \begin{matrix} u = x & \Longrightarrow du = dx \\ dv = sinxdx;\ v = \int sinxdx & \Longrightarrow v = -cosx \end{matrix} \right| =$$

$$= (-xcosx)|_0^\pi - \int_0^\pi (-cosx)\, dx = (-xcosx + sinx)|_0^\pi =$$

$$= \big((-\pi cos\pi + sin\pi) - (0 \cdot cos0 + sin0)\big) = -\pi \cdot (-1) = \pi$$

Застосування визначеного інтегралу

Приклад 21. Знайти приріст чисельності популяції і середню швидкість розмноження бактерій за проміжок часу від t_1=10 *хв* до t_2=120 *хв,* якщо швидкість приросту визначається формулою

$$V(t) = Ce^{kt},$$

де *C=10000* бактерій – початкова чисельність, $k=0{,}0015c^{-1}$ – показник швидкості розмноження.

Розв'язання.

Приріст числа бактерій ΔN за проміжок часу $[t_1, t_2]$ дорівнює

$$\Delta N = \int_{t_1}^{t_2} Ce^{kt} dt,$$

а середня швидкість розмноження на проміжку $[t_1, t_2]$ $V_{сер}$

$$V_{сер} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} Ce^{kt} dt = \frac{\Delta N}{t_2 - t_1}$$

Переходячи до проміжків часу у секундах (оскільки показник швидкості розмноження задано у $с^{-1}$), отримуємо

$$\Delta N = \int_{600}^{7200} 10000 \cdot e^{0,0015t} dt = \frac{10000}{0,0015} \cdot e^{0,0015t} \Big|_{600}^{7200} = \frac{10000}{0,0015} \cdot \left(e^{0,00157200} - e^{0,0015600}\right) =$$

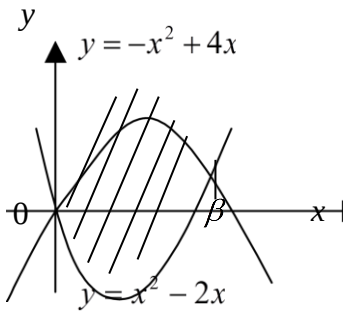
$$= \frac{10000}{0,0015} \cdot \left(e^{10,8} - e^{0,9}\right) \approx 3267889435\ 55$$

$$V_{сер} = \frac{\Delta N}{t_2 - t_1} = \frac{326788943555}{7200 - 600} = \frac{326788943555}{6600} \approx 49513476(c^{-1})$$

Таким чином, приріст числа бактерій становить 326788943555 штук, середня швидкість розмноження становить приблизно 49513476 бактерій на секунду.

Зауважимо, що число бактерій є, очевидно, дискретною величиною, для якої, безпосереднє застосування визначеного інтегралу є некоректним, оскільки в інтегральному численні припускається неперервна змінна. Але при дослідженні явищ з великими числами (як чисельність популяції бактерій) дискретністю можна знехтувати. При цьому слід мати на увазі випадковий характер таких масових явищ і розуміти, що отримане чисельне значення не можна розглядати як абсолютно точне.

Приклад 22. Обчислити площу фігури обмежену лініями $y = x^2 - 2x$, $y = -x^2 + 4x$.



Розв'язання.

Побудуємо дві параболи: $y = x^2 - 2x$ і $y = -x^2 + 4x$ (див. рис.). Знайдемо абсциси перетину даних ліній. Розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ y = -x^2 + 4x, \end{cases}$$

дістанемо $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Це і є межі інтегрування.

За формулою (7) знаходимо площу:

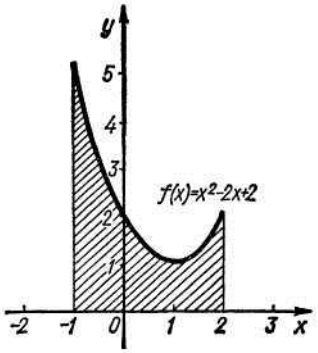
$$S = \int_0^3 \left[(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^3 (-2x^2 + 6x) dx =$$

$$= \left(-\frac{2}{3} x^3 + 3x^2 \right) \Big|_0^3 = -18 + 27 = 9 \text{ (кв. од.)}$$

Приклад 23. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$ та вісю *Ox*.

Розв'язання.

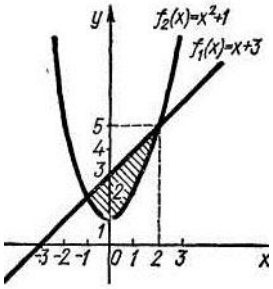
Побудуємо параболу та прямі. Ця плоска фігура являє собою криволінійну трапецію, тому площу обчислюють за формулою (6):



$$S=\int_{-1}^{2}(x^2-2x+2)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=6.\text{(кв. один.)}$$

Приклад 24. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y=f_1(x)=x+3$ і $y=f_2(x)=x^2+1$.

Розв'язання.

