УДК 519.9

П. П. Антосяк (Ужгородський нац. ун-т)

ДЕКОМПОЗИЦІЙНІ ПРОЦЕДУРИ У ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ СТРОГОГО РЕЗУЛЬТУЮЧОГО РАНЖУВАННЯ ОБ'ЄКТІВ У ВИГЛЯДІ МЕДІАНИ КЕМЕНІ-СНЕЛЛА

Decomposition procedures in a problems of construction of strict collective ranking of objects are considered. For the problem of finding of Kemeny-Snell median sufficient conditions of decomposition are formulated and proofed. Algorithm of initial decomposition and sequential decomposition algorithm are constructed. Results of experimental researches are reduced.

У роботі запропоновано декомпозиційні процедури в задачах побудови строгого колективного ранжування об'єктів. Для задачі знаходження медіани Кемені-Снелла сформульовано і обґрунтовано достатні умови декомпозиції. Побудовано алгоритм початкової декомпозиції та декомпозиційний алгоритм, що базується на ідеях послідовного аналізу варіантів. Наводяться результати експериментальних досліджень.

Постановка задачі. Нехай на фіксованій множині об'єктів $O = \{o_1, ..., o_n\}$ експертами, нормовані коефіцієнти компетентності α_l, $l \in L = \{1, ..., m\}$ яких відомі, задані матриці строгих парних порівнянь $P^{(l)}$, $l \in L$. Елементи $p_{ij}^{(l)}$, $p_{ij}^{(l)} \in \{-1, 1\}$, матриць $P^{(l)}$ – це результат порівняння l-им експертом об'єктів o_i та o_j, $i, j \in I = \{1, ..., n\}$, $i \neq j$: $p_{ij}^{(l)} = 1$, якщо на думку l-го експерта об'єкт o_i кращий за o_j; $p_{ij}^{(l)} = -1$, якщо об'єкт o_i гірший за o_j. Ставиться задача побудови на основі заданих індивідуальних переваг колективної переваги у вигляді медіани Кемені-Снелла. У [1] ця задача зводиться до наступної комбінаторної задачі:

$$(i_1^*, ..., i_n^*) \in KS = Arg \max_{(i_1, ..., i_n) \in \Omega} \{F(i_1, ..., i_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} a_{i_k i_j}\}, \qquad (1)$$

де $a_{i_k i_j} = \sum\limits_{l \in L} \alpha_l p_{i_k i_j}^{(l)}$; Ω – множина всіх можливих перестановок множини індексів I; $(i_1, ..., i_n)$ – елемент множини Ω (варіант задачі (1)).

Декомпозиційні процедури в задачах побудови строгого колективного ранжування об'єктів. Важливою особливістю задачі визначення колективного ранжування є її "розкладність" [2]. Так, у [3] пропонується декомпозиційний алгоритм послідовного аналізу варіантів у задачі знаходження строгого результуючого ранжування об'єктів для метрики неспівпадання рангів (медіана Кука-Сейфорда). Декомпозиція тут розглядається як розкладність матриці, що відповідає області допустимих розв'язків. В загальному ж випадку під декомпозицією деякої задачі розуміють зведення її до розв'язання декількох однотипних задач меншої розмірності.

Нехай $X(I)$ – правило побудови строгого колективного порядку на множині об'єктів з індексами із множини I, що ставить кожному профілю індивідуальних переваг (у вигляді строгих лінійних порядків) строгий колективний порядок (взагалі кажучи, не єдиний). І нехай $\{I_1, ..., I_q\}$, $2 \le q \le n$, деяке розбиття множини індексів I, але таке, що $I_t \cap I_h = \emptyset$ при $t \neq h$ та $\bigcup\limits_{k=1}^{q} I_k = I$. Назвемо

$\{I_1, ..., I_q\}$ декомпозицією правила $X(I)$, вклавши в неї наступний зміст: правило $X(I)$ замінюється композицією $X(I_1) \succ X(I_2) \succ ... \succ X(I_q)$.

Із сказаного випливає, що декомпозицію слід розглядати в трьох аспектах. Вона може бути:

- недопустимою – коли з допомогою будь-якої композиції оптимальних розв'язків підзадач не можливо отримати жодного оптимального варіанту вихідної задачі;
- допустимою – коли існує композиція оптимальних розв'язків підзадач, яка дає нам деякий оптимальний розв'язок вихідної задачі;
- необхідною або обов'язковою – коли будь-який оптимальний розв'язок вихідної задачі може бути отриманий як деяка композиція оптимальних розв'язків підзадач.

Приклад 1. *Таблиця 1*

3	2	3	4
d	c	d	b
b	b	b	a
c	a	c	d
a	d	a	c

Для даного профілю (таб. 1), за правилом Кондорсе отримуємо два строгих колективних порядки: $b \succ d \succ c \succ a$ та $d \succ b \succ c \succ a$. Отже, декомпозиції $\{\{d, b\}, \{c, a\}\}$, $\{\{b, c, d\}, \{a\}\}$ та $\{\{b, d\}, \{c\}, \{a\}\}$ є необхідними; декомпозиція $\{\{d\}, \{b, c, a\}\}$ - допустима; декомпозиція $\{\{c\}, \{a, b, d\}\}$ — недопустима.

Нехай $\tilde{I} \subset I$. Відмітимо наступні ситуації.

Ситуація 1. Об'єкт o_i кращий за об'єкт o_j, $\forall i \in \tilde{I}$, $\forall j \in I \backslash \tilde{I}$.

Ситуація 2. Об'єкт o_i не може слідувати за об'єктом o_j, $\forall i \in \tilde{I}$, $\forall j \in I \backslash \tilde{I}$.

Ситуація 3. Об'єкт o_i кращий за об'єкт o_j або ж об'єкт o_i не може слідувати за об'єктом o_j, $\forall i \in \tilde{I}$, $\forall j \in I \backslash \tilde{I}$.

Зауважимо, що із ситуації 3 випливає як ситуація 1 так і ситуація 2, але не навпаки. Тому будемо їх розрізняти.

Лема 1. ***(Достатня умова необхідності декомпозиції)***. *Якщо для довільного строгого колективного порядку, побудованого за правилом X, встановлена одна з ситуацій 1-3, тоді декомпозиція $\{\tilde{I}, I \backslash \tilde{I}\}$ правила X є необхідною.*

Лема 2. ***(Достатня умова допустимості декомпозиції)***. *Якщо існує строгий колективний порядок, побудований за правилом X, для якого встановлена одна з ситуацій 1-3, тоді декомпозиція $\{\tilde{I}, I \backslash \tilde{I}\}$ правила X є допустимою.*

Декомпозиція задачі знаходження строгого результуючого ранжування об'єктів у вигляді медіани Кемені-Снелла. У відповідності із попередніми викладками у декомпозицію задачі (1) вкладено наступний зміст. У випадку, коли для кожного оптимального варіанту $(i_1^*, ..., i_n^*)$ задачі (1) виконується

$$\text{якщо } j \in I_h(1 \le h \le q) \text{ та } i_t^* = j, \text{ то } \sum_{k=0}^{h-1} |I_k| < t \le \sum_{k=0}^{h} |I_k|, (I_0 = \emptyset) \tag{2}$$

будемо говорити, що декомпозиція $\{I_1, ..., I_q\}$ є необхідною (обов'язковою). Якщо ж існує хоча б один оптимальний варіант $(i_1^*, ..., i_n^*)$ задачі (1), для якого виконується (2), то будемо говорити, що декомпозиція $\{I_1, ..., I_q\}$ є допустимою.

"Початкова" декомпозиція задачі (1).