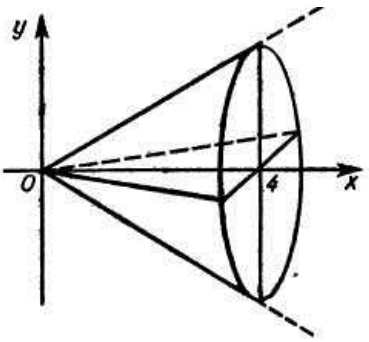


Розв'язавши рівняння $x+3=x^2+1$, знайдемо абсциси точок перетину графіків функцій f_1 і f_2: $x_1=-1$ і $x_2=2$. Використовуючи формулу (7), обчислимо площу фігури:

$$S=\int_{-1}^{2}(x+3-(x^2+1))dx=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx=-\frac{1}{3}x^3\Big|_{-1}^{2}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{2}+2x\Big|_{-1}^{2}=\frac{9}{2}.$$

Приклад 25. Нехай фігура, обмежена прямими $y=\frac{3}{4}x$, $x=4$ і віссю *Ox*, обертається навколо осі *Ox*. Одержане тіло обертання – конус. Знайти його об'єм.

Розв'язання.

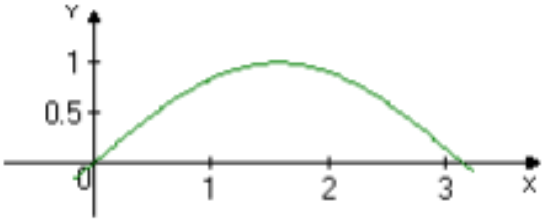


Межами інтегрування є абсциси точок перетину прямих $y=\frac{3}{4}x$ і x=4 з віссю *Ox*. Знаходимо з системи $\begin{cases} y=\frac{3}{4}x, \\ y=0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x=4, \\ y=0 \end{cases}$ Отже, $a=0, b=4$ Далі знаходимо об'єм $V=\int_0^4 \pi\left(\frac{3}{4}x\right)^2 dx=\frac{9}{16}\pi\frac{x^3}{3}\Big|_0^4=\frac{9}{4^2}\frac{4^3}{3}\pi=12\pi$.

Приклад 26. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням дуги синусоїди $y=\sin x$ навколо осі *Ox* для $x \in [0;\pi]$.

Розв'язання.

Візьмемо дугу синусоїди, зображену на рисунку для $x \in [0;\pi]$. Згідно формули (8), отримаємо:



$$V = \pi \int_0^{\pi} sin^2 x\, dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - cos2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \left(x - \frac{1}{2} sin2x \right) \Big|_0^{\pi} =$$

$$= \frac{\pi^2}{2} (\text{куб. один})$$

Приклад 27.

Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $v(t) = 0{,}1t^3$ (м/с). Обчислити шлях, пройдений тілом за перші 10 секунд.

Розв'язання.

Згідно формули (11):

$$S = \int_0^{10} 0{,}1t^3\, dt = 0{,}1 \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_0^{10} = \frac{10^4}{40} = 250 \text{ (м)}.$$

Приклад 28.

Тіло рухається прямолінійно із швидкістю $v(t) = (3t^2 + 4t + 1)$ (м/с). Знайти шлях, пройдений тілом за три секунди.

Розв'язання.

$$S = \int_0^3 (3t^2 + 4t + 1)\, dt = (t^3 + 2t^2 + t)_0^3 = 48 \text{ (м)}.$$

Приклад 29.

Яку роботу потрібно виконати, щоб розтягнути пружину на 5 см, якщо сила 100 Н розтягує її на 1 см?

Розв'язання.

Згідно закону Гука, пружна сила F, яка діє на пружину зростає пропорційно розтягу *x* пружини, тобто F = *kx*. Для визначення коефіцієнта пропорційності, маємо F = 100 Н, x = 0,01м.

Звідси $100 = 0{,}01k$, тобто k = 10000.

Отже, F = 10000*x*. Тоді шукана робота, згідно формули (10), рівна

$$A = \int_0^{0{,}05} 10000x\, dx = 5000x^2 |_0^{0{,}05} = 12{,}5 \text{ Дж}.$$

Приклад 30.

Яка робота виконується під час стиснення гвинтової пружини на 5 *см*, якщо для стиснення пружини на 1 *см* витрачається сила 4*H*. Вважається, що сила пропорційна переміщенню (стисненню)?

Розв'язання.