Твердження 1. *Нехай існує набір індексів $I^{(1)} \subset I$ такий, що $a_{ij} \ge 0$, $\forall i \in I^{(1)}$, $\forall j \in I \backslash I^{(1)}$. Тоді декомпозиція $\{I^{(1)}, I \backslash I^{(1)}\}$ є допустимою.*

Доведення. Припустимо протилежне. Нехай не існує жодного оптимального варіанту задачі (1), для якого б виконувалася умова (2). Візьмемо довільний оптимальний варіант $(i_1^*, ..., i_n^*) \in KS$ задачі (1). Нехай $\tilde{i}_1 = \arg \min\limits_{j: i_j^* \in I^{(1)}} j$. Розглянемо різницю

$$F(i_1^*, ..., i_{\tilde{i}_1-1}^*, i_{\tilde{i}_1}^*, i_{\tilde{i}_1+1}^*, ..., i_n^*) - F(i_{\tilde{i}_1}^*, i_1^*, ..., i_{\tilde{i}_1-1}^*, i_{\tilde{i}_1+1}^*, ..., i_n^*) = -2 \sum_{j=1}^{\tilde{i}_1-1} a_{i_{\tilde{i}_1}^* i_j^*}. \tag{3}$$

Із оптимальності варіанту $(i_1^*, ..., i_{\tilde{i}_1-1}^*, i_{\tilde{i}_1}^*, i_{\tilde{i}_1+1}^*, ..., i_n^*)$ та (2) випливає виконання нерівності $\sum\limits_{j=1}^{\tilde{i}_1-1} a_{i_{\tilde{i}_1}^* i_j^*} \le 0$. Із правила вибору індексу $\tilde{i}_1$ маємо: $a_{i_{\tilde{i}_1}^* i_j^*} \ge 0$, $j = \overline{1, \tilde{i}_1 - 1}$. Тобто для (2) виконується $\sum\limits_{j=1}^{\tilde{i}_1-1} a_{i_{\tilde{i}_1}^* i_j^*} \ge 0$. Таким чином $\sum\limits_{j=1}^{\tilde{i}_1-1} a_{i_{\tilde{i}_1}^* i_j^*} = 0$. А це означає, що варіант $(i_{\tilde{i}_1}^*, i_1^*, ..., i_{\tilde{i}_1-1}^*, i_{\tilde{i}_1+1}^*, ..., i_n^*)$ також є оптимальним варіантом задачі (1).

Далі, за аналогією із попередніми міркуваннями, на кожному $k-$ му $(2 \le k \le |I^{(1)}|)$ кроці виконуємо наступне. Визначимо індекс $\tilde{i}_k = \arg \min\limits_{j: i_j^* \in I^{(1)} \backslash \{\tilde{i}_1, ..., \tilde{i}_{k-1}\}} j$ і розглянемо різницю

$$F(i_{\tilde{i}_1}^*, ..., i_{\tilde{i}_{k-1}}^*, i_1^*, ..., i_{\tilde{i}_k-1}^*, i_{\tilde{i}_k}^*, i_{\tilde{i}_k+1}^*, ..., i_n^*) - F(i_{\tilde{i}_1}^*, ..., i_{\tilde{i}_{k-1}}^*, i_{\tilde{i}_k}^*, i_1^*, ..., i_{\tilde{i}_k-1}^*, i_{\tilde{i}_k+1}^*, ..., i_n^*) =$$

$$= -2 \sum_{j=1, j \ne \tilde{i}_q, 1 \le q < k}^{\tilde{i}_k-1} a_{i_{\tilde{i}_k}^* i_j^*}. \tag{4}$$

Із оптимальності варіанту $(i_{\tilde{i}_1}^*, ..., i_{\tilde{i}_{k-1}}^*, i_1^*, ..., i_{\tilde{i}_k-1}^*, i_{\tilde{i}_k}^*, i_{\tilde{i}_k+1}^*, ..., i_n^*)$ та (3) випливає справедливість нерівності $\sum\limits_{j=1, j \ne \tilde{i}_q, 1 \le q < k}^{\tilde{i}_k-1} a_{i_{\tilde{i}_k}^* i_j^*} \le 0$. Із правила вибору індексу $\tilde{i}_k$ маємо: $a_{i_{\tilde{i}_k}^* i_j^*} \ge 0$, $j = \overline{1, \tilde{i}_k - 1}$, $j \ne \tilde{i}_q$, $q = \overline{1, k-1}$. Тобто для (3): $\sum\limits_{j=1, j \ne \tilde{i}_q, 1 \le q < k}^{\tilde{i}_k-1} a_{i_{\tilde{i}_k}^* i_j^*} \ge 0$. Таким чином, на всякому $k-$му $(2 \le k \le |I^{(1)}|)$ кроці варіант $(i_{\tilde{i}_1}^*, ..., i_{\tilde{i}_{k-1}}^*, i_{\tilde{i}_k}^*, i_1^*, ..., i_{\tilde{i}_1-1}^*, i_{\tilde{i}_1+1}^*, ..., i_{\tilde{i}_k-1}^*, i_{\tilde{i}_k+1}^*, ..., i_n^*)$ також є оптимальним варіантом задачі (1).

Отже, через скінченну кількість кроків матимемо, що варіант

$$(i^*_{\tilde{i}_1}, ..., i^*_{\tilde{i}_{|I^{(1)}|}}, i^*_1, ..., i^*_{\tilde{i}_1-1}, i^*_{\tilde{i}_1+1}, ..., i^*_{\tilde{i}_{|I^{(1)}|}-1}, i^*_{\tilde{i}_{|I^{(1)}|}+1}, ..., i^*_n) \in KS$$

і для нього, очевидно, виконується (2). Отримано протиріччя. Твердження доведено.

Твердження 2. *Нехай існує набір індексів $I^{(2)} \subset I$ такий, що $a_{ij} > 0$, $\forall i \in I^{(2)}$, $\forall j \in I \backslash I^{(2)}$. Тоді декомпозиція $\{I^{(2)}, I \backslash I^{(2)}\}$ є необхідною.*

Доведення. Покажемо, що виконується ситуація 2 та умови леми 1. Припустимо протилежне. Це означає, що існує принаймні один оптимальний варіант $(i^*_1, ..., i^*_n)$ задачі (1), для якого знайдеться пара індексів $i \in I^{(2)}$, $j \in I \backslash I^{(2)}$ така, що $(i^*_1, ..., i^*_k = j, i^*_{k+1} = i, ..., i^*_n) \in KS$, $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Розглянувши різницю

$$F(i^*_1, ..., i^*_k = j, i^*_{k+1} = i, ..., i^*_n) - F(i^*_1, ..., i^*_k = i, i^*_{k+1} = j, ..., i^*_n) = -2a_{ij}$$

та врахувавши умову твердження, отримуємо протиріччя щодо $(i^*_1, ..., i^*_n) \in KS$. Твердження доведено.

Позначимо через $I^* \subset I$ найменшу множину, для якої виконуються умови леми 1 (леми 2). Кластеризація чи класифікація може бути неформально визначена як процес об'єднання об'єктів у групи за схожими ознаками. В цьому випадку I^* — це клас "фактичних лідерів" (вони виграють (не програють) у парних порівняннях у довільного кандидата, який не входить до цього класу) для заданого профілю переваг.

Алгоритм початкової декомпозиції. На основі тверджень 1, 2 здійснюється початкова декомпозиція задачі (1) за наступним алгоритмом.

Крок 0. Покладемо:

1) $\forall i, j \in I, \quad i \neq j$, у випадку знаходження необхідної декомпозиції:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_{ij} > 0, \\ 0, & \text{інакше.} \end{cases}$$

У випадку знаходження допустимої декомпозиції:

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } a_{ij} \geq 0, \\ 0, & \text{якщо } a_{ij} < 0. \end{cases}$$

2) $\omega_i = i, \quad \forall i \in I$.

3) $G_0 = \emptyset$.

Крок k $(1 \leq k < n)$. Нехай на попередніх кроках сформовано кластери (чи класи) $G_1, G_2, ..., G_{t-1}$ $(1 \leq t < k)$ і йде побудова кластеру G_t. Виконуємо наступні кроки.

1) Визначаємо індекс $i_k = \arg \max\limits_{i: k \leq i \leq n} \sum\limits_{j=k, j \neq i}^{n} d_{\omega_i \omega_j}$.

2) Покладемо $\omega_k = \omega_k + \omega_{i_k}$, $\omega_{i_k} = \omega_k - \omega_{i_k}$, $\omega_k = \omega_k - \omega_{i_k}$.

3) Добавимо об'єкт з індексом ω_k до кластеру G_t.