За умовою $F = kx$, де k – стала. При $x = 0.01$ *м*, $F = 4H$. Тому з рівності $4 = 0.01k$ знаходимо $k = 400$. Таким чином, $F(x) = 400x$, $0 \le x \le 0.05$. Тому за формулою (12) маємо

$$A = 400 \int_0^{0.05} x dx = 400 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0.05} = 0.5 \text{ Дж}.$$

Завдання для самостійної роботи:

1. Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, знайти інтеграли:

1) $\int_{-1}^{3} \sqrt[3]{x+1}dx$;	2) $\int_0^2 (1-x)^3 dx$;	3) $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$;
4) $\int_1^2 \frac{4}{x}dx$;	5) $\int_2^3 \frac{12x^2}{2x^3-3}dx$;	6) $\int_1^2 \frac{2+\ln x}{x}dx$.
7) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$	8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$	9) $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$
10) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$	11) $\int_0^1 e^{3x}dx$	12) $\int_0^{e-1} \ln(x+1)dx$

2. Побудувати рисунок та обчислити за допомогою визначеного інтегралу площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 - 2;\quad y = 0;$	2) $y = x^2 - 6x + 5;\quad y = 0;$	3) $y = x^3;\quad y = x^2;$
4) $y = x;\quad y = -x + 2;\quad y = 0;$	5) $y = \sqrt{x};\quad y = 2 - x;\quad y = 0;$	6) $y = x^3;\ y = 1;\ x = 0;$
7) $y = \ln x;\ x = 1;\ x = e^2;\ y = 0;$	8) $y = 20x - x^2;\ x = 0;\ x = 4;$ $y = 0;$	9) $y^2 = 2x + 1;$ $x - y - 1 = 0.$
10) $y = 3x^2 + 1$, $y = 3x + 7$	11) $y = \frac{1}{4}\left(x^2 - 3x\right)$, віссю абсцис та прямою $x = 5$	12) $y = \ln x$, $x = e,\ x = e^2,\ y = 0$

3. 1) Знайти шлях, пройдений від початку руху до кінця третьої секунди, якщо швидкість руху тіла задана рівнянням $v(t) = \left(4t^2 + 1\right)$ м/с.

2) Швидкість тіла задається формулою $V = \left(3t^2 + 2t\right)$ м/с. Знайти шлях, який пройде тіло за перші 7 секунд після початку руху.

3) Швидкість тіла задається формулою $V = \left(t^2 + 4t + 2\right)$ м/с. Знайти шлях, який пройде тіло за перші 5 секунд після початку руху.

4. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі *OX* фігури, обмеженої лініями:

1) $xy = 4,\ \ x = 1,\ \ x = 4,\ y = 0;$

2) $y = 2\sqrt{x}, x = 0, x = 9, y = 0;$

3) $y = \sin x, x = 0, x = \frac{\pi}{2}.$

4) $y = x^2 - 9,\ y = 0.$

5) $y = 2x - x^2,\ y = 0.$

6) $y = 3x - x^2, y = 0.$

7) $y = 6x - x^2\ \ y = 0.$

8) $y = x^2 - 4,\ y = 0.$

РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Основна література

1. Барабаш Г.М. Вища математика для біологів. Навчально-методичний посібник у двох частинах. Частина 1 // Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2013. –136 с.
2. Барабаш Г.М. Вища математика для біологів. Навчально-методичний посібник у двох частинах. Частина 2 // Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2014. –110 с.
3. Вища математика: підручник / за ред. Е.І. Личковського, П.Л. Свердана. – Вінниця: Нова книга, 2014, – 632 с.
4. Свердан П.Л. Вища математика. Математичний аналіз і теорія ймовірностей: Підручник. – К: Знання, 2008. – 450 с.
5. Дягілева Ф.Г. Вища математика: Навч. посіб. / Ф.Г. Дягілева., Г.В. Жиронкіна, В.О. Тіманюк, Б.Ф. Горбуненко. – Х.: Вид-во НФАУ: Золоті сторінки, 2001. – 84 с.

Додаткова

1. Чалий О.В. Вища математика: Навч. посібник для студ. мед. та фарм. Навч. закладів. / О.В. Чалий, Н.Ф. Стучинська, А.В. Меленєвська – К.: Техніка, 2001. – 204 с.
2. Личковський Е.І. Вища математика. Теорія наукових досліджень. У фармації та медицині: підручник / Е.І. Личковський, П.Л. Свердан. – К: Знання, 2012. – 476 с.
3. Свердан П.Л. Вища математика. Аналіз інформації у фармації та медицині: Підручник. – Львів: Світ, 1998. – 332 с.
4. Шевченко Р.Л., Мельниченко О.П., Непочатенко В.А. Вища математика. – Біла Церква, 2015. – 301 с.
5. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах. – Київ « Центр учбової літератури» 2009. – 592.

ЗМІСТ

1. Елементи лінійної алгебри 3

2. Пряма лінія на площині 32

3. Криві другого порядку 43

4. Вступ до математичного аналізу 56

5. Границя функції 66

6. Похідна функції 75

7. Застосування диференціального числення для дослідження функцій 87

8. Невизначений інтеграл 91

9. Визначений інтеграл та його застосування 111

Рекомендована література 125

Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний.
Формат видання 11,39х16,19/16.
Умовн. друк. арк. 7.44. Наклад:50. Зам. №34.
Видавництво ПП «АУТДОР – ШАРК»
88000, м. Ужгород, Україна
пл. Жупанатська, 15/1.

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготовників
і розповсюджувачів видавничої продукції.
Серія 3т № 40 від 29 жовтня 2012 року.