4) Якщо $\sum\limits_{j=k+1}^{n} d_{\omega_k\omega_j} = n-k$, то завершуємо формування кластеру G_t і приступаємо до формування кластеру G_{t+1}. Інакше покладемо

$$d_{\omega_i\omega_j} = d_{\omega_i\omega_j} \cdot d_{\omega_k\omega_j}, \quad \forall i,j \in I, n \geq i \neq j > k.$$

Про медіану Кемені-Снелла та правило Копленда.

Теорема 1. *У випадку медіани Кемені в умовах твердження 2 множина I^* містить індекси всіх переможців Копленда для відповідних індивідуальних переваг задачі (1).*

Доведення. Згідно [4] правило Копленда виглядає наступним чином. Оцінкою Копленда альтернативи o_i називають величину $K(o_i) = \sum\limits_{k\neq i} K(o_i, o_k)$, де

$$K(o_i, o_k) = \begin{cases} 1, \text{ якщо для більшості } o_i \succ o_k, \\ -1, \text{ якщо для більшості } o_k \succ o_i, \\ 0, \text{ при рівності голосів.} \end{cases} \tag{5}$$

Альтернатива з найбільшою оцінкою Копленда оголошується переможцем Копленда. У випадку знаходження медіани Кемені, якщо для більшості $o_i \succ o_k$, то $a_{ik} > 0$; якщо для більшості $o_k \succ o_i$, то $a_{ik} < 0$; при рівності голосів $a_{ik} = 0$ (це випливає із правила побудови величини a_{ik}). Таким чином, можемо записати $K(o_i) = |K_i^+| - |K_i^-|$, де $K_i^+ = \{k \in I | k \neq i, a_{ik} > 0\}$, $K_i^- = \{k \in I | k \neq i, a_{ik} < 0\}$.

Припустимо протилежне. Нехай об'єкт o_j, $j \in I \backslash I^*$, є переможцем Копленда. Виберемо довільний об'єкт o_i, $i \in I^*$. Із умов твердження 2 маємо, що $|K_i^+| \geq |I \backslash I^*|$ та $|K_i^-| \leq |I^*| - 1$. Для об'єкта o_j, із умов твердження 2 та властивості $a_{th} = -a_{ht}$, $\forall \ \ t,h \in I$, $t \neq h$, матриці виграшів, виконується: $|K_j^-| \geq |I^*|$ та $|K_j^+| \leq |I \backslash I^*| - 1$. Розглянемо різницю

$$K(o_j) - K(o_i) = |K_j^+| - |K_j^-| - |K_i^+| + |K_i^-| \leq$$

$$\leq |I \backslash I^*| - 1 - |I^*| - |I \backslash I^*| + |I^*| - 1 = -2 < 0.$$

Звідки отримуємо протиріччя того, що об'єкт o_j має найбільшу оцінку Копленда. Твердження доведено.

Для першого ж твердження аналогічний результат не завжди є справедливим. Це ілюструє наступний приклад:

Приклад 2. *Таблиця 2*

3	4	4	5
a	c	b	a
e	e	d	c
c	d	e	d
d	b	a	e
b	a	c	b

Для профілю, представленого таблицею 2, $K(a) = 1$, $K(b) = -3$, $K(c) = 2$, $K(d) = 1$, $K(e) = -1$. $I^* = \{a\}$, але єдиним переможцем Копленда є c.

Якщо додатну (від'ємну) величину a_{ij} (різниця між "сумарною компетентністю" групи експертів, що віддали перевагу об'єкту o_i над об'єктом o_j та "сумарною компетентністю" групи експертів, що віддали перевагу об'єкту o_j над об'єктом o_i) розглядати як "виграш" ("програш") – результат "перемоги" ("поразки") об'єкта o_i над об'єктом o_j. У цьому випадку логічно оголосити переможцем Копленда той об'єкт, різниця між кількістю "перемог" і "поразок" якого є найбільшою . У цьому контексті є справедливим результат "аналогічний" до теореми 1.

Теорема 2. *В умовах твердження 2 множина I^* містить індекси всіх переможців Копленда для відповідних індивідуальних переваг задачі (1).*

Декомпозиція задачі (1) через локалізацію. У роботі [1] було введено поняття інтервалу зміни оптимальних рангів об'єкта та процедури його локалізації. Нехай $[R_i^{(k_i^{loc})}, r_i^{(k_i^{loc})}]$ інтервал, що локалізує інтервал зміни оптимальних рангів i-го об'єкта $[R_i^*, r_i^*]$. У цих термінах справедливі:

Твердження 3. *Нехай існує набір індексів $I^{(2)} \subset I$ такий, що $r_i^{(k_i^{loc})} \leq R_j^{(k_j^{loc})}$, $\forall i \in I^{(2)}$, $\forall j \in I \backslash I^{(2)}$. Тоді декомпозиція $\{I^{(2)}, I\backslash I^{(2)}\}$ є необхідною.*

Твердження 4. *Нехай існує набір індексів $I^{(3)} \subset I$ такий, що*

$$\forall i, j : a_{ij} < 0, i \in I^{(3)}, j \in I\backslash I^{(3)} \text{ виконується } r_i^{(k_i^{loc})} \leq R_j^{(k_j^{loc})}. \tag{6}$$

Тоді декомпозиція $\{I^{(3)}, I\backslash I^{(3)}\}$ допустима.

Доведення. Виконання умови (5) забезпечує для всякого оптимального варіанту задачі (1) ситуацію 1 для довільних об'єктів з індексами $i \in I^{(3)}$, $j \in I\backslash I^{(3)}$, такими, що $a_{ij} < 0$. Для всіх інших об'єктів з індексами $i \in I^{(3)}$, $j \in I\backslash I^{(3)}$, такими, що $a_{ij} \geq 0$, аналогічно до доведення твердження 1, можемо показати існування оптимального варіанту задачі (1), для якого виконується ситуація 1. Отже, в цілому буде виконуватися умова леми 2 та ситуація 3. Твердження доведено.

Для довільних індексів $i, j \in I$, $i \neq j$ введемо позначення.

$$H_{ij}^{(1)} = \{h \in I | h \neq i \neq j, a_{ih} \geq 0, [R_j^{(k_j^{loc})} + 2, \min\{r_i^{(k_i^{loc})} + 1, n\}] \cap [R_h^{(k_h^{loc})}, r_h^{(k_h^{loc})}] \neq \emptyset\},$$

$$H_{ij}^{(2)} = \{h \in I | h \neq i \neq j, a_{hj} \geq 0, [\max\{1, R_j^{(k_j^{loc})} - 1\}, r_i^{(k_i^{loc})} - 2] \cap [R_h^{(k_h^{loc})}, r_h^{(k_h^{loc})}] \neq \emptyset\}.$$

Твердження 5. *Нехай існує набір індексів $I^{(4)} \subset I$ такий, що $\forall i, j$: $a_{ij} < 0$, $i \in I^{(4)}$, $j \in I\backslash I^{(4)}$, і у випадку, коли об'єкт з індексом $i \in I^{(4)}$ не може бути найгіршим у колективному порядку побудованому за правилом (1) виконується*

$$\max_{h \in H_{ij}^{(1)}} \{a_{ji} + a_{jh}\} < 0. \tag{7}$$

А у випадку, коли об'єкт з індексом $i \in I^{(4)}$ не може бути найкращим у колективному порядку побудованому за правилом (1) виконується

$$\max_{h \in H_{ij}^{(2)}} \{a_{hi} + a_{ji}\} < 0. \tag{8}$$

Тоді декомпозиція $\{I^{(4)}, I \backslash I^{(4)}\}$ *допустима.*

Доведення. Той факт, що об'єкт з індексом $i \in I^{(4)}$ не може бути найгіршим означає, що для нього у всякому оптимальному варіанті знайдеться об'єкт з індексом $h \in I$, який буде слідувати після нього. Із необхідних умов оптимальності випливає, що це можуть бути лише такі індекси для яких $a_{ik} \geq 0$. Припустимо протилежне до твердження. У цьому разі із процедур локалізації оптимальних рангів випливає, що ситуація, в якій об'єкт o_i може слідувати за об'єктом o_j, можлива лише тоді, коли об'єкт o_i отримає ранг із інтервалу зміни рангів $[R_j + 1, r_i]$. А тоді ситуація, в якій об'єкт o_h може слідувати за об'єктом o_i, можлива, коли об'єкт o_h прийме ранг із проміжку зміни рангів $[R_j^{(k_j^{loc})} + 2, \min\{r_i^{(k_i^{loc})} + 1, n\}]$. А це еквівалентно виконанню умови:

$$[R_j^{(k_j^{loc})} + 2, \min\{r_i^{(k_i^{loc})} + 1, n\}] \cap [R_h^{(k_h^{loc})}, r_h^{(k_h^{loc})}] \neq \emptyset.$$

Тоді вибравши довільний оптимальний варіант, в якому ... $\succ o_j \succ o_i \succ o_h \succ$ ..., із умови (6) отримуємо протиріччя необхідних умов оптимальності. Отже, $\forall i, j$: $i \in I^{(4)}$, $j \in I \backslash I^{(4)}$, для яких $a_{ij} < 0$, отримуємо ситуацію, коли об'єкт o_i не може слідувати за об'єктом o_j. Для інших об'єктів за аналогією до доведення твердження 1, отримуємо існування оптимального варіанту, для якого виконується ситуація 1. Тобто нами встановлено виконання умов леми 2 та ситуації 3. Друга половина твердження доводиться аналогічно. Твердження доведено.

Зауваження 1. *Нерівність* $\sum_{j \neq i} a_{ij} < 0$ $(\sum_{j \neq i} a_{ij} > 0)$ *означає, що об'єкт* o_i, $i \in I$, *не може бути найкращим (найгіршим) у колективному порядку, побудованому за правилом (1). Це випливає із необхідних умов оптимальності.*

Декомпозиційний алгоритм, що базується на ідеях послідовного аналізу варіантів (ПАВ) можна отримати, модифікувавши алгоритм початкової декомпозиції. Єдиною відмінністю буде нульовий крок та правило визначення величин d_{ij} на нульовому кроці. Враховуючи результати тверджень 3-5, цей крок виглядатиме наступним чином.

Крок 0. Виконуємо наступні дії:

1) Застосування процедур локалізації інтервалів зміни оптимальних рангів об'єктів.

2) $\forall i, j \in I, \quad i \neq j:$

$$d_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } a_{ij} \geq 0, \\ 1, \text{якщо } a_{ij} < 0 \text{ і } r_i^{(k_i^{loc})} \leq R_j^{(k_j^{loc})}, \\ 1, \text{ якщо } a_{ij} < 0, \text{ виконується (6) та } \sum\limits_{j \neq i} a_{ij} > 0, \\ 1, \text{ якщо } a_{ij} < 0, \text{ виконується (7) та } \sum\limits_{j \neq i} a_{ij} < 0, \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$

3) $\omega_i = i, \quad \forall i \in I.$

4) $G_0 = \emptyset$.

Дослідження ефективності декомпозиційних алгоритмів. В обчислювальному експерименті розв'язувались задачі із різною кількістю об'єктів та експертів. Для кожної із розмірностей, при різному значенні коефіцієнта узгодженості думок експертів V [5], було сформовано по 100 тестових задач. Вхідні дані генерувались випадковим чином. Знаходилась кількість задач, котрі були декомпозовані, тобто які були зведені до розв'язання щонайменше двох підзадач. На мал.1, 2 представлені результати роботи описаних декомпозиційних алгоритмів.

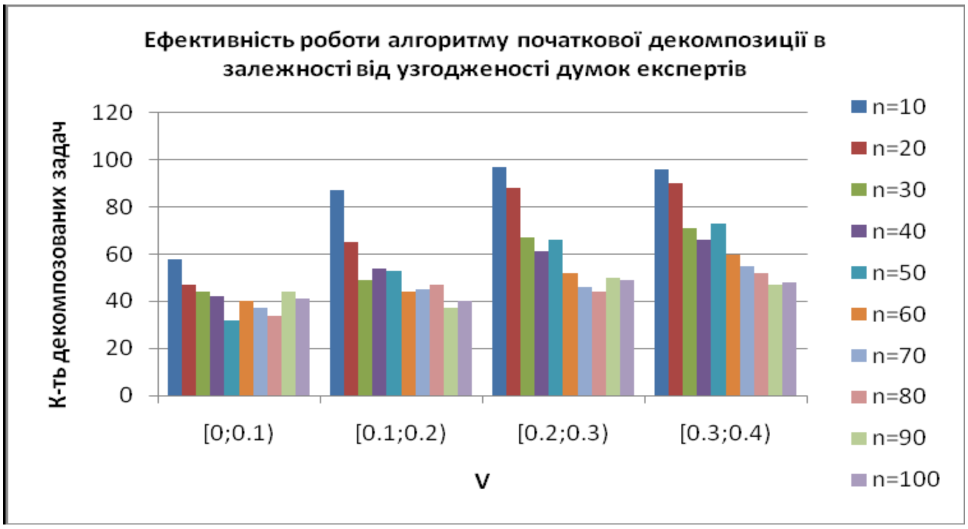

Рис. 1

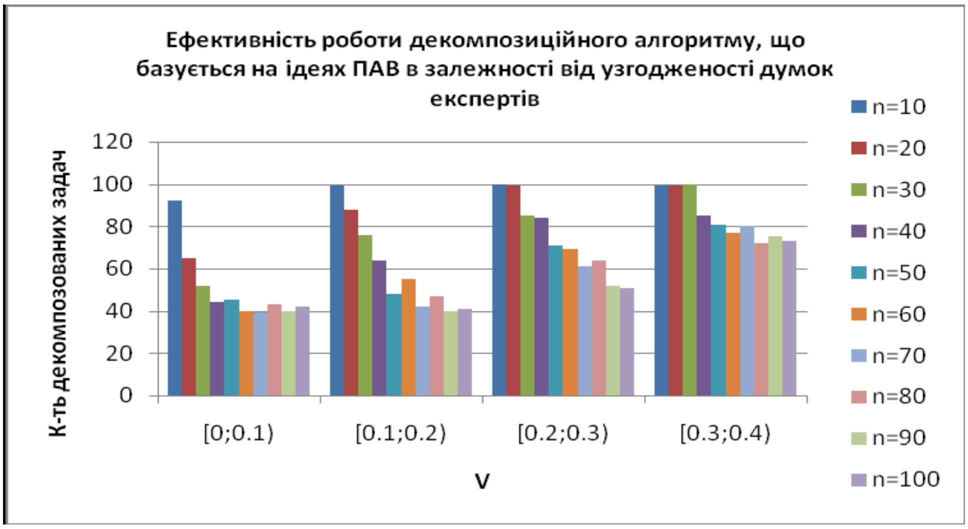

Рис. 2

Використання процедур локалізації інтервалів зміни оптимальних рангів об'єктів у послідовному декомпозиційному алгоритмі призводить до зростання часу його роботи. Тому в експерименті для ПДА додатково аналізувалися затрати часу, які проілюстровано на мал. 3.

Рис. 3

Вкажемо на основні відмінності цих алгоритмів.

- На відміну від алгоритму початкової декомпозиції, послідовний декомпозиційний алгоритм не може гарантувати знаходження необхідної декомпозиції задачі (1). Але, враховуючи складність вихідної задачі, важливо знайти хоча б один її оптимальний розв'язок. Тому побудова допустимої декомпозиції є цілком прийнятною.

- На відміну від алгоритму початкової декомпозиції, послідовний декомпозиційний алгоритм можна ефективно застосовувати для подальшої декомпозиції підзадач.

1. *Антосяк П.П.* До правил голосування Кондорсе і Борда.// Вісник Київського університету. Сер.: Фізико-математичні науки. – 2007. – № 4. – С. 50-55.
2. *Миркин Б.Г.* Проблема группового выбора. – М.: Наука, 1974. – 256 с.
3. *Гнатієнко Г.М., Снитюк В.Є.* Експертні технології прийняття рішень: Монографія. – К.: ТОВ "Маклаут", 2008. -444 с.
4. *Волошин О.Ф., Мащенко С.О.* Теорія прийняття рішень: Навчальний посібник. – К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2006. – 304 с.
5. *Литвак Б.Г.* Экспертная информация: Методы получения и анализа. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

Одержано 16.10.2